COGNOME . . . . NOME . . . .

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO.

Esercizio 1. Per $N \in \mathbb{N}$, sia $s_N(z) = \sum_{j=0}^{N} a_n z^n$ la somma parziale della serie di Taylor di $f(z) = (z^2+1)e^z$. Dimostrare che per N abbastanza grande la derivata complessa s'_N di s_N non si annulla sul disco aperto $\Delta_{1/2}(0)$.

Esercizio 2. i) Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa non costante tale che $\lim_{z\to\infty} f''(z) = 0$. Dimostrare che f è un biolomorfismo del piano complesso.

ii) Tra tali biolomorfismi, determinare quelli che ammettono un punto fisso, ovvero $a \in \mathbb{C}$ con $f(a) = a$.

iii) Mostrare che se $g \in Aut(\Delta) \setminus \{Id\}$, allora g ammette al più un punto fisso.

Esercizio 3. i) Enunciare il principio del massimo per funzioni olomorfe in entrambe le versioni discusse a lezione. ii) Enunciare e dimostrare l'analogo risultato per funzioni armoniche.

Esercizio 4. Solamente dopo aver ben ponderato sui precedenti esercizi, calcolare i seguenti integrali:

$$\int_\gamma (\operatorname{Im} z)^2 dz\,, \qquad \int_\gamma \frac{e^{z+1}(z+2)}{z^2(z^2+9)}dz\,, \qquad \int_\gamma \frac{ze^{iz}}{(z+i)^3}dz\,, \qquad \int_0^\infty \frac{x+1}{(2x+1)(x+2)(x+3)}dz$$

dove $\gamma(\theta) = 2e^{i\theta}$, per $\theta \in [0, 2\pi]$.