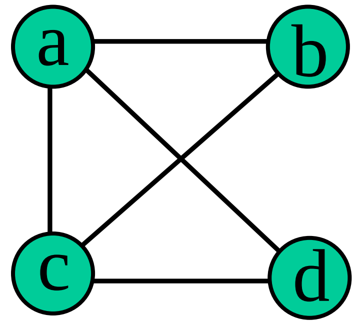
Algoritmi e Strutture Dati

Capitolo 11
Visite di grafi

Strutture dati
per rappresentare grafi

Grafi non diretti

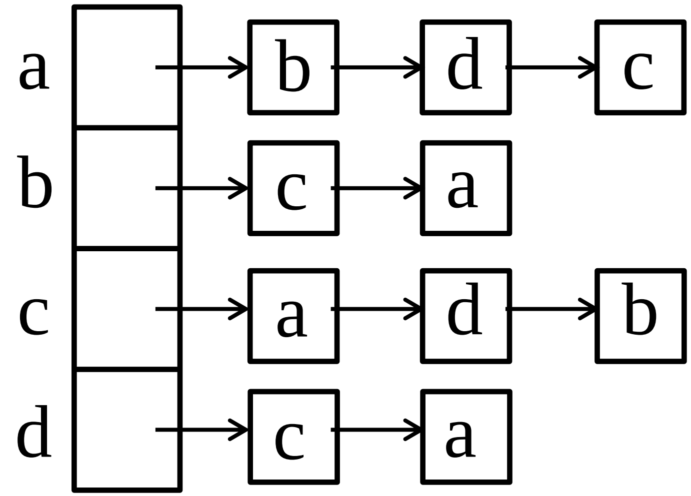
Quanto spazio?



	a	b	c	d
a	0	1	1	1
b	1	0	1	0
c	1	1	0	1
d	1	0	1	0

Matrice di adiacenza

$O(n^2)$

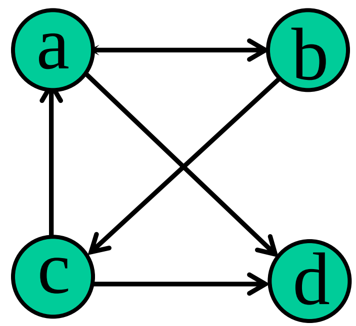


liste di adiacenza

$O(m + n)$

Grafi diretti

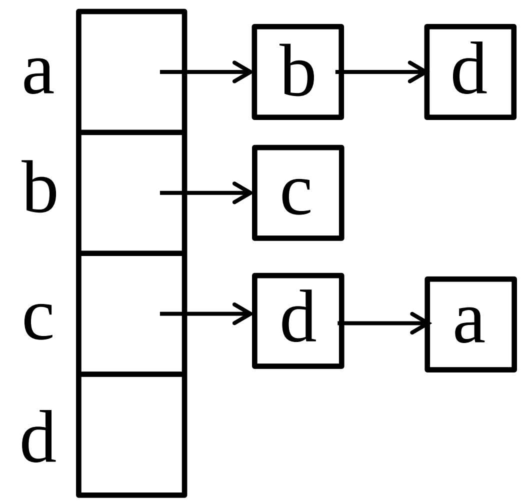
Quanto spazio?



	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	0	0	1	0
c	1	0	0	1
d	0	0	0	0

Matrice di adiacenza

$O(n^2)$



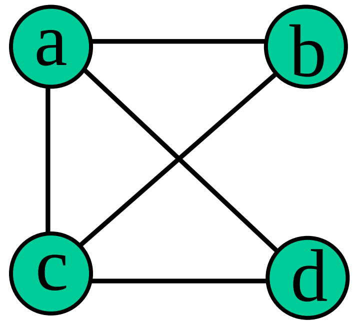
liste di adiacenza

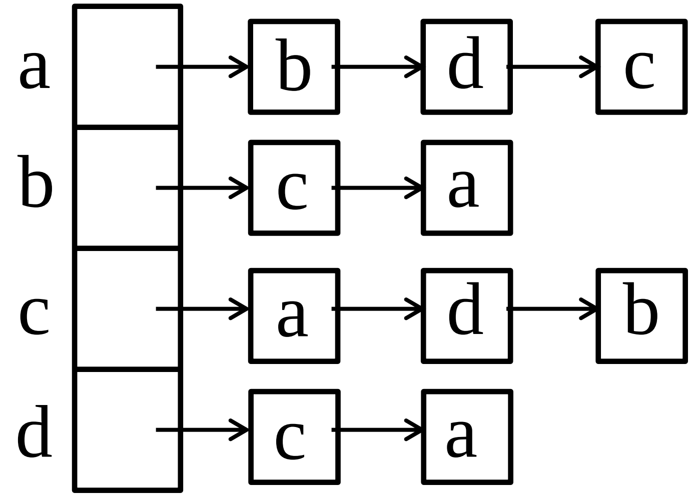
$O(m + n)$

Grafi non diretti

	a	b	c	d
a	0	1	1	1
b	1	0	1	0
c	1	1	0	1
d	1	0	1	0

Matrice di adiacenza





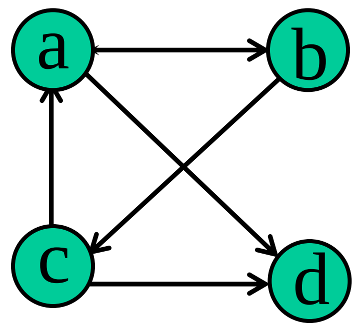
liste di adiacenza

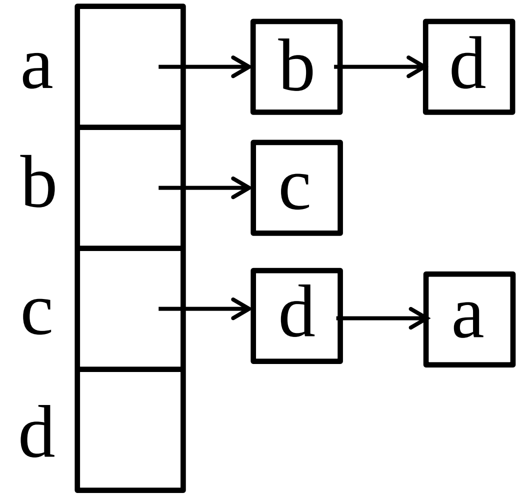
Operazione:	matrice di a.	liste di a.
elenco archi incidenti in v	$O(n)$	$O(\delta(v))$
c'è arco (u,v)?	$O(1)$	$O(\min\{\delta(u), \delta(v)\})$

Grafi diretti

	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	0	0	1	0
c	1	0	0	1
d	0	0	0	0

Matrice di adiacenza





liste di adiacenza

Operazione:	matrice di a.	liste di a.
elenco archi uscenti da v	$O(n)$	$O(\delta(v))$
c'è arco (u,v)?	$O(1)$	$O(\delta(u))$

algoritmi di visita di un grafo

Scopo e tipi di visita

- una visita di un grafo G permette di esaminare i nodi e gli archi di G in modo sistematico (se G è connesso)
- genera un albero di visita
- problema di base in molte applicazioni
- esistono vari tipi di visite con diverse proprietà:
  - visita in ampiezza (BFS=breadth first search)
  - visita in profondità (DFS=depth first search)

Visita in ampiezza

dato un grafo G (non pesato) e un nodo s, trova tutte le distanze/cammini minimi da s verso ogni altro nodo v

applicazioni

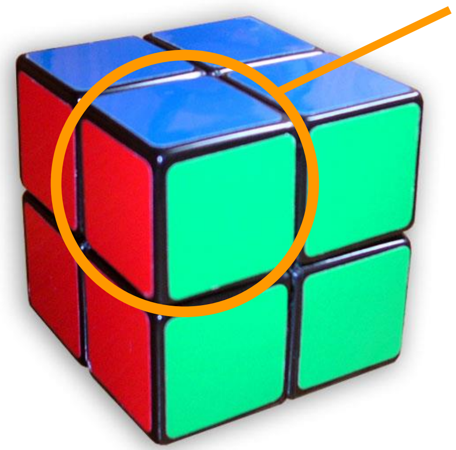
- web crawling
  - come google trova nuove pagine da indicizzare
- social networking
  - trovare gli amici che potresti conoscere
- network broadcast
  - un nodo manda un messaggio a tutti gli altri nodi della rete
- garbage collection
  - come scoprire memoria non più raggiungibile che si può liberare
- model checking
  - verificare una proprietà di un sistema
- risolvere puzzle
  - risolvere il Cubo di Rubik con un numero minimo di mosse

cubo di Rubik: 2x2x2

- grafo delle configurazioni
  - un vertice per ogni possibile stato del cubo
  - un arco fra due configurazioni se l'una è ottenibile dall'altra tramite una mossa

grafo non diretto

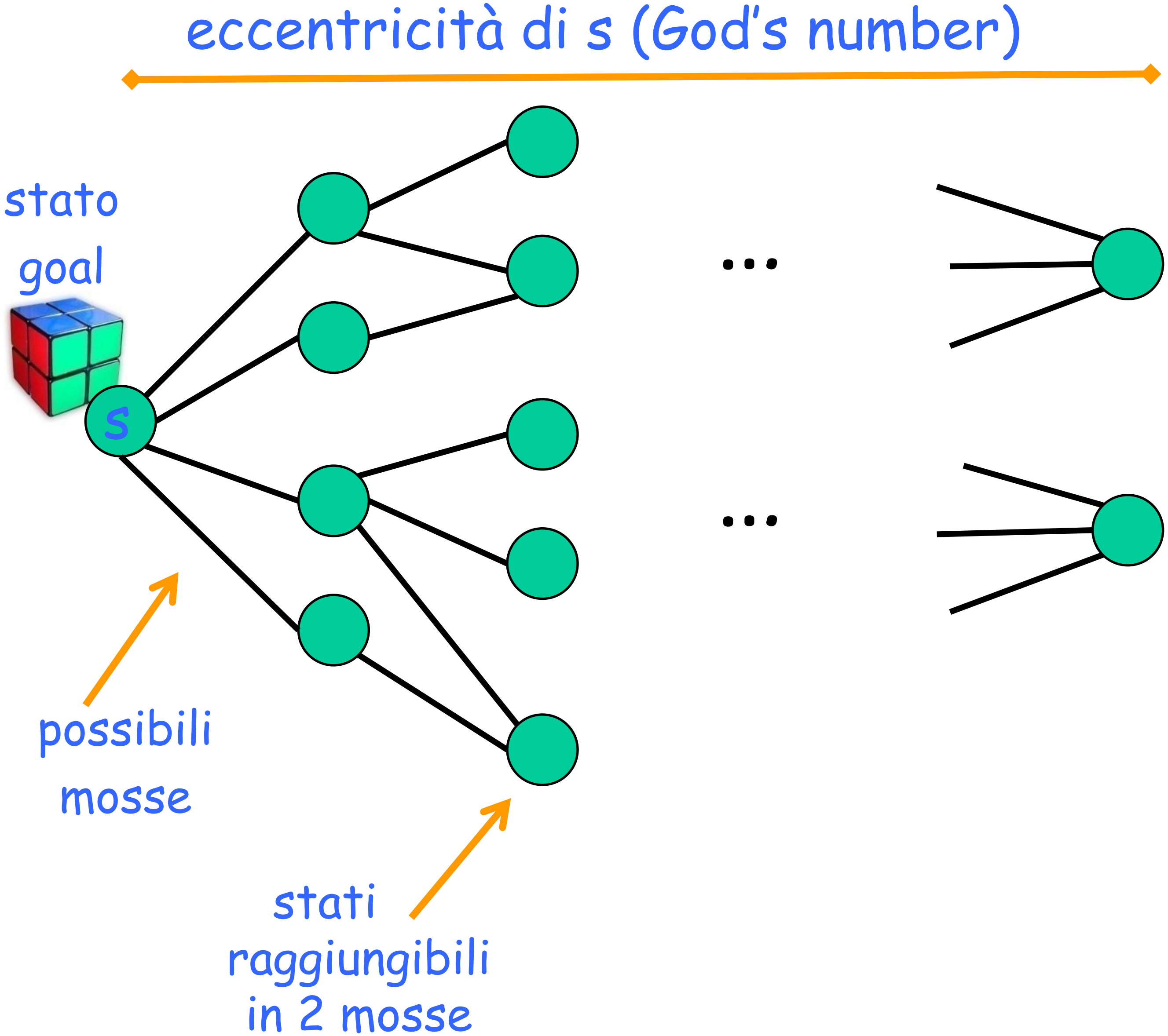
cubetto



#verciti $\leq 8! \times 3^8$

$= 264.539.520$

cubo di Rubik: 2x2x2



God's number

2x2x2: 11

3x3x3: 20

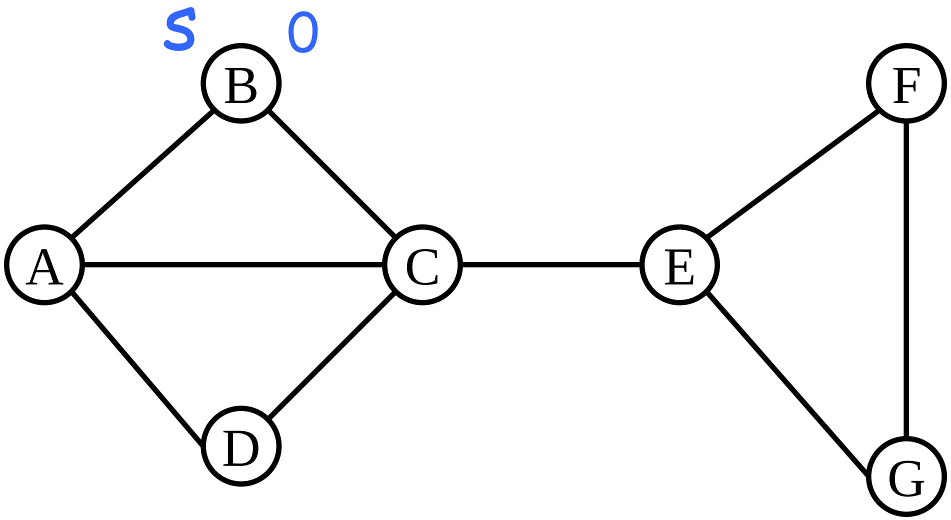
4x4x4: ???

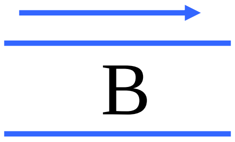
nxnxn: $\Theta(n^2/\log n)$

Visita in ampiezza

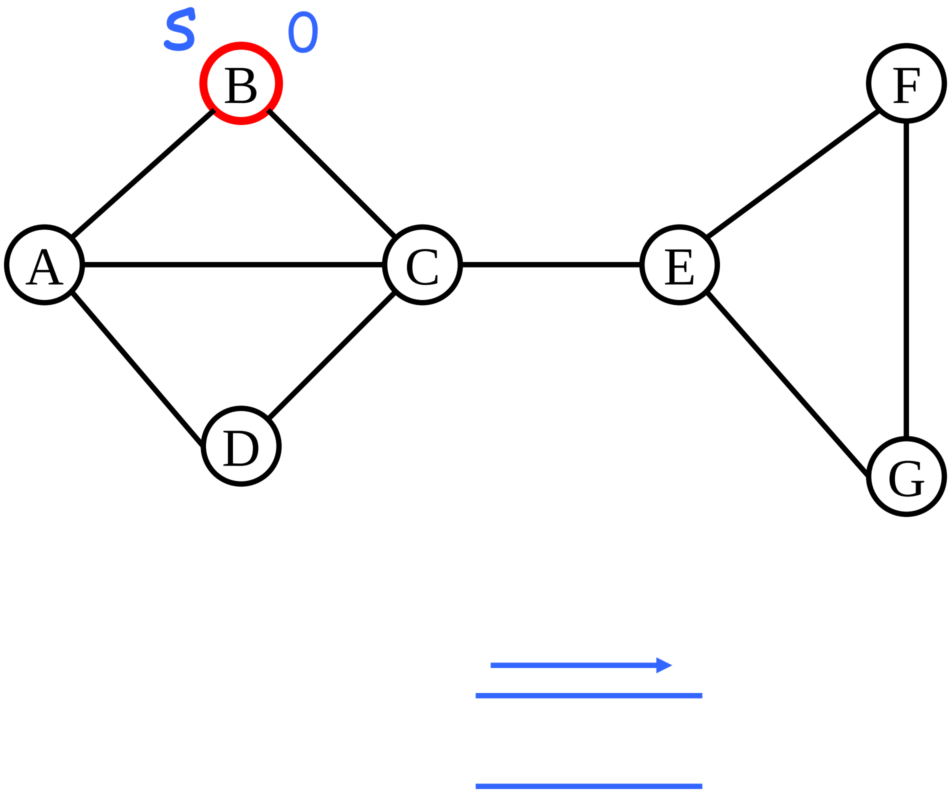
```
algoritmo visitaBFS(vertice s) → albero
    rendi tutti i vertici non marcati
    T ← albero formato da un solo nodo s
    Coda F
    marca il vertice s; dist(s)←0
    F.enqueue(s)
    while ( not F.isempty() ) do
        u ← F.dequeue()
        for each ( arco (u, v) in G ) do
            if ( v non è ancora marcato ) then
                F.enqueue(v)
                marca il vertice v; dist(v)← dist(u)+1
                rendi u padre di v in T
    return T
```

Un esempio

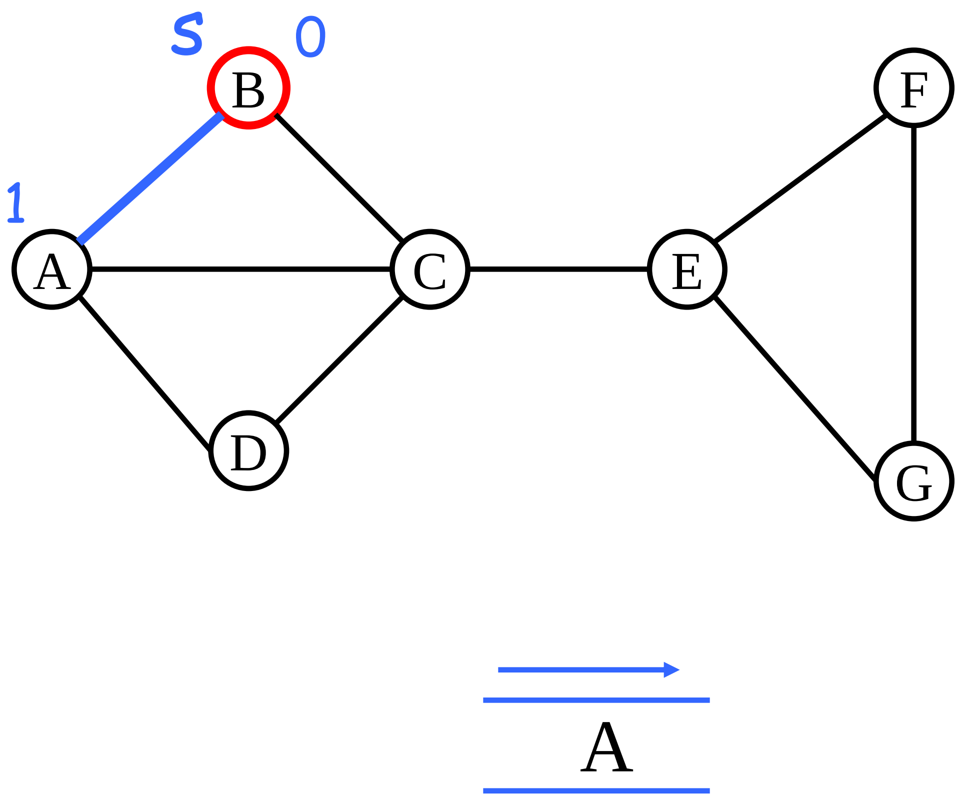




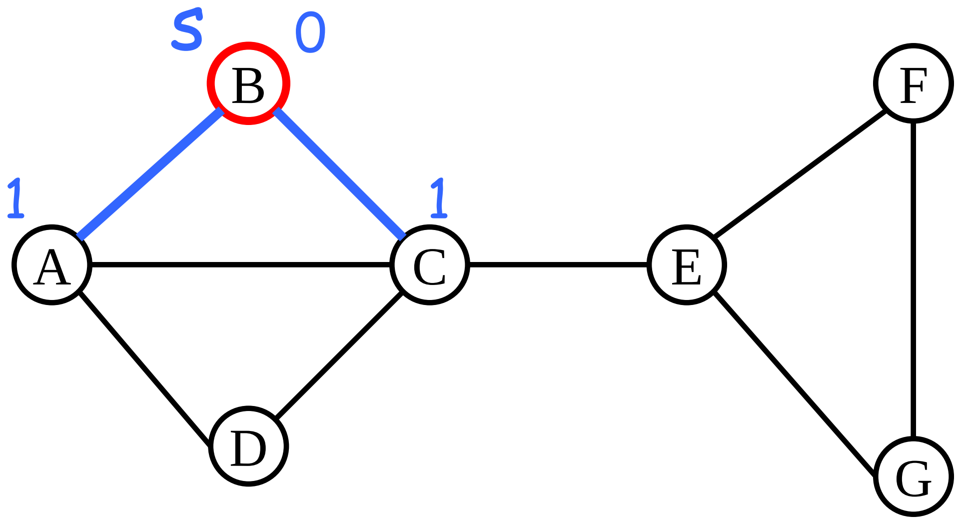
Un esempio

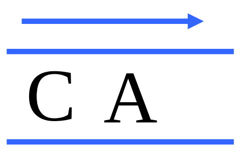


Un esempio

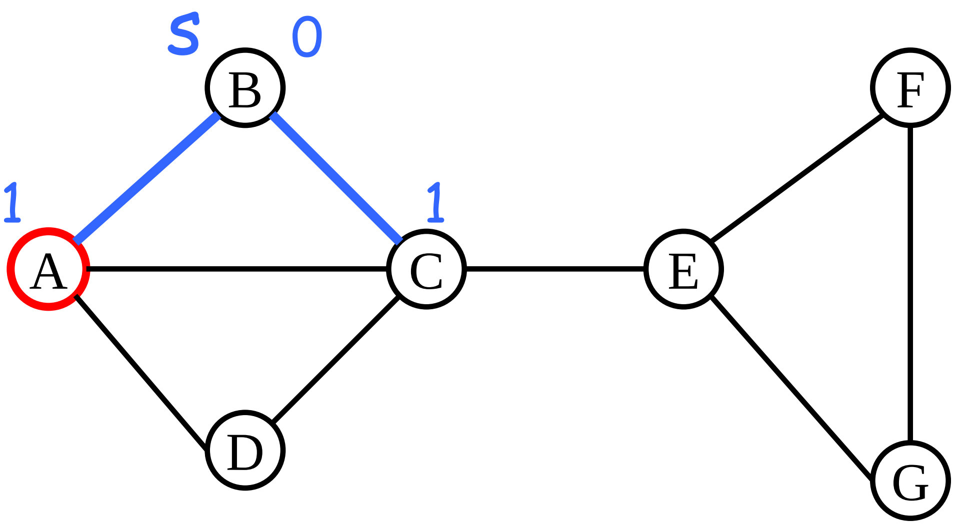


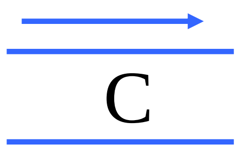
Un esempio



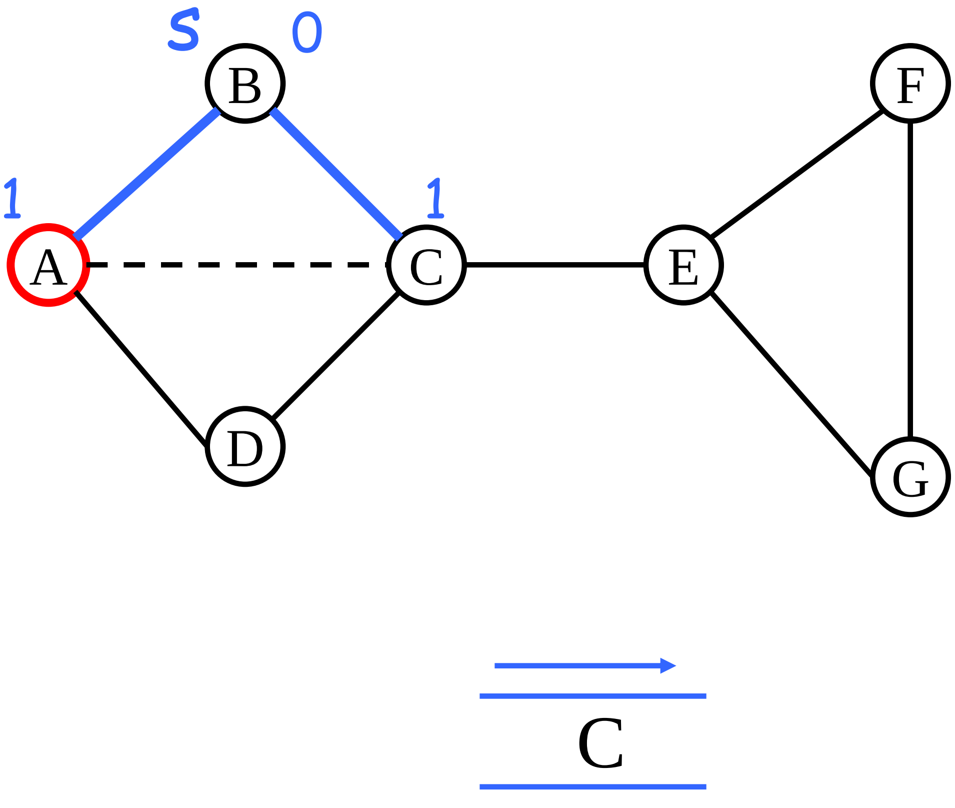


Un esempio

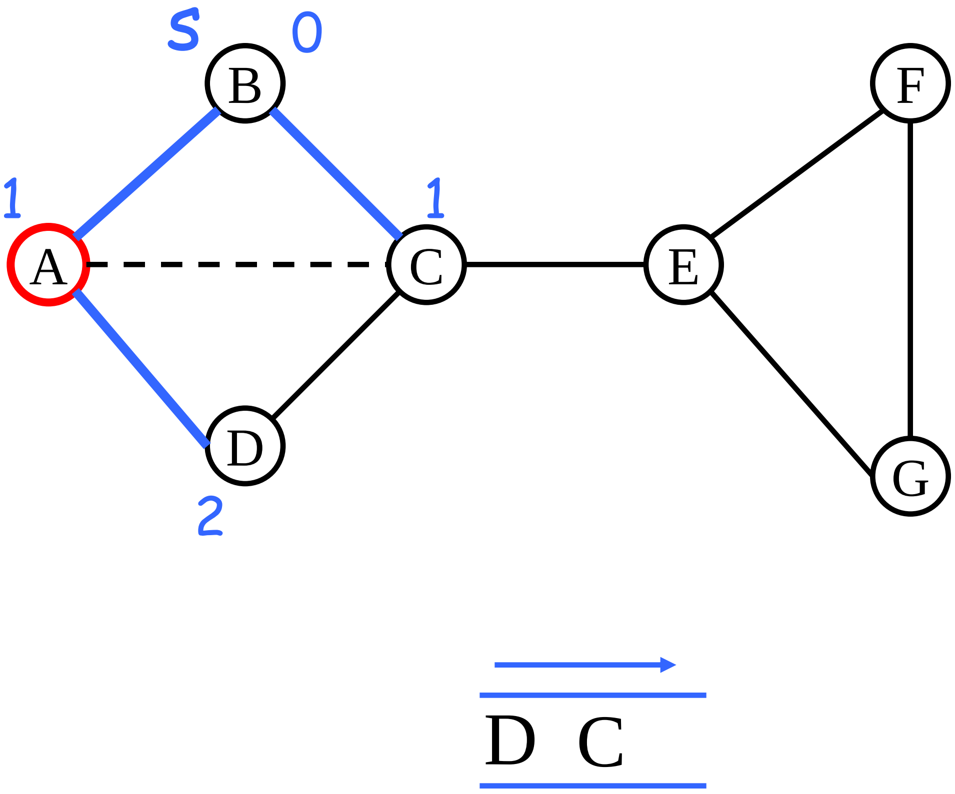




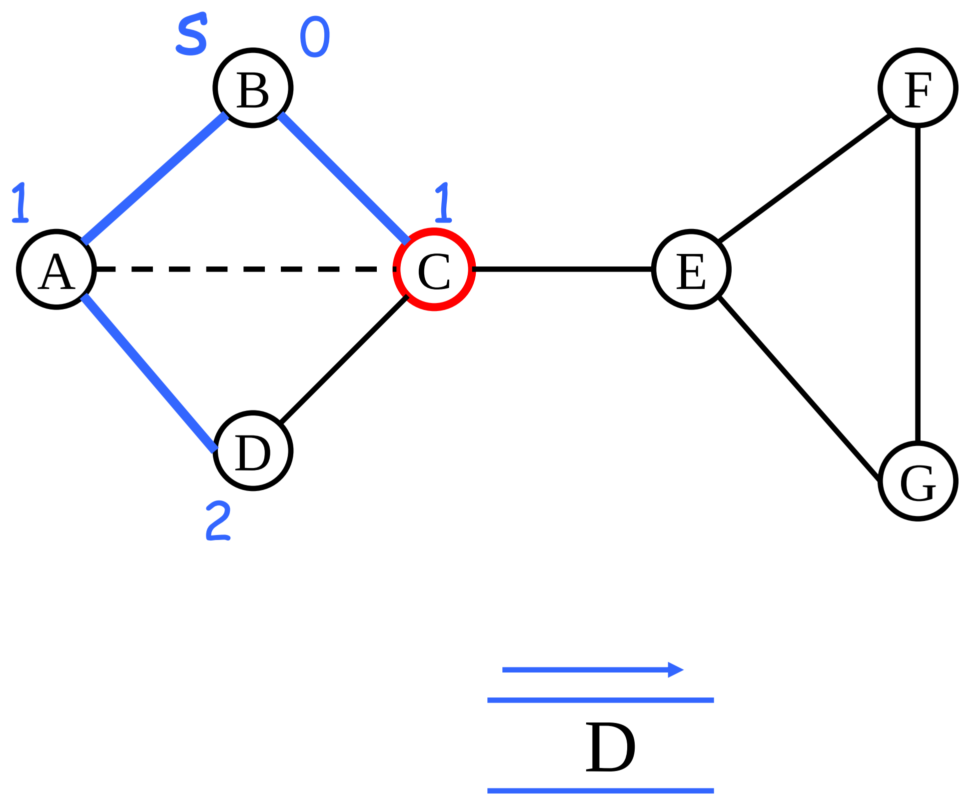
Un esempio



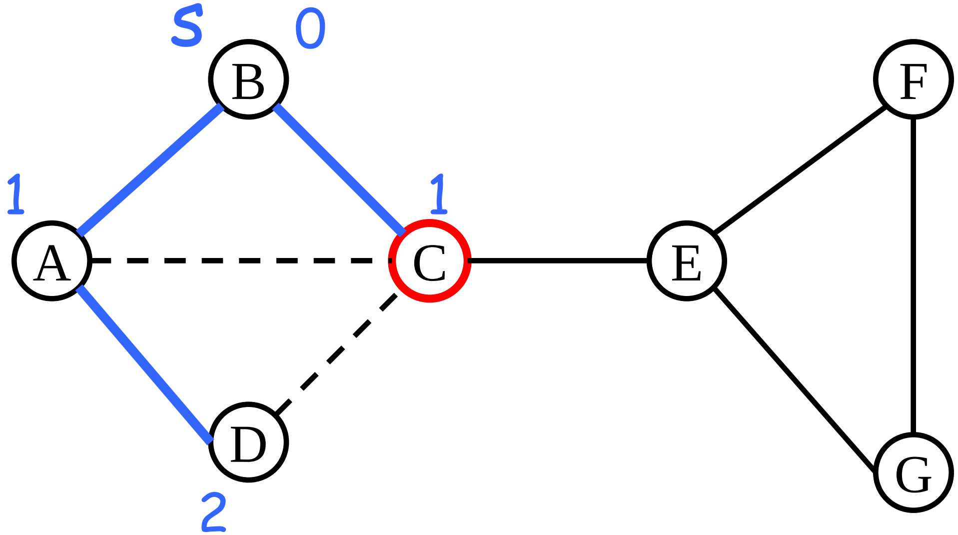
Un esempio

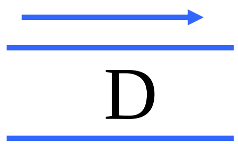


Un esempio

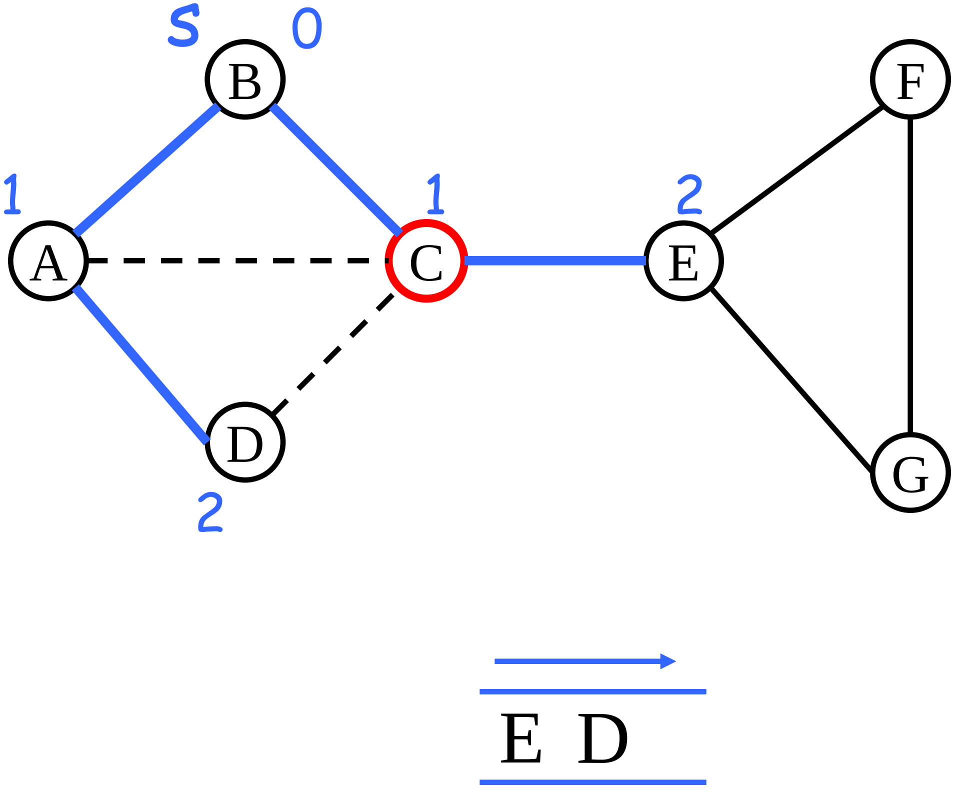


Un esempio

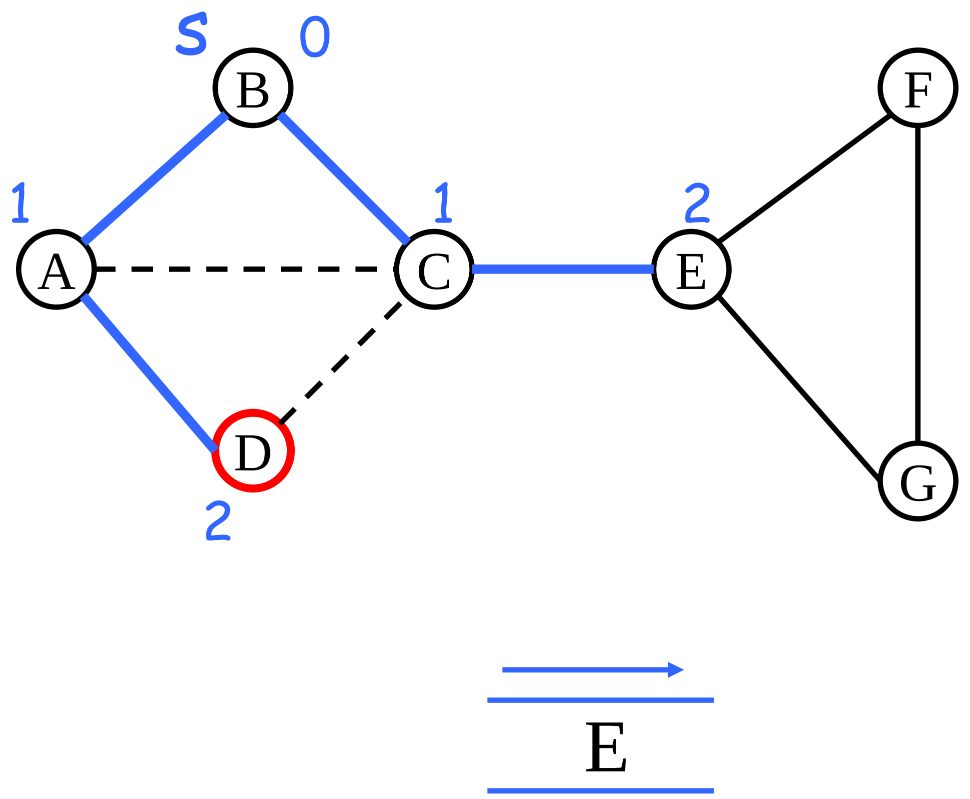




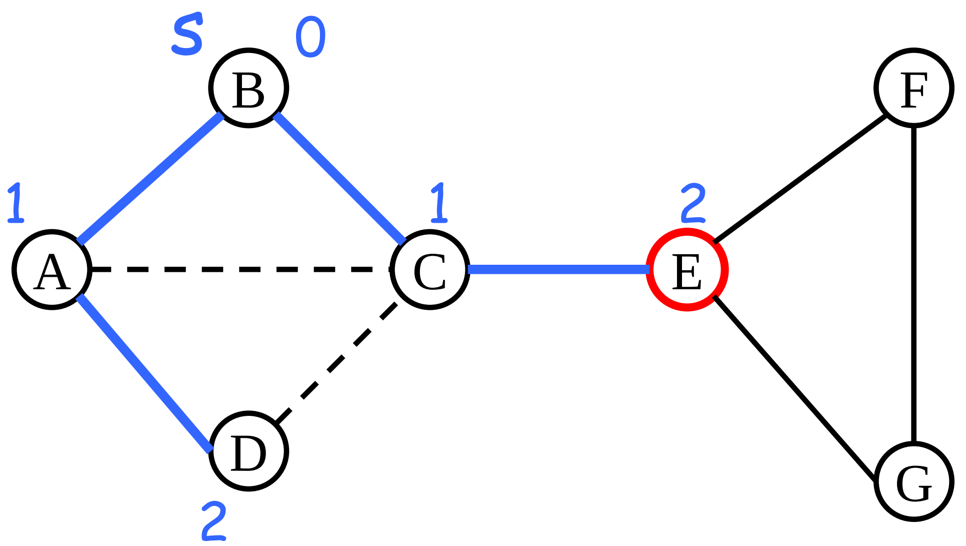
Un esempio



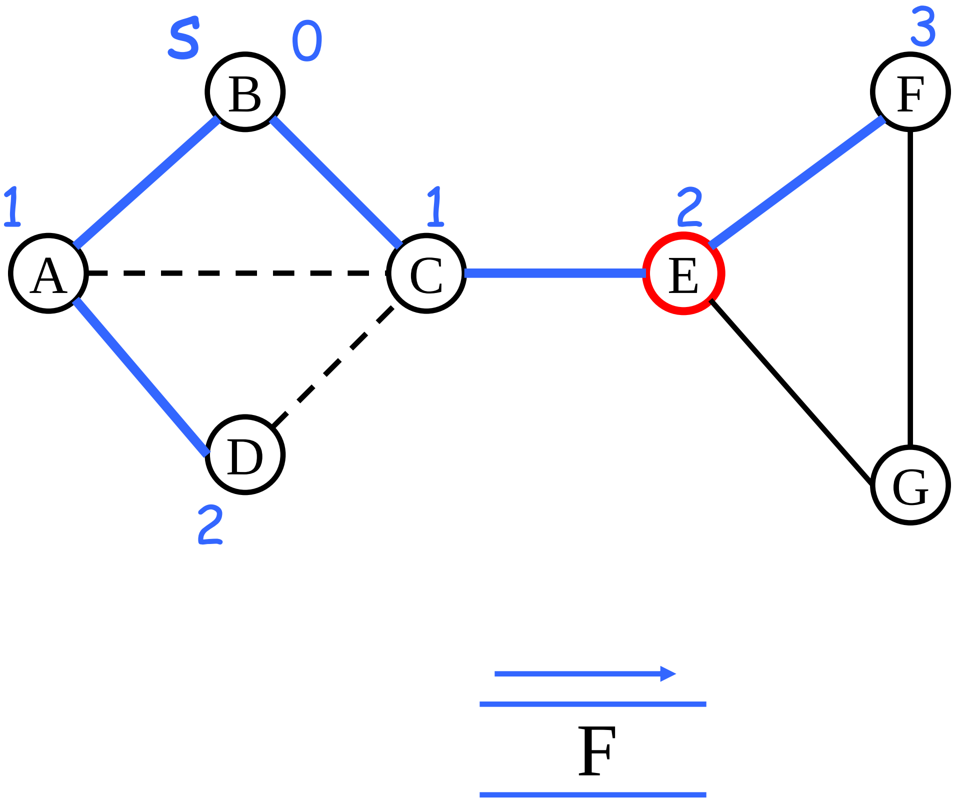
Un esempio



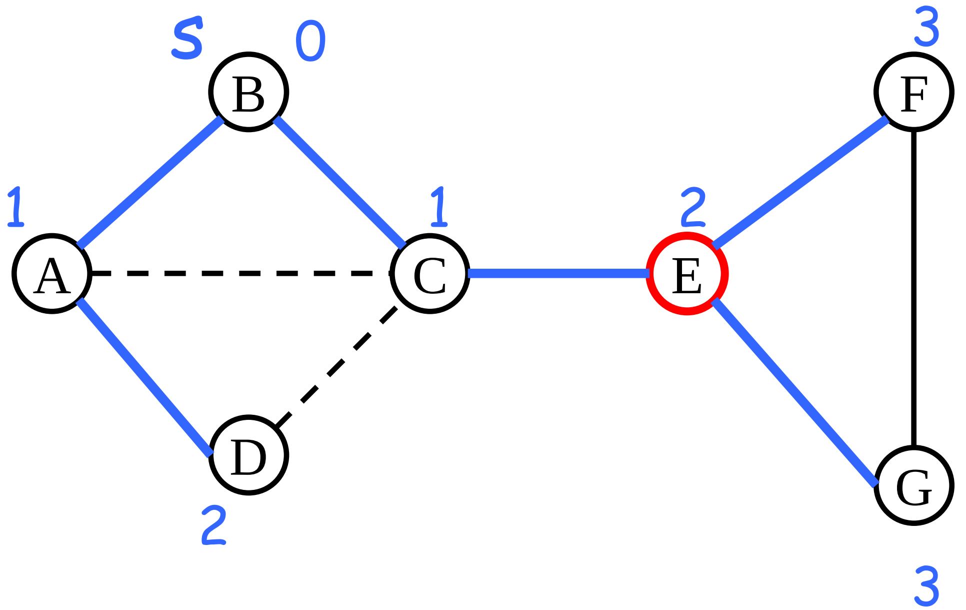
Un esempio

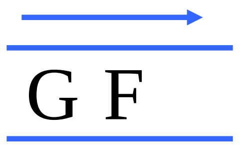


Un esempio

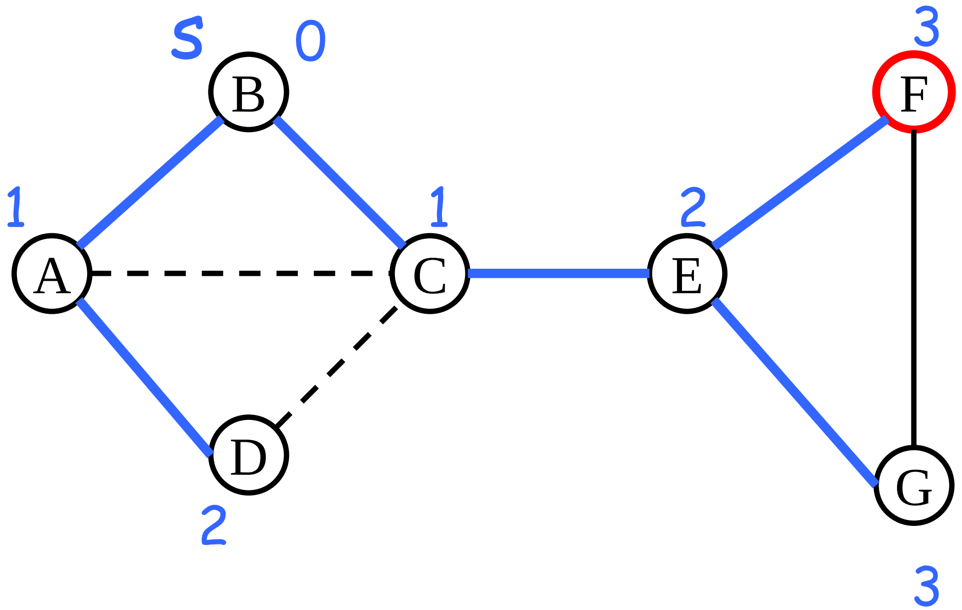


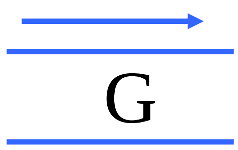
Un esempio



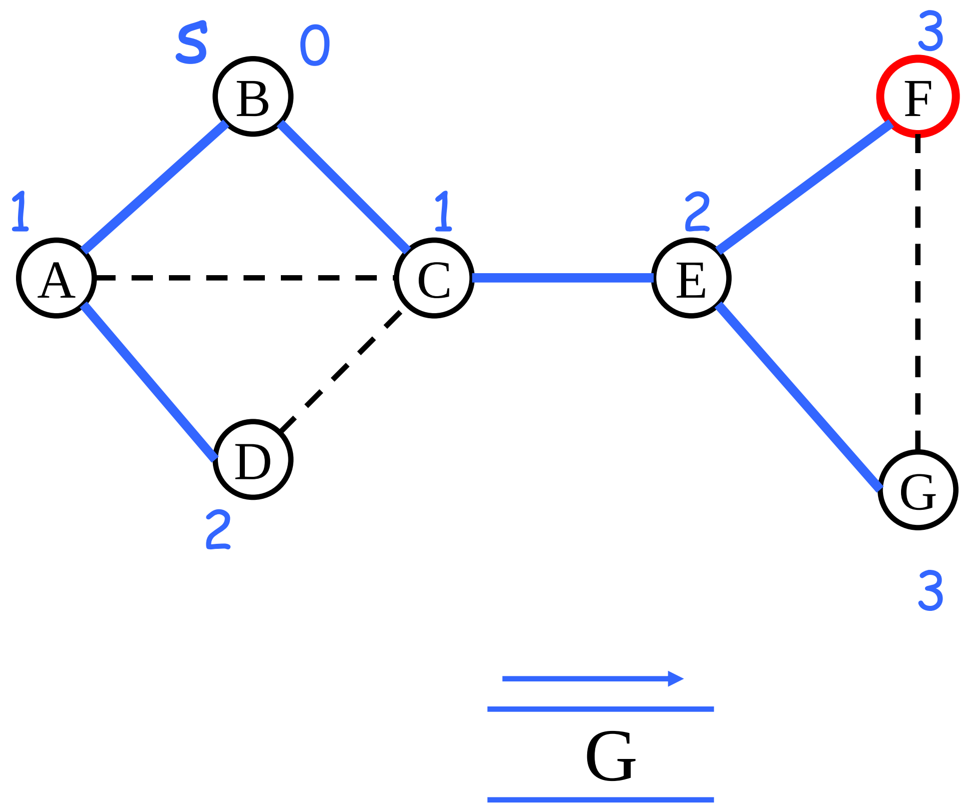


Un esempio

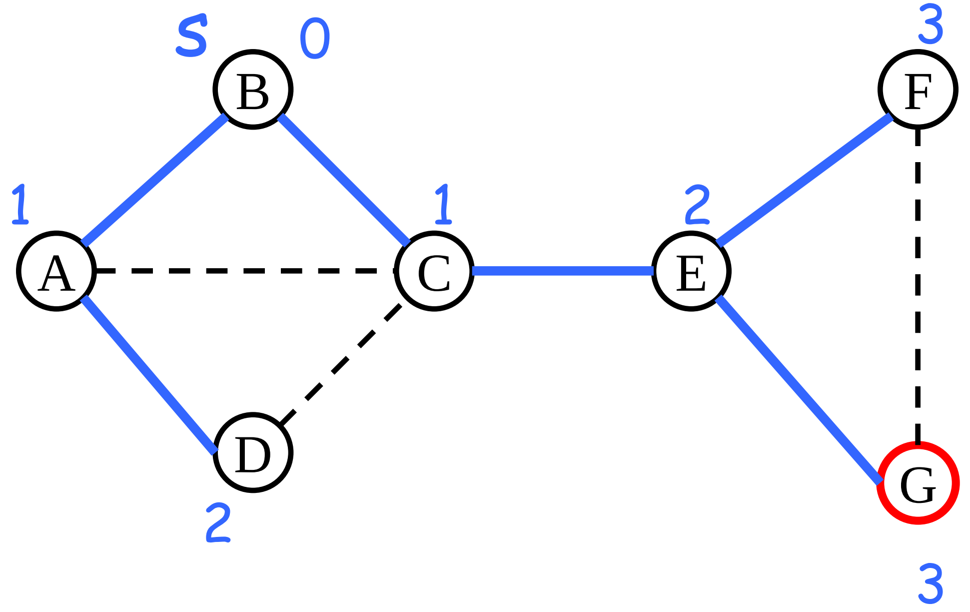




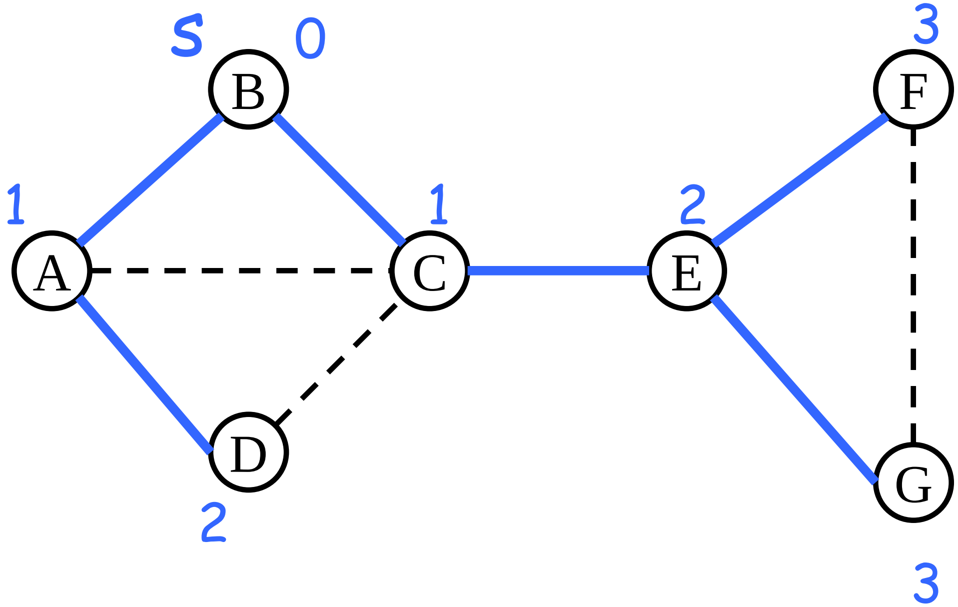
Un esempio



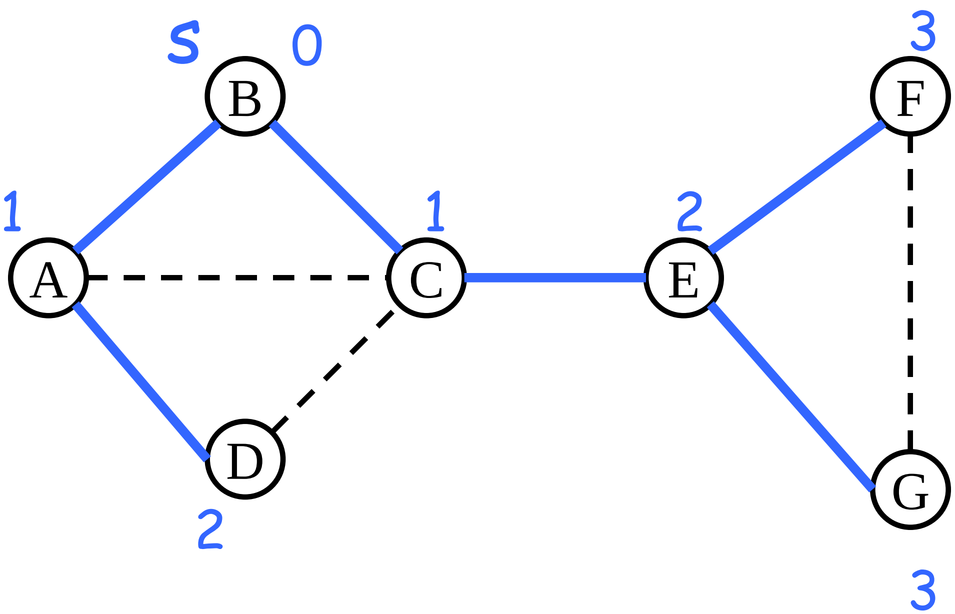
Un esempio



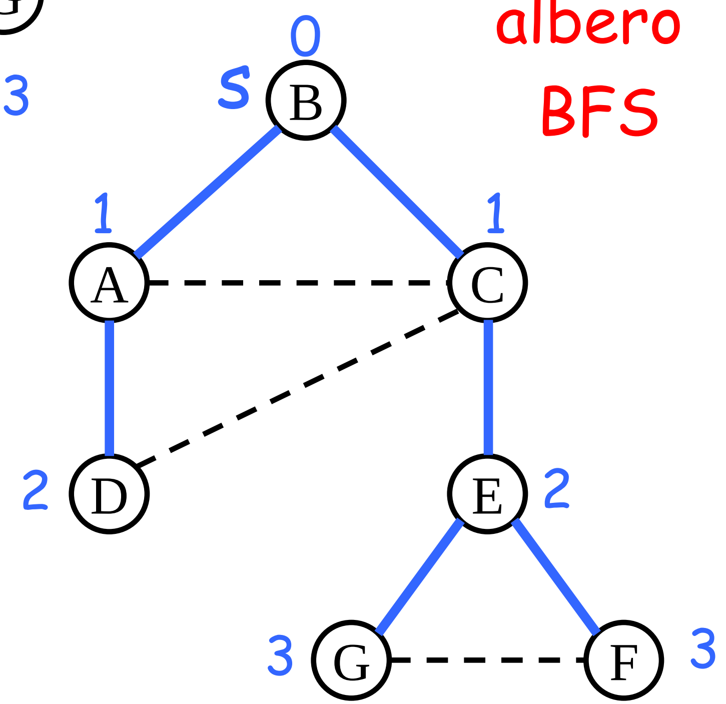
Un esempio



Un esempio

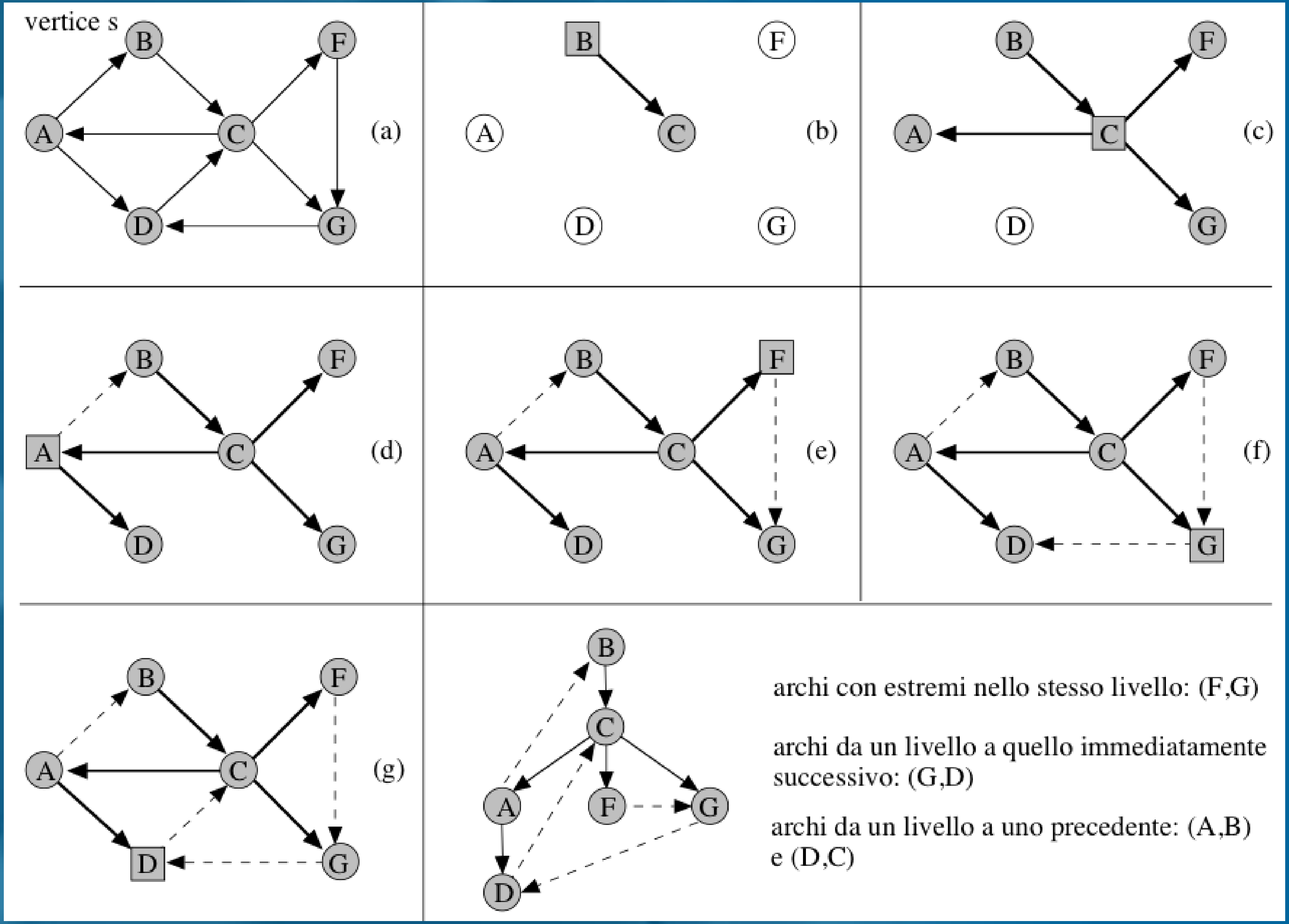


albero dei
cammini di *G*
radicato in *s*



albero
BFS

Esempio: grafo orientato



Costo della visita in ampiezza

grafo rappresentato con matrice di adiacenza

```
algoritmo visitaBFS(vertice s) → albero
    rendi tutti i vertici non marcati
    T ← albero formato da un solo nodo s
    Coda F
    marca il vertice s; dist(s)←0
    F.enqueue(s)
    while ( not F.isempty() ) do
        u ← F.dequeue()
        for each ( arco (u, v) in G ) do
            if ( v non è ancora marcato ) then
                F.enqueue(v)
                marca il vertice v; dist(v)← dist(u)+1
                rendi u padre di v in T
    return T
```

$O(n^2)$

$O(n)$

Costo della visita in ampiezza

grafo rappresentato con liste di adiacenza

algoritmo `visitaBFS`$(vertice\ s) \rightarrow albero$

rendi tutti i vertici non marcati
$T \leftarrow$ albero formato da un solo nodo s
`Coda F`
marca il vertice s; dist(s)$\leftarrow$0
`F.enqueue`(s)
while (**not** `F.isempty`()) **do**
    $u \leftarrow$ `F.dequeue`()
    for each (arco (u, v) in G) **do**
        if (v non è ancora marcato) **then**
            `F.enqueue`(v)
            marca il vertice v; dist(v)$\leftarrow$ dist(u)+1
            rendi u padre di v in T
return T

$O(m+n)$

$\Sigma_u\ O(\delta(u)) = O(m)$

$O(\delta(u))$

Costo della visita in ampiezza

Il tempo di esecuzione dipende dalla struttura dati usata per rappresentare il grafo (e dalla connettività o meno del grafo rispetto ad s):

- Liste di adiacenza: $O(m+n)$
- Matrice di adiacenza: $O(n^2)$

Osservazioni:

1. Si noti che se il grafo è connesso allora $m \geq n-1$ e quindi $O(m+n)=O(m)$
2. Ricordando che $m \leq n(n-1)/2$, si ha $O(m+n)=O(n^2)$

$\Rightarrow$ per $m=o(n^2)$ la rappresentazione mediante liste di adiacenza è temporalmente più efficiente!

Teorema

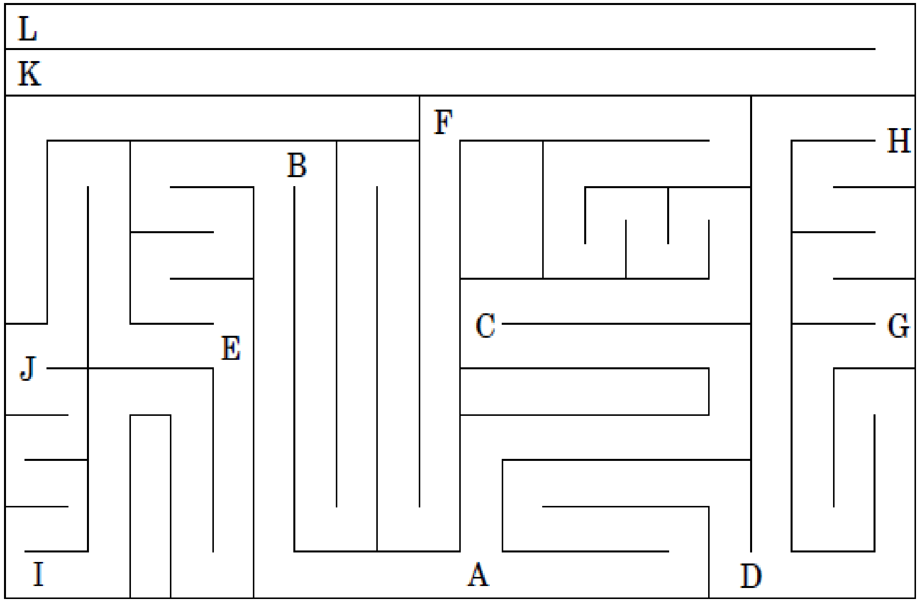
Per ogni nodo v, il livello di v nell'albero BFS è pari alla distanza di v dalla sorgente s (sia per grafi orientati che non orientati)

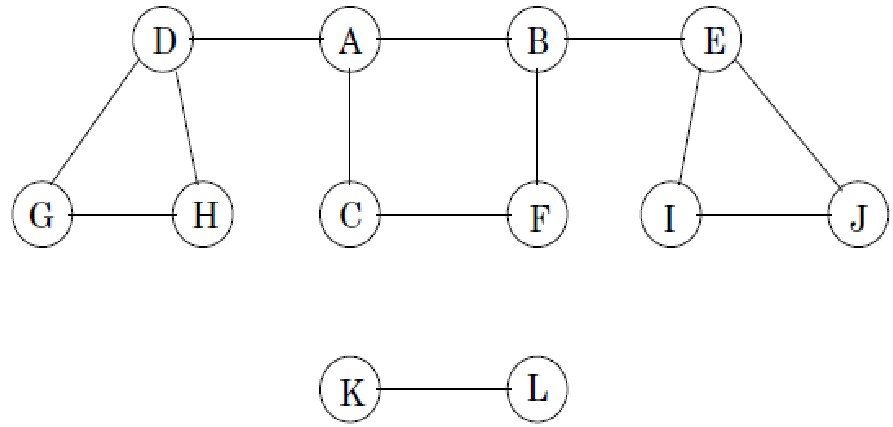
dimostrazione informale

- all'inizio inserisco s in F (che è a distanza 0 da se stesso) e gli assegno livello 0; chiaramente s è l'unico nodo a distanza 0.
- estraggo s e guardo tutti suoi vicini (archi uscenti); questi sono tutti i nodi a distanza 1 da s; li inserisco in F e assegno loro livello 1. Ora in F ho tutti i nodi a distanza 1.
- estraggo uno a uno tutti i nodi di livello/distanza 1 e per ognuno guardo tutti suoi vicini (archi uscenti); i vicini non marcati sono a distanza 2 da s; li inserisco in F e assegno loro livello 2; quando ho estratto e visitato tutti i nodi di livello 1, in F ho tutti i nodi a distanza 2 da s.
- estraggo uno a uno tutti i nodi di livello/distanza 2 e per ognuno guardo tutti suoi vicini (archi uscenti); i vicini non marcati sono a distanza 3 da s…

Visita in profondità

un'analogia: esplorare un labirinto





Cosa mi serve?

gesso: per segnare le strade prese

corda: per tornare indietro se necessario

variabile booleana: dice se un nodo è stato già visitato

pila: push vuol dire srotolare
pop vuol dire arrotolare

Visita in profondità

procedura `visitaDFSRicorsiva`$(\mathit{vertice}\ v, \mathit{albero}\ T)$

   marca e visita il vertice v

   for each (arco (v, w)) **do**

      if (w non è marcato) **then**

         aggiungi l'arco (v, w) all'albero T

         `visitaDFSRicorsiva`(w, T)

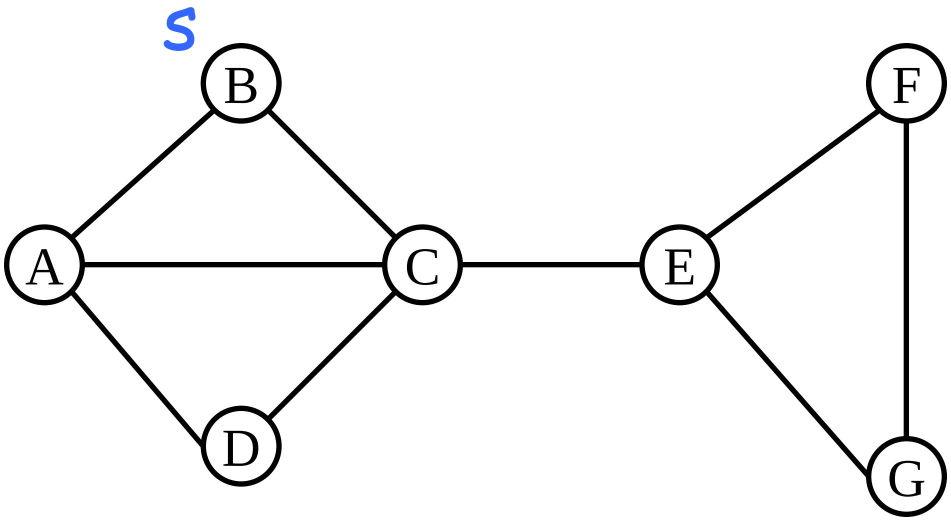
algoritmo `visitaDFS`$(\mathit{vertice}\ s) \rightarrow \mathit{albero}$

   $T \leftarrow$ albero vuoto

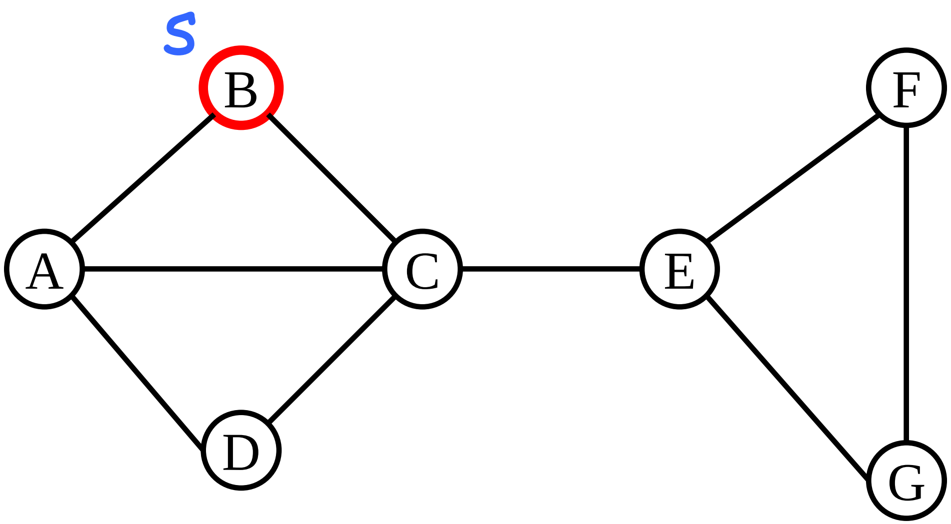
   `visitaDFSRicorsiva`(s, T)

   return T

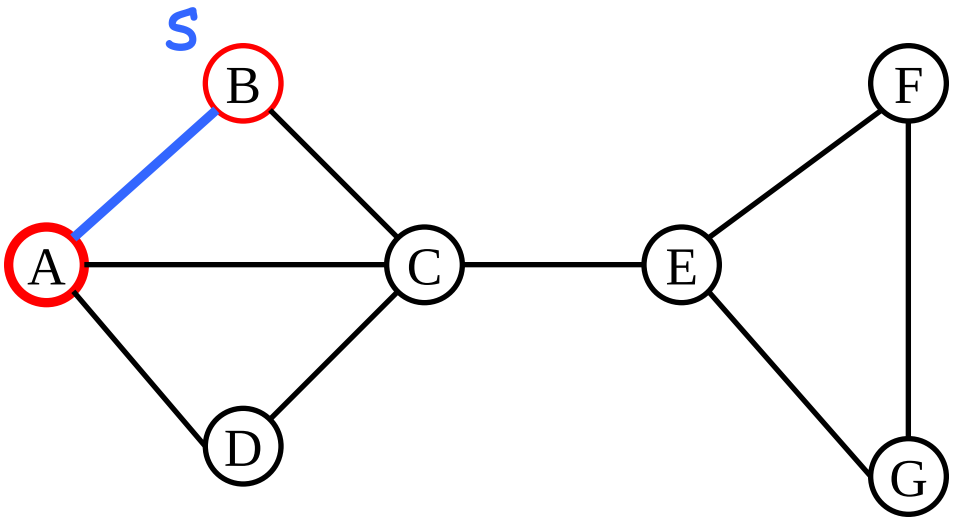
Un esempio: visita DFS



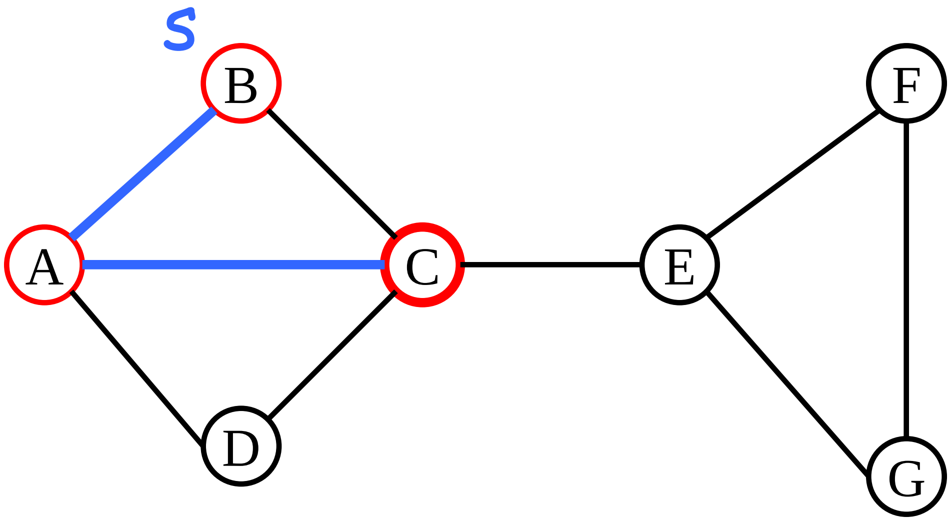
Un esempio: visita DFS



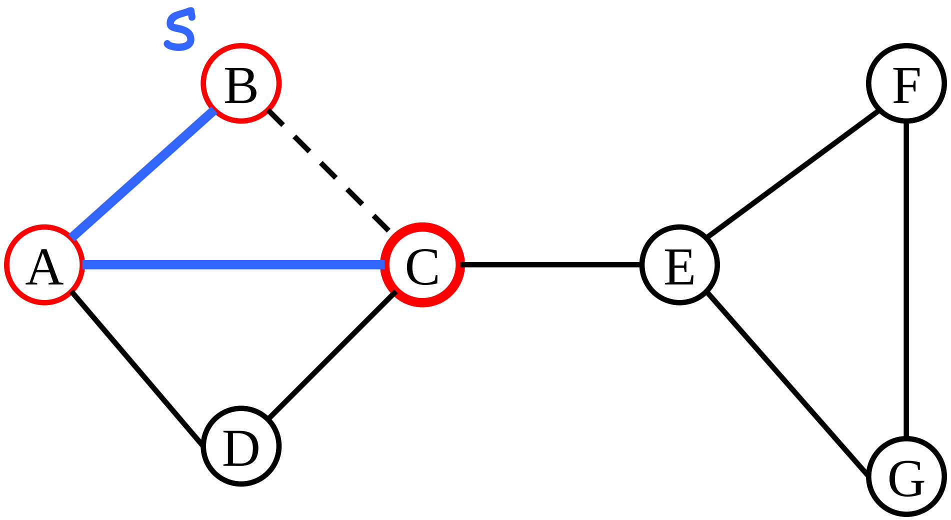
Un esempio: visita DFS



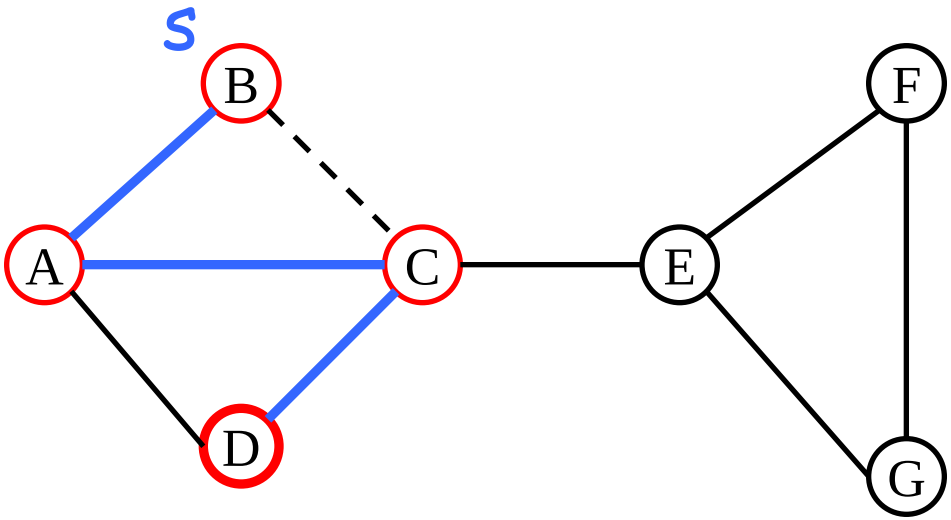
Un esempio: visita DFS



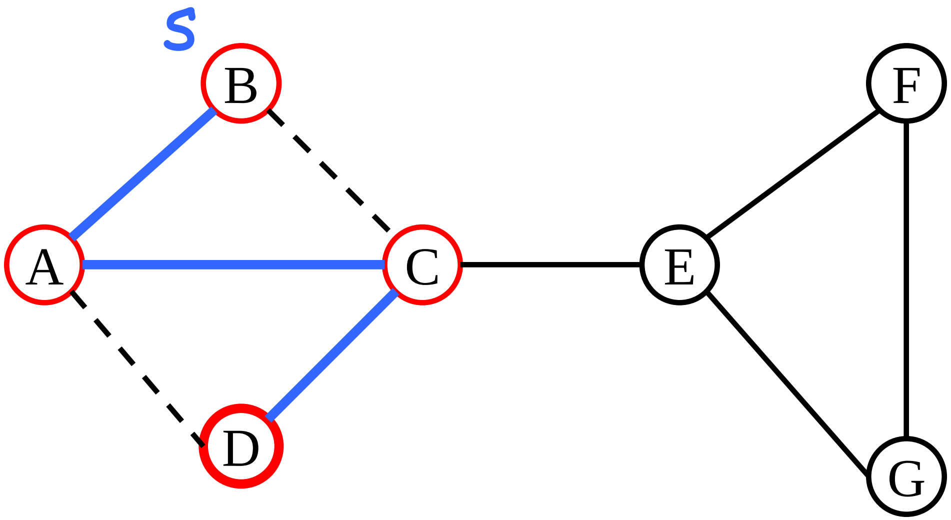
Un esempio: visita DFS



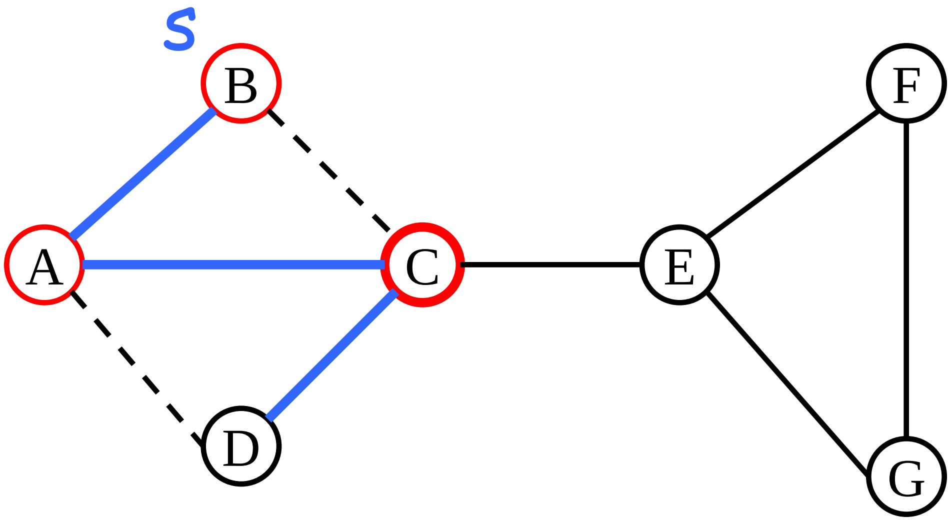
Un esempio: visita DFS



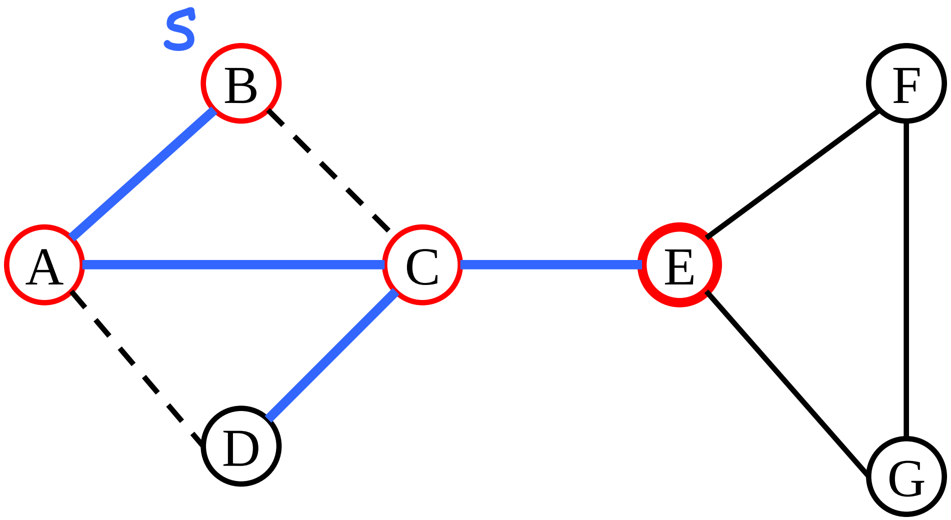
Un esempio: visita DFS



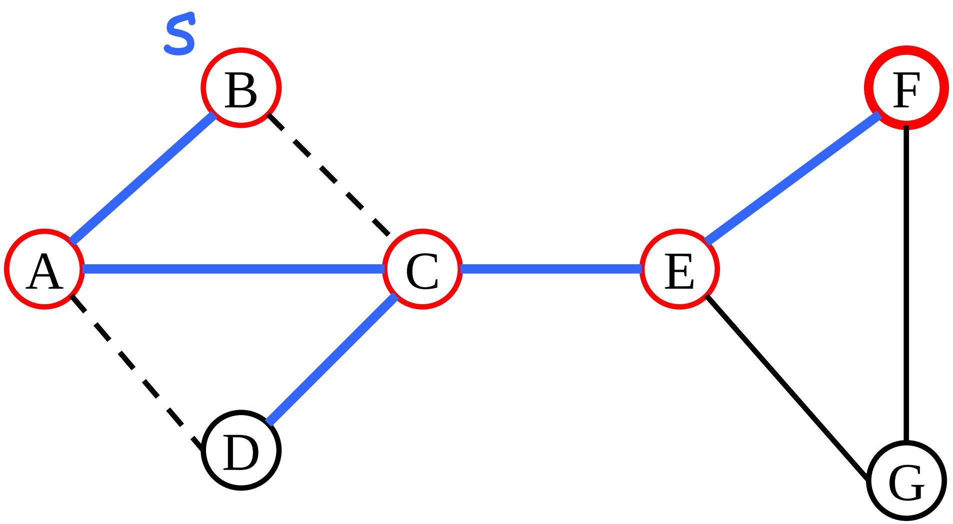
Un esempio: visita DFS



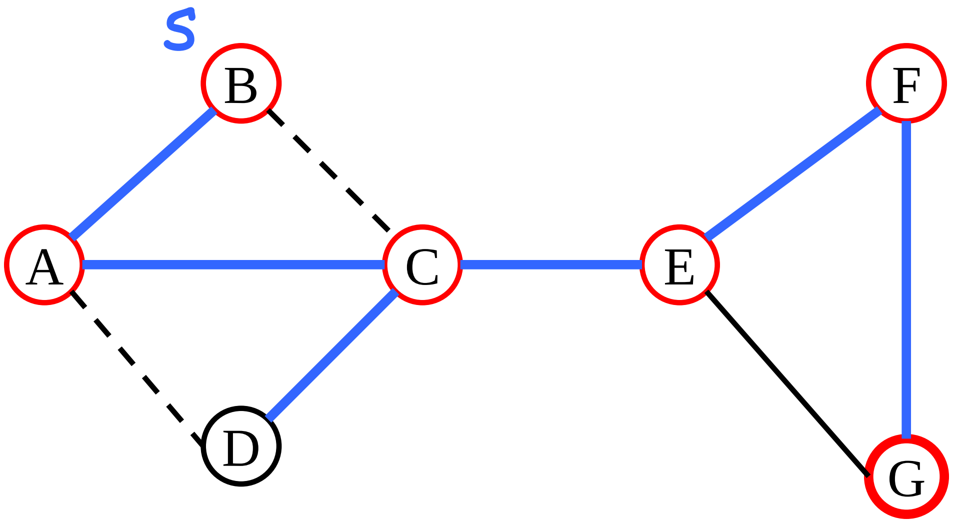
Un esempio: visita DFS



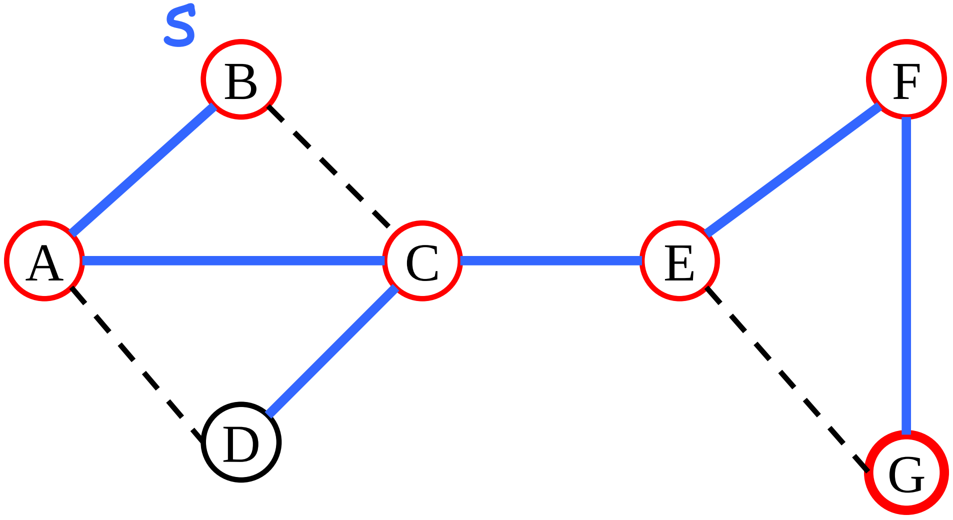
Un esempio: visita DFS



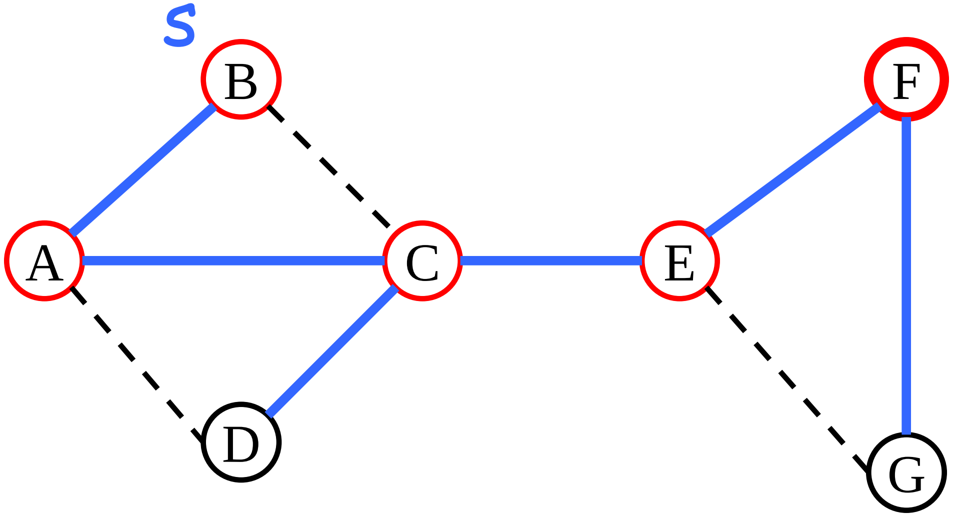
Un esempio: visita DFS



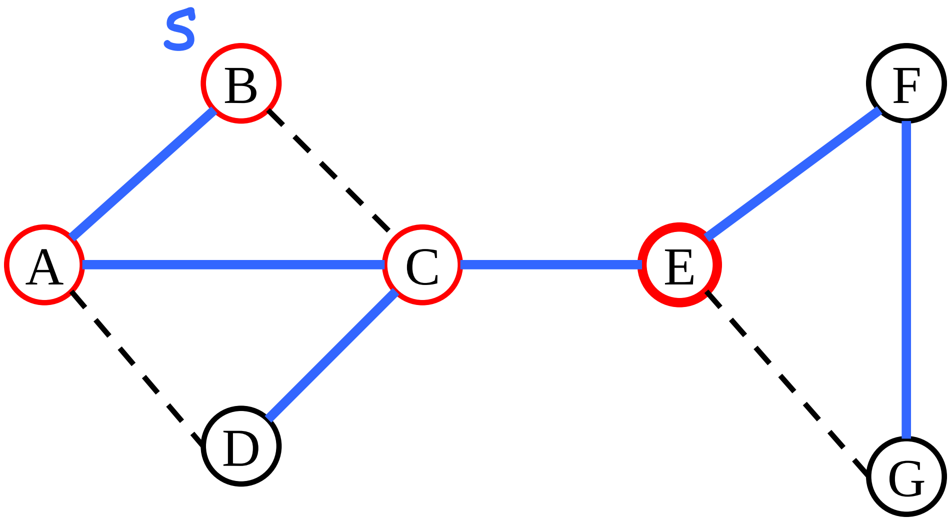
Un esempio: visita DFS



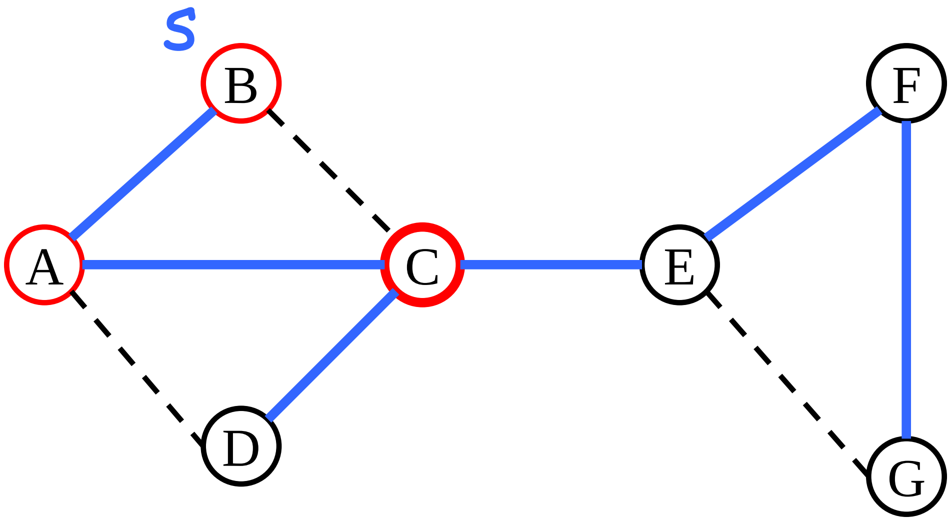
Un esempio: visita DFS



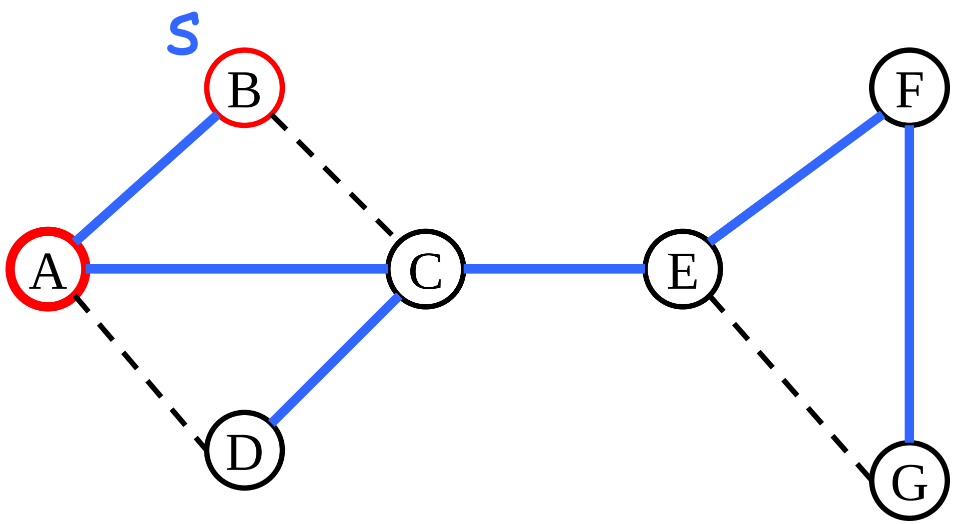
Un esempio: visita DFS



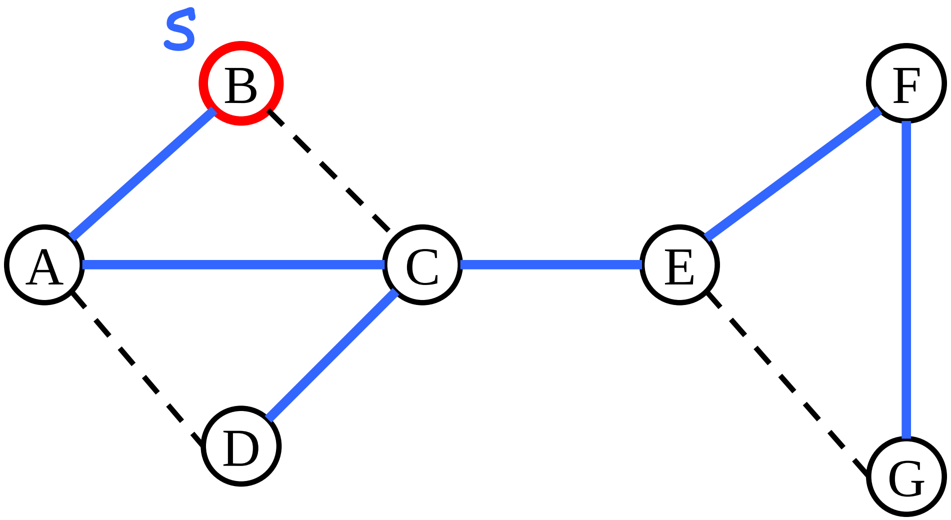
Un esempio: visita DFS



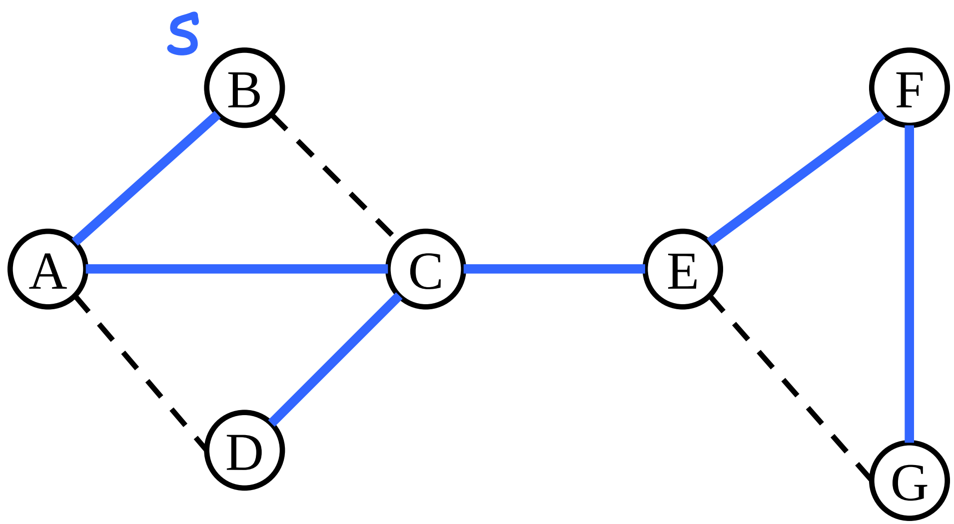
Un esempio: visita DFS

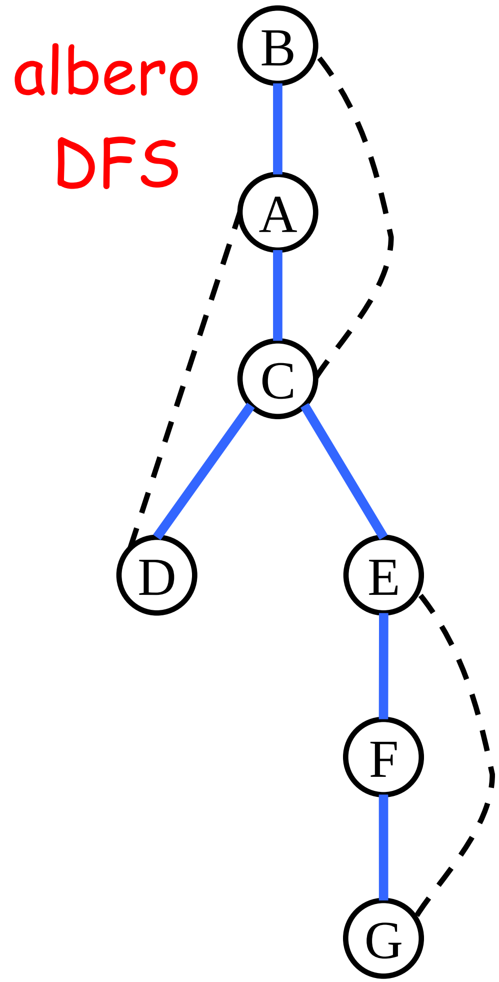


Un esempio: visita DFS

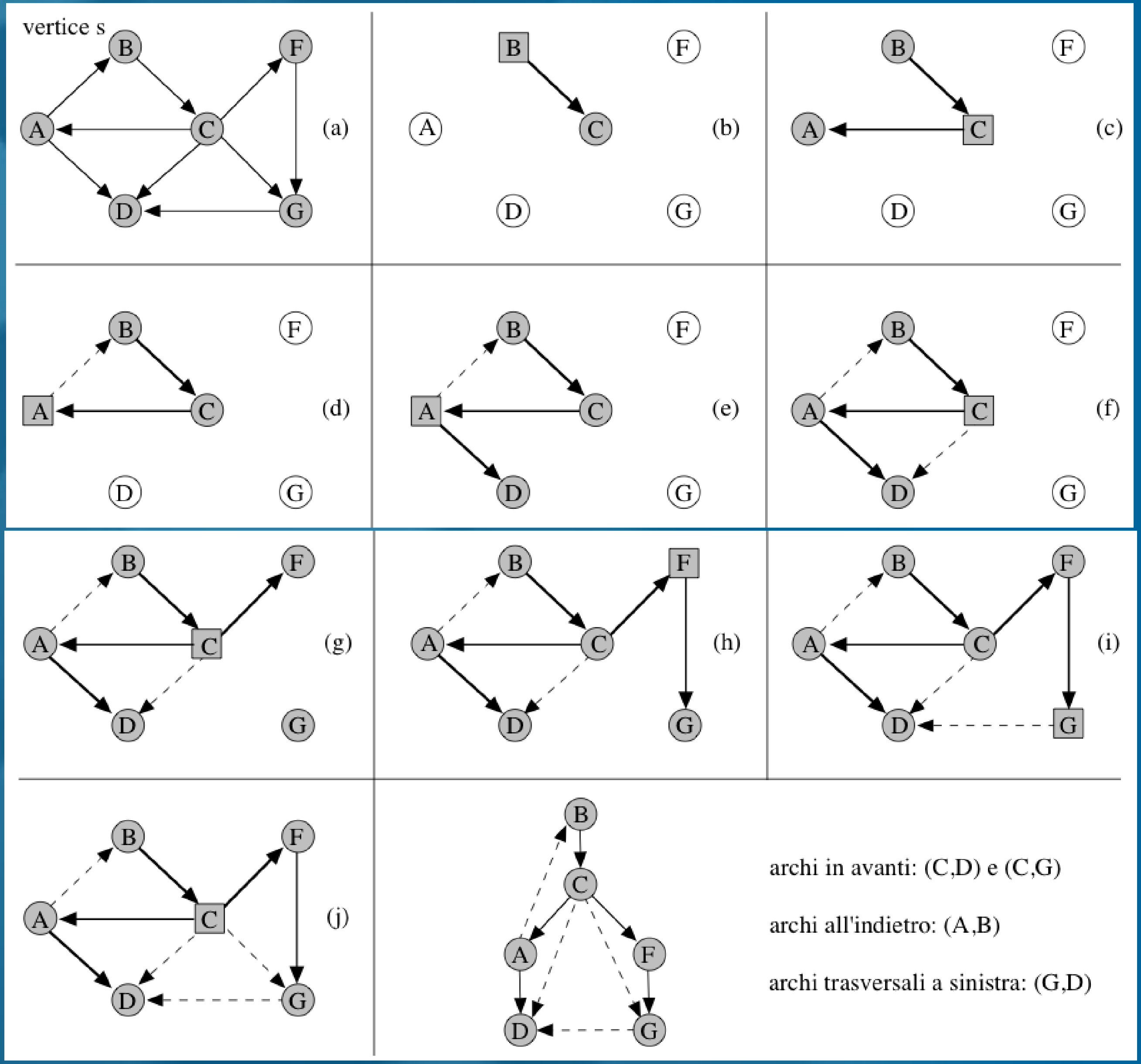


Un esempio: visita DFS

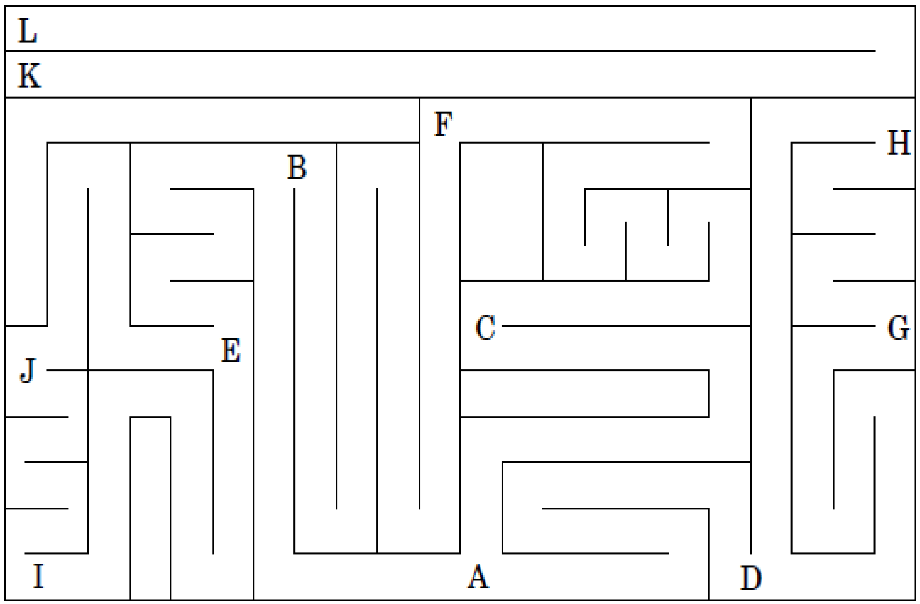


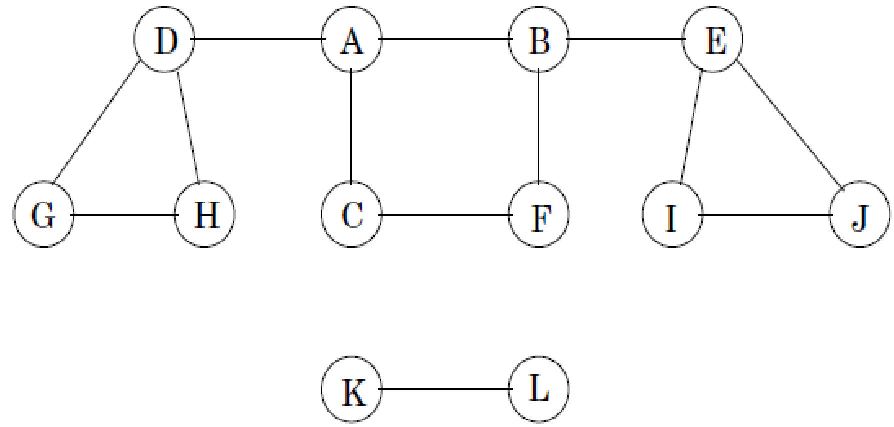


Esempio: grafo orientato

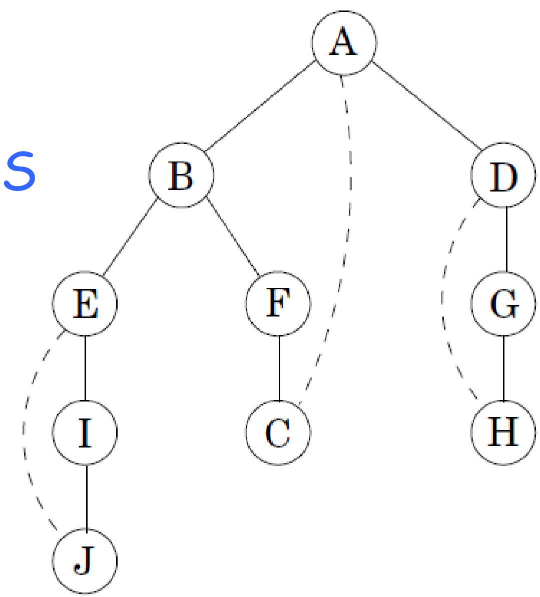


…tornando al labirinto





albero DFS



Costo della visita in profondità

Il tempo di esecuzione dipende dalla struttura dati usata per rappresentare il grafo (e dalla connettività o meno del grafo rispetto ad s):

- Liste di adiacenza: $O(m+n)$
- Matrice di adiacenza: $O(n^2)$

Proprietà dell’albero DFS radicato in s

- Se il grafo è non orientato, per ogni arco (u,v) si ha:
  - (u,v) è un arco dell’albero DFS, oppure
  - i nodi u e v sono l’uno discendente/antenato dell’altro
- Se il grafo è orientato, per ogni arco (u,v) si ha:
  - (u,v) è un arco dell’albero DFS, oppure
  - i nodi u e v sono l’uno discendente/antenato dell’altro, oppure
  - (u,v) è un arco trasversale a sinistra, ovvero il vertice v è in un sottoalbero visitato precedentemente ad u