Usi (meno scontati) della visita DFS

lezione basata sul capito 3 del libro
Algorithms, di Dasgupta, Papadimitriou, Vazirani,
McGraw-Hill

Informazioni utili: tenere il tempo

procedura `visitaDFSRicorsiva`$(\textit{vertice } v, \textit{albero } T)$

   marca e visita il vertice v

   pre(v)=clock
   clock=clock+1

   for each (arco (v, w)) **do**

      if (w non è marcato) **then**

         aggiungi l'arco (v, w) all'albero T

         `visitaDFSRicorsiva`(w, T)

   post(v)=clock; clock=clock+1

algoritmo `visitaDFS`$(\textit{vertice } s) \rightarrow \textit{albero}$

   clock=1

   $T \leftarrow$ albero vuoto

   `visitaDFSRicorsiva`(s, T)

   return T

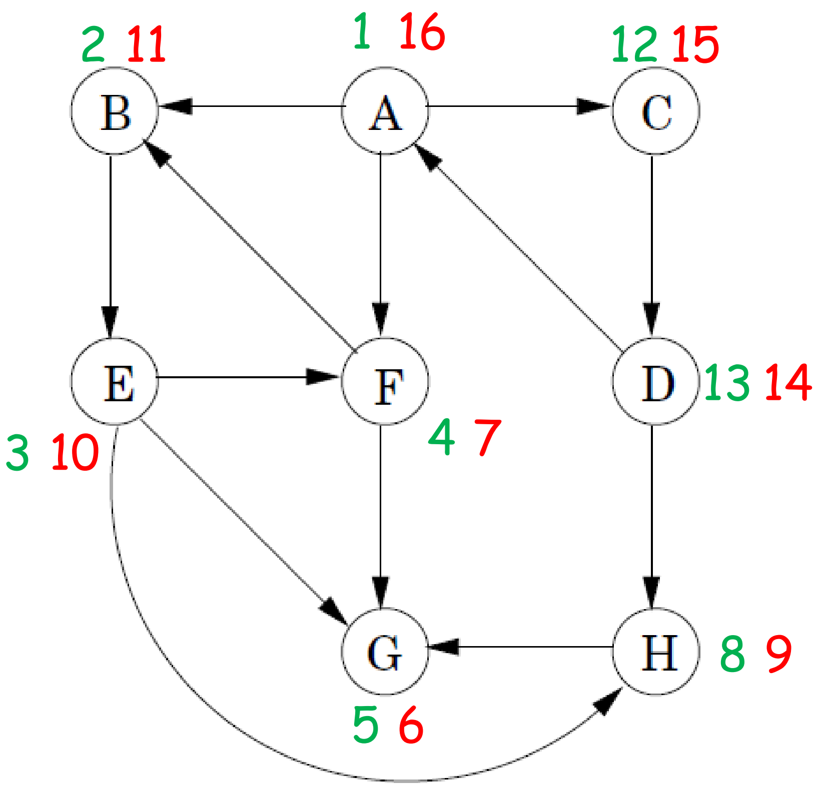
pre(v): tempo in cui viene "scoperto" v
post(v): tempo in cui si "abbandona" v

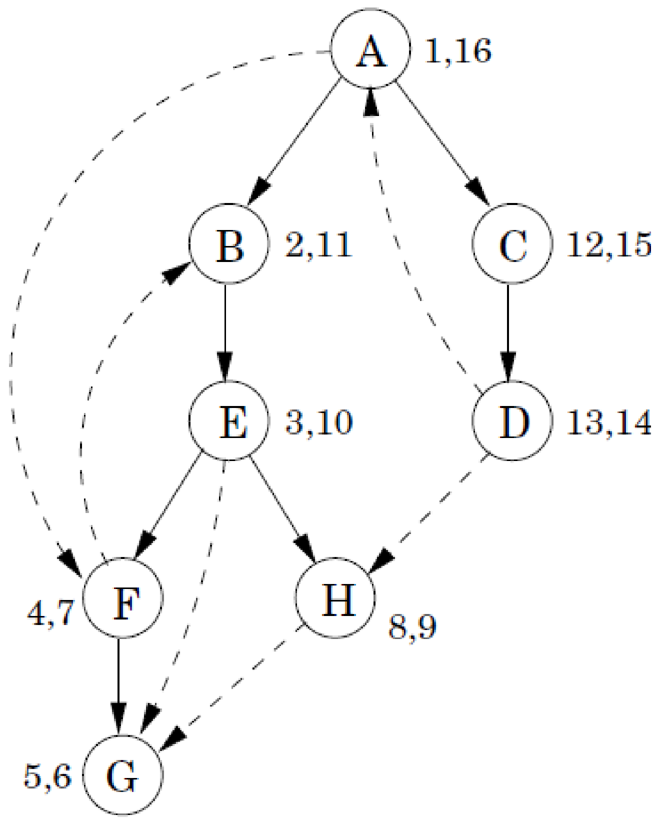
quando non tutti i nodi sono raggiungibili dal punto di partenza

VisitaDFS (grafo *G*)

for each nodo *v* **do** imposta *v* come *non marcato*
clock=1
F ← foresta vuota
for each nodo *v* **do**
    if (*v* è *non marcato*) **then**
        T ← albero vuoto
        visitaDSFRicorsiva(*v*,*T*)
        aggiungi *T* ad *F*
return *F*

Un esempio

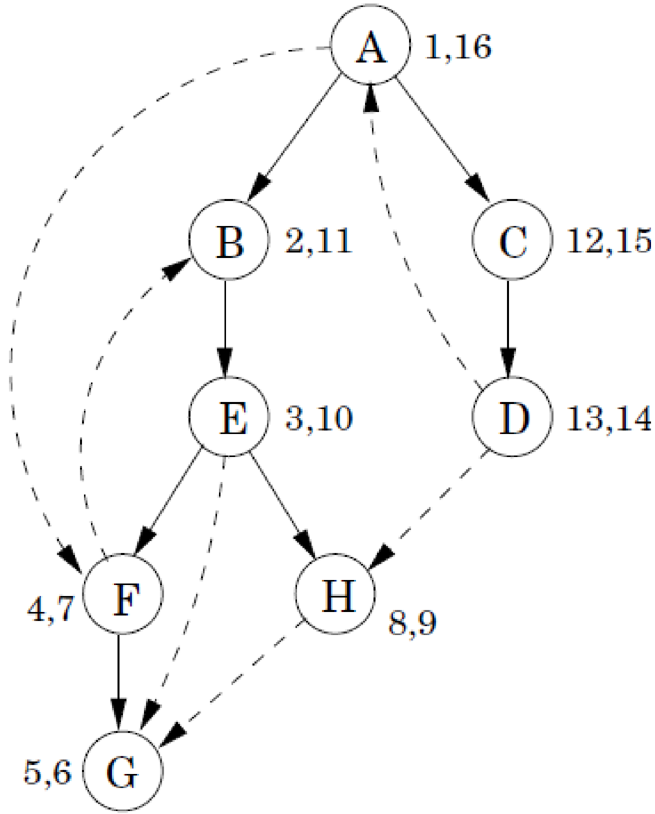




pre(v) post(v)

proprietà

per ogni coppia di nodi u e v, gli intervalli
[pre(u),post(u)] e [pre(v),post(v)]
o sono disgiunti o l'uno è contenuto nell'altro

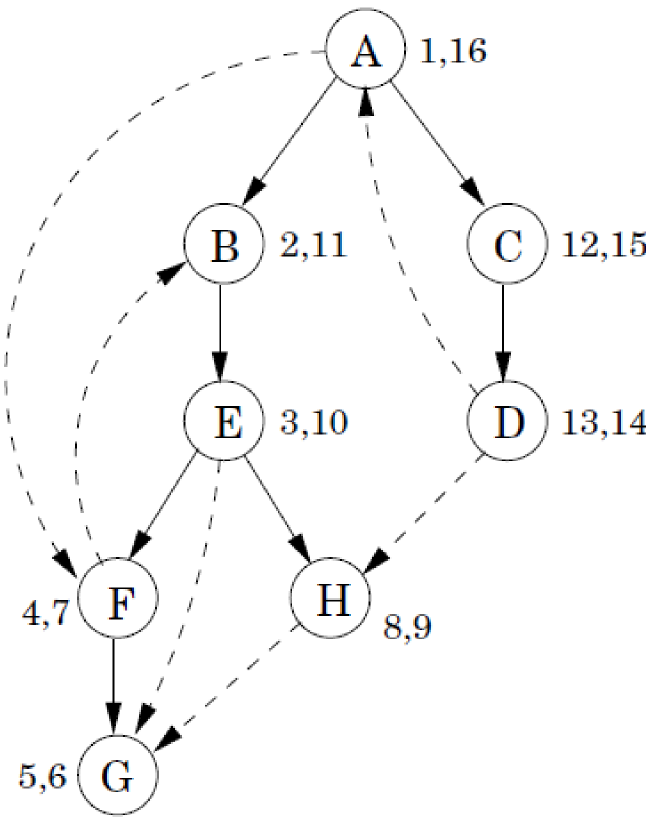


u è antenato di v nell'albero DFS, se
pre(u) < pre(v) < post(v) < post(u)
condizione che rappresentiamo così:

possiamo usare i tempi di visita per riconoscere il tipo di un generico arco (u,v) del grafo?

…riconoscere i tipi di arco

pre/post per l'arco (u,v)	tipo di arco
$[_u \quad [_v \quad]_v \quad]_u$	in avanti
$[_v \quad [_u \quad]_u \quad]_v$	all'indietro
$[_v \quad]_v \quad [_u \quad]_u$	trasversali



cicli, DAG e ordinamenti topologici

riconoscere la presenza di un ciclo in un grafo diretto

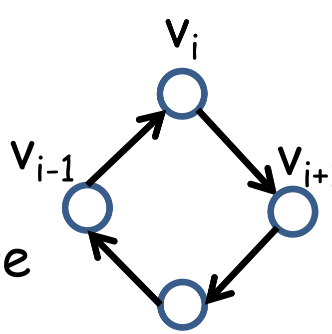
Algoritmo:
fai una visita DFS e controlla
se c'è un arco all'indietro

Proprietà

> Un grafo diretto G ha un ciclo se e solo se la visita DFS rivela un arco all'indietro.

($\Leftarrow$): se c'è arco all'indietro, chiaramente G ha un ciclo

($\Rightarrow$): se c'è ciclo $\langle v_0, v_1, \dots, v_k = v_0 \rangle$



sia v_i è il primo nodo scoperto nella visita

poiché v_{i-1} è raggiungibile da v_i, visito v_{i-1} prima di terminare la visita di v_i

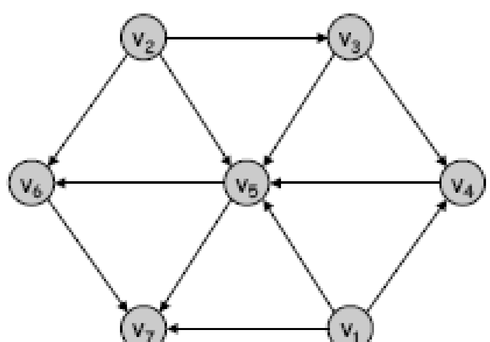
allora (v_{i-1}, v_i) è un arco all'indietro

Definizione

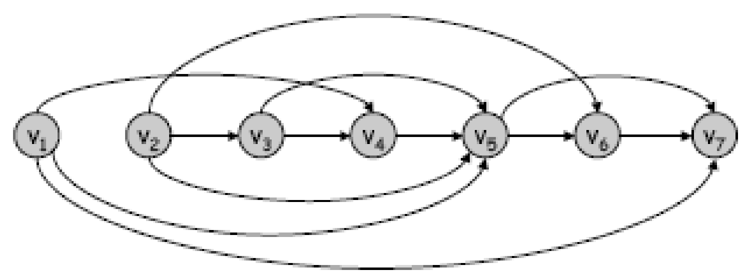
Un grafo diretto aciclico (DAG) è un grafo diretto G che non contiene cicli (diretti).

Definizione

Un ordinamento topologico di un grafo diretto $G=(V,E)$ è una funzione biettiva $\sigma: V \rightarrow \{1,2,..,n\}$ tale che per ogni arco $(u,v) \in E$, $\sigma(u)<\sigma(v)$



a DAG

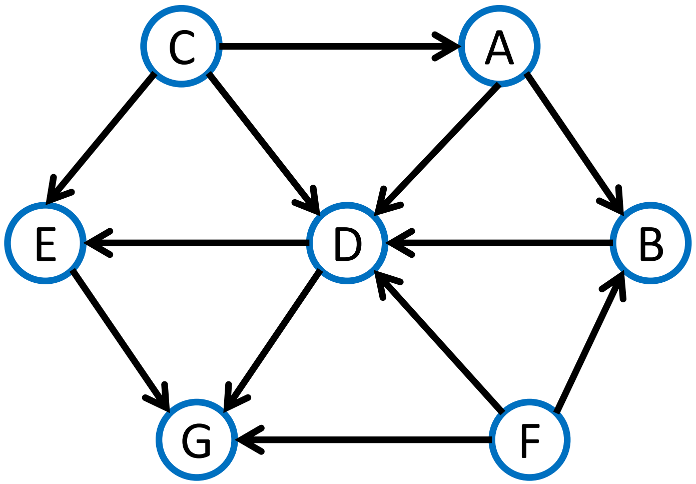


a topological ordering

pozzo: solo archi entranti

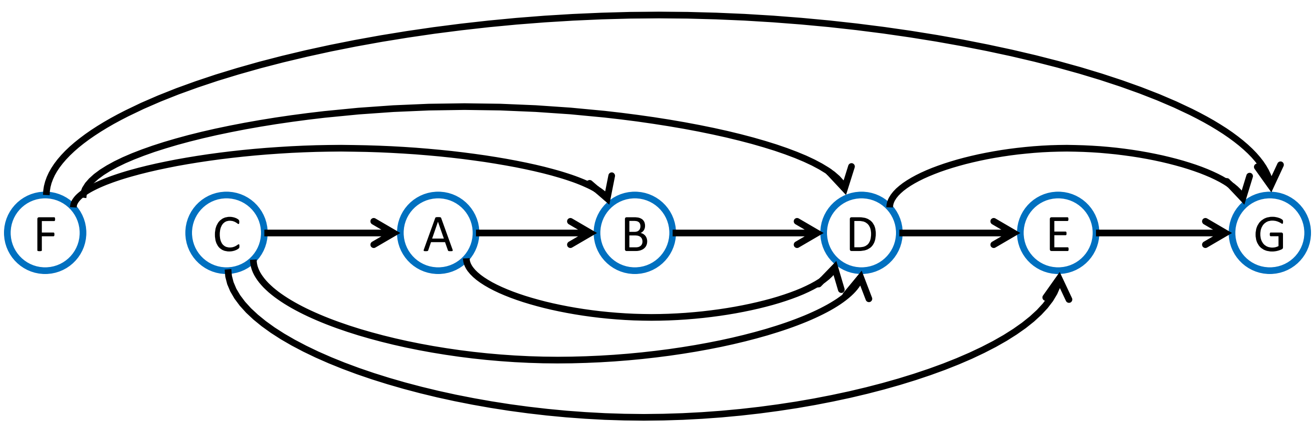
sorgente: solo archi uscenti

reti “delle dipendenze”



nodi: compiti da svolgere
arco (u,v): u deve essere
eseguito prima di v

problema:
trovare un ordine in cui eseguire i compiti in modo da rispettare le dipendenze



quali grafi (diretti) ammettono un ordinamento topologico?

Teorema

Un grafo diretto G ammette un ordinamento topologico se e solo se G è un DAG

dim

$(\Rightarrow)$

per assurdo: sia σ un ordinamento topologico di G

e sia $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k = v_0 \rangle$ un ciclo

allora $\sigma(v_0) < \sigma(v_1) < \ldots < \sigma(v_{k-1}) < \sigma(v_k) = \sigma(v_0)$

$(\Leftarrow)$: …adesso diamo un algoritmo costruttivo.

calcolare ordinamento topologico

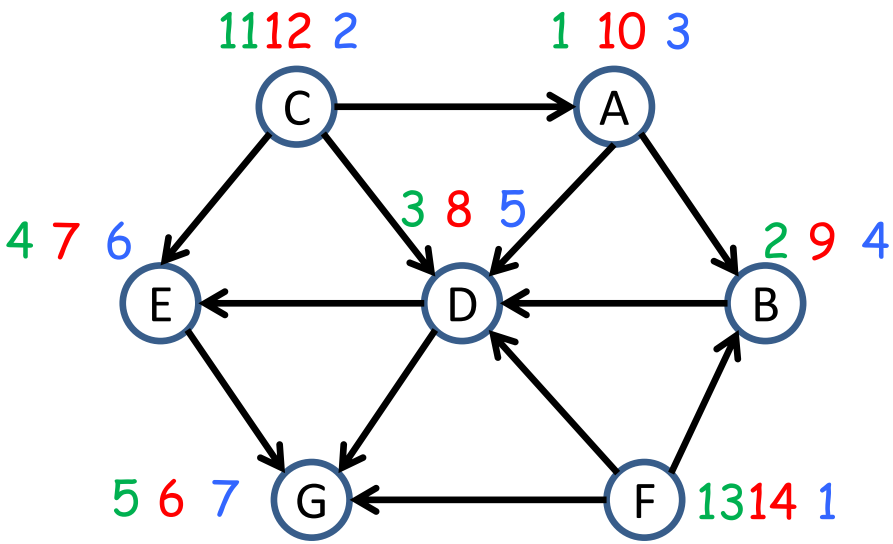
Algoritmo:
fai una visita DFS e restituisci i nodi in ordine decrescente rispetto ai tempi di fine visita post(v)

Complessità temporale:
se G è rappresentato con liste di adiacenza
$\Theta(n+m)$

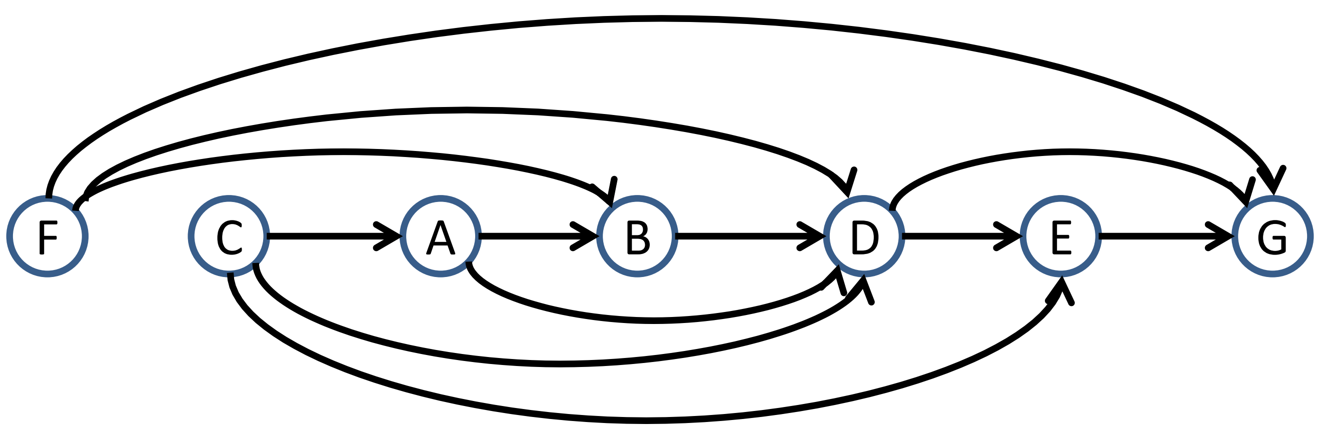
OrdinamentoTopologico (grafo G)

1. top=n; $L \leftarrow$ lista vuota;
2. chiama visita DFS ma:
   1. quando hai finito di visitare un nodo v (quando imposti post(v)):
   2. σ(v)=top; top=top-1;
   3. aggiungi v in testa alla lista L
3. **return** L e σ

Un esempio



pre(v) post(v) σ(v)



correttezza

per ogni coppia di nodi u e v, gli intervalli [pre(u),post(u)] e [pre(v),post(v)] o sono disgiunti o l'uno è contenuto nell'altro

pre/post per l'arco (u,v)	tipo di arco
$[_u \quad [_v \quad]_v \quad]_u$	in avanti
~~$[_v \quad [_u \quad]_u \quad]_v$~~	~~all'indietro~~
$[_v \quad]_v \quad [_u \quad]_u$	trasversali

non ci possono essere archi all'indietro

Un algoritmo alternativo

algoritmo `ordinamentoTopologico`$(grafo\, G) \rightarrow lista$

$\widehat{G} \leftarrow G$

$ord \leftarrow$ lista vuota di vertici

while (esiste un vertice u senza archi entranti in $\widehat{G}$) **do**

appendi u come ultimo elemento di ord

rimuovi da $\widehat{G}$ il vertice u e tutti i suoi archi uscenti

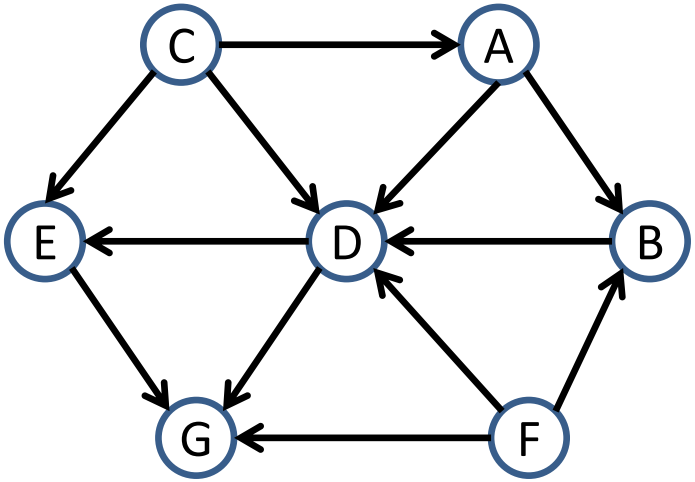
(*) **if** ($\widehat{G}$ non è diventato vuoto) **then errore** il grafo G non è aciclico

return ord

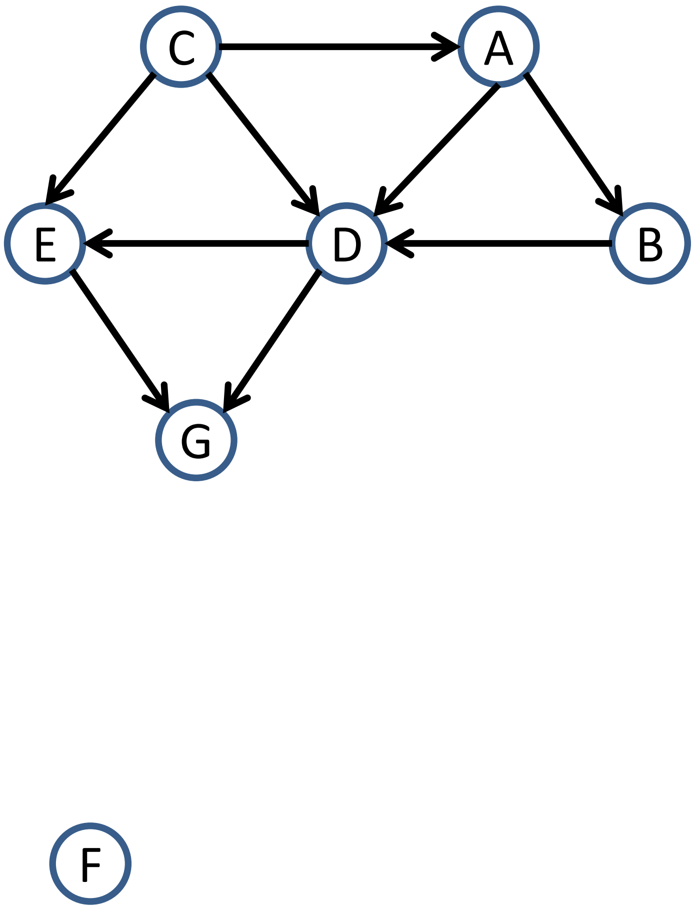
(*) perché altrimenti in $\hat{G}$ ogni vertice deve avere almeno un arco entrante, e quindi posso trovare un ciclo percorrendo archi entranti a ritroso, e quindi G non può essere aciclico)

Tempo di esecuzione (con liste di adiacenza): $\Theta(n+m)$ (dimostrare!)

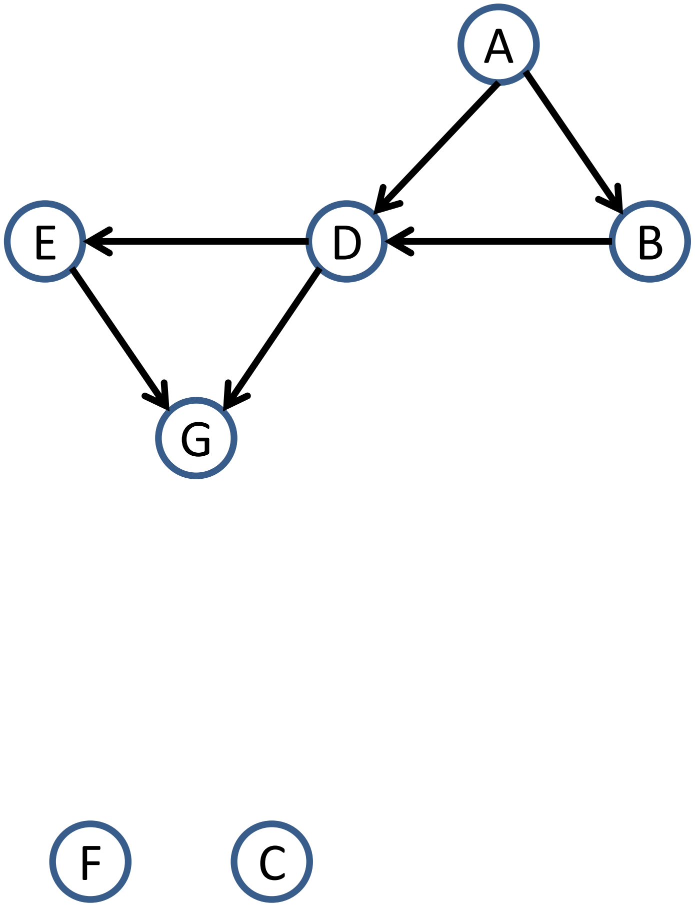
Un esempio



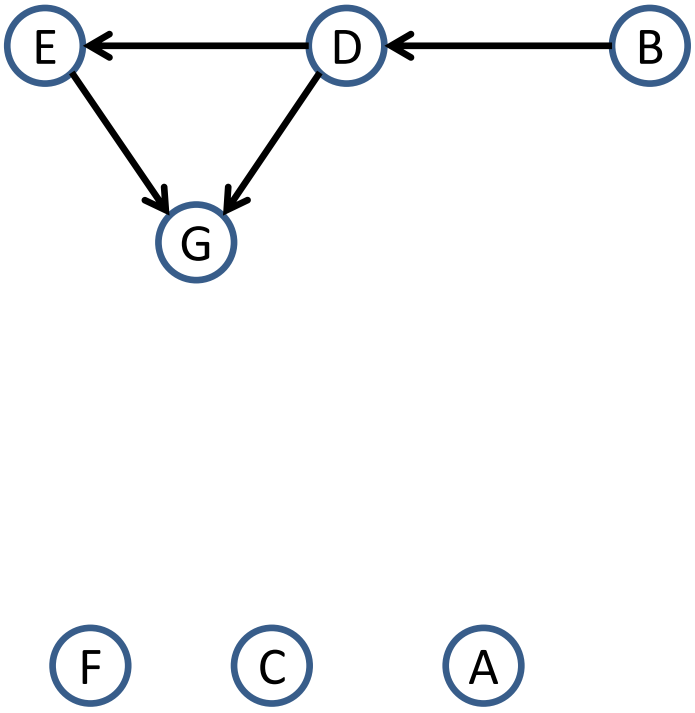
Un esempio



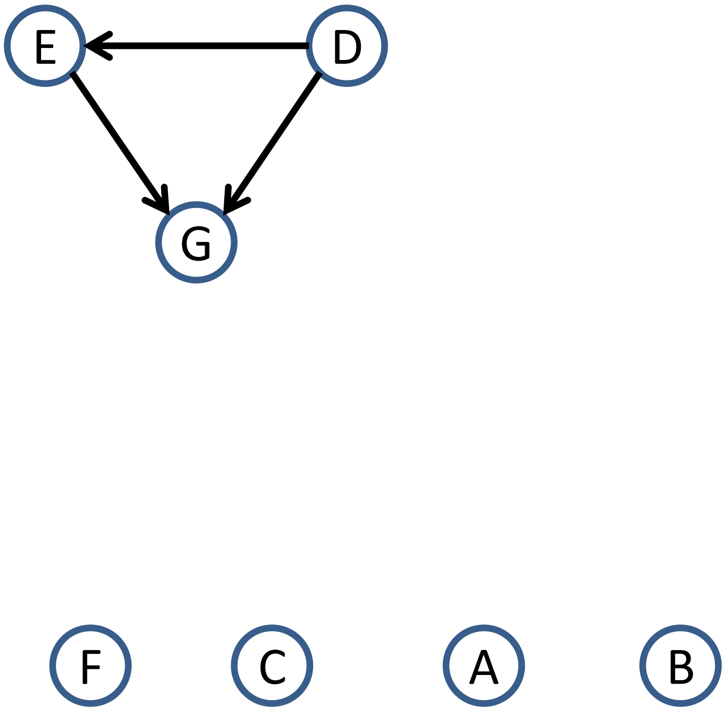
Un esempio



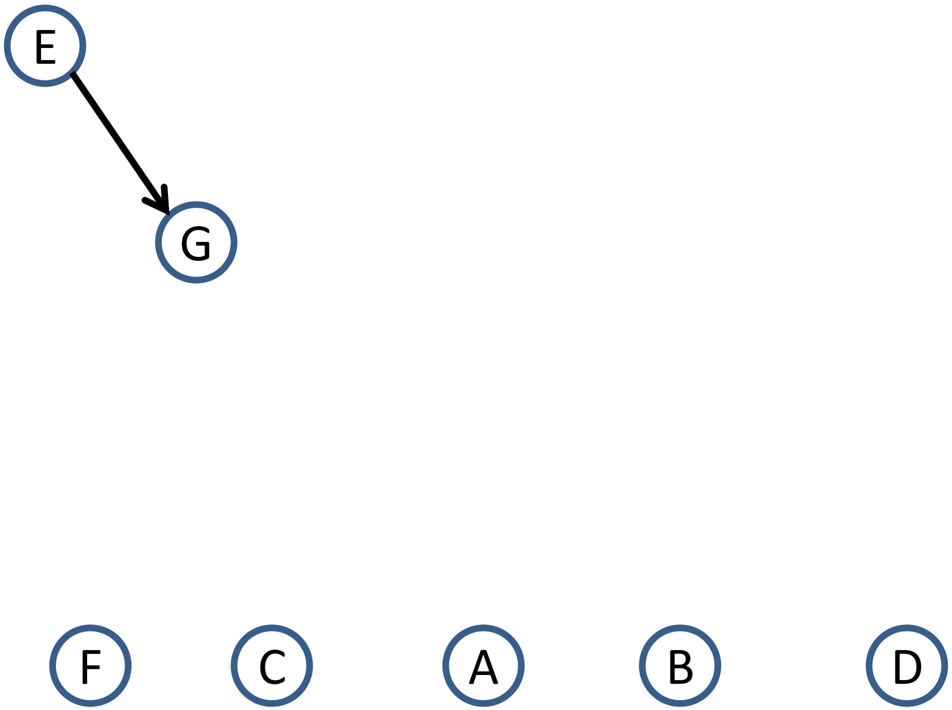
Un esempio



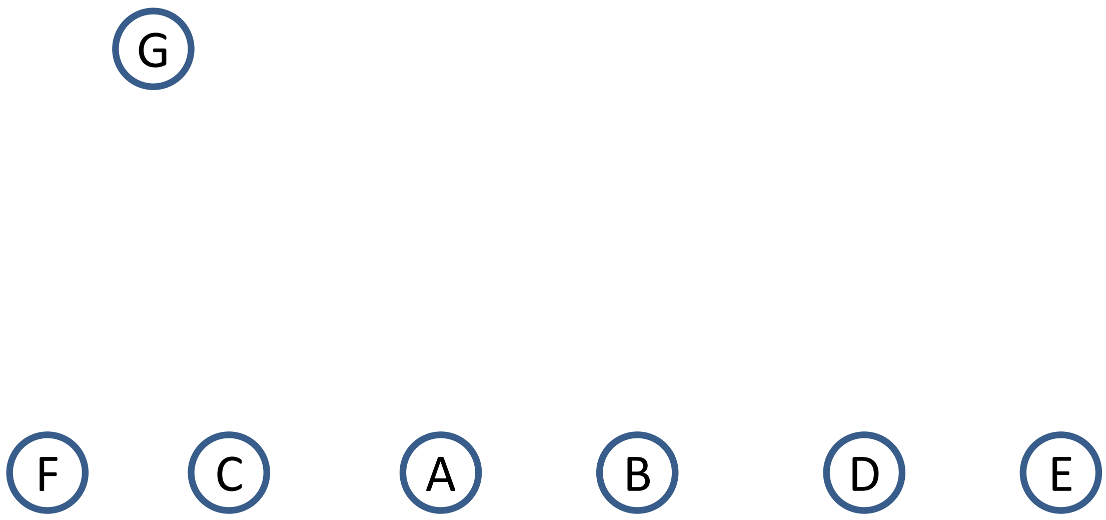
Un esempio



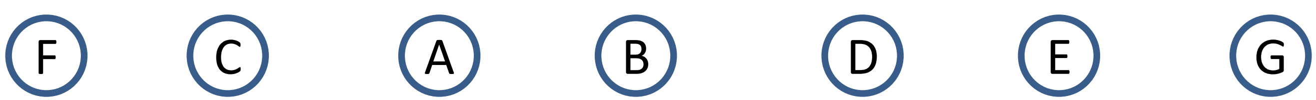
Un esempio



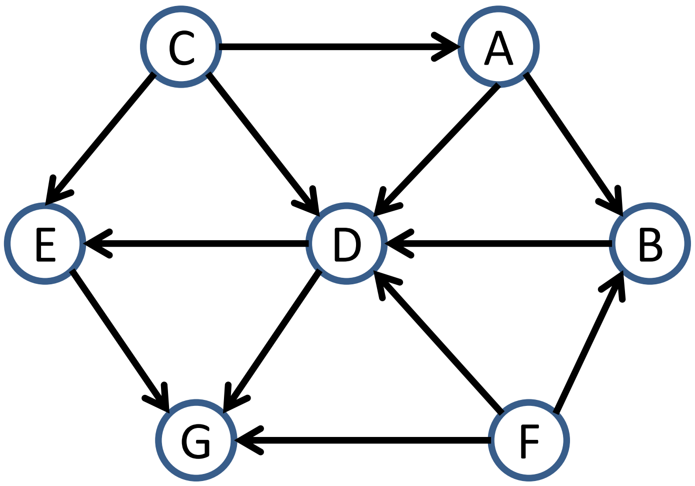
Un esempio

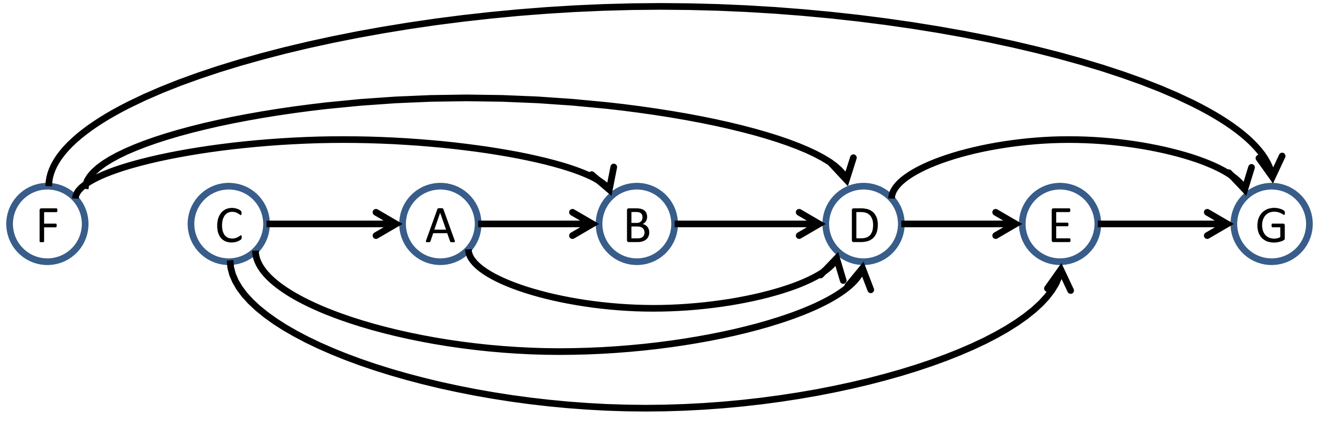


Un esempio

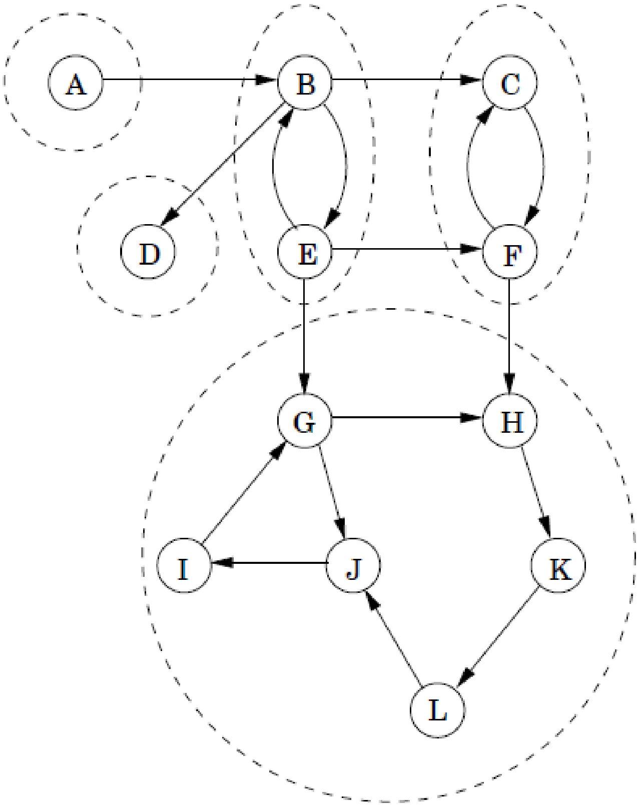


Un esempio



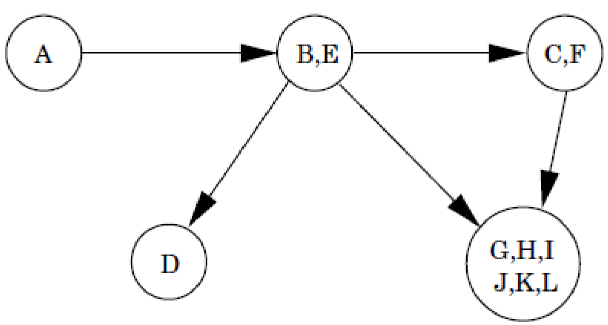


componenti fortemente connesse



una componente fortemente connessa di un grafo $G=(V,E)$ è un insieme massimale di vertici $C \subseteq V$ tale che per ogni coppia di nodi u e v in C, u è raggiungibile da v e v è raggiungibile da u

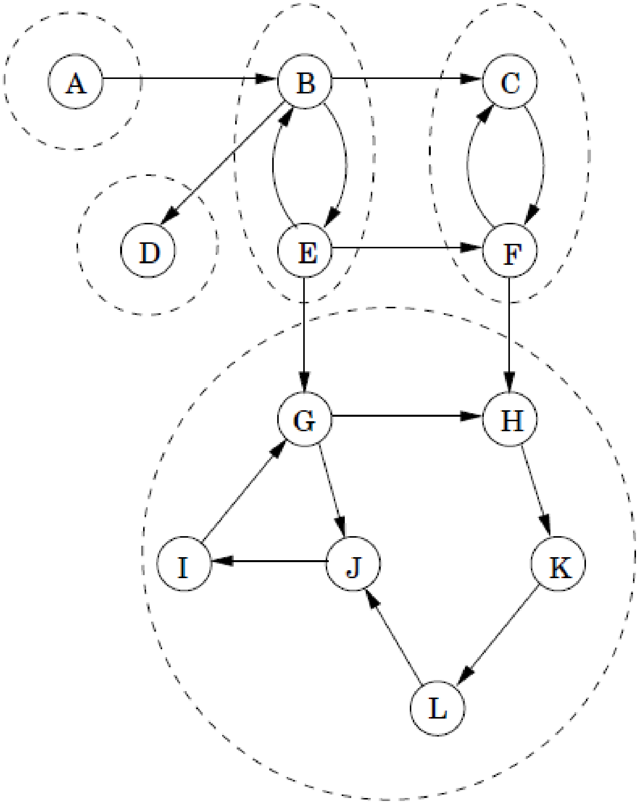
massimale: se si aggiunge un qualsiasi vertice a C la proprietà non è più vera



grafo delle componenti fortemente connesse di G

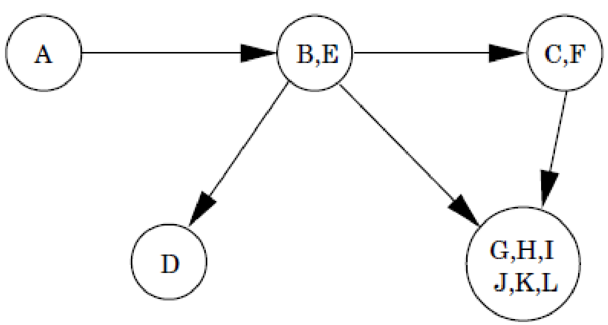
è sempre un DAG!

come si possono calcolare le componenti fortemente connesse di un grafo diretto?

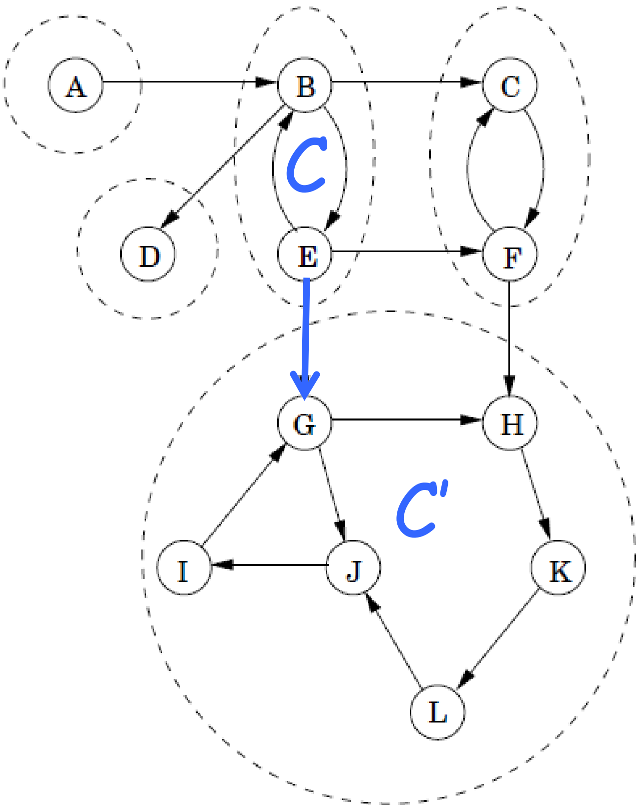


Proprietà 1: se si esegue la procedura visitaDFSricorsiva a partire da un nodo u la procedura termina dopo che tutti i nodi raggiungibili da u sono stati visitati

Idea: eseguire una visita a partire da un nodo di una componente *pozzo*, "eliminare" la componente e ripetere

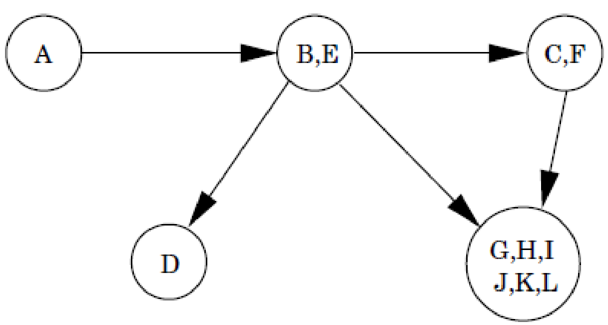


come trovo una componente pozzo?



Proprietà 2: se C e C' sono due componenti e c'è un arco da un nodo in C verso uno in C', allora il più grande valore post() in C è maggiore del più alto valore di post() di C'

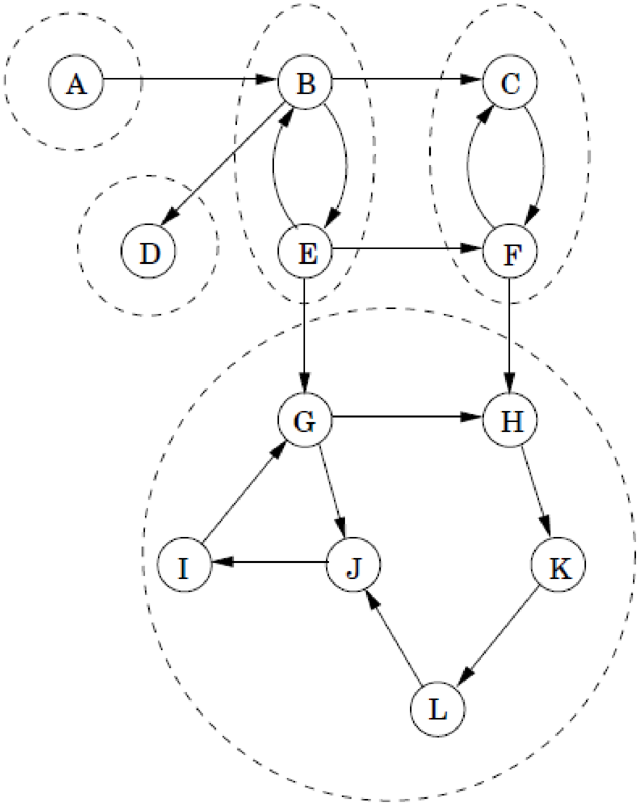
dim: se la DFS visita prima C' di C: banale. se visita prima C, allora si ferma dopo che ha raggiunto tutti i nodi di C e C' e termina su un nodo di C.



Proprietà 3: il nodo che riceve da una visita DFS il valore più grande di post() appartiene a una componente *sorgente*

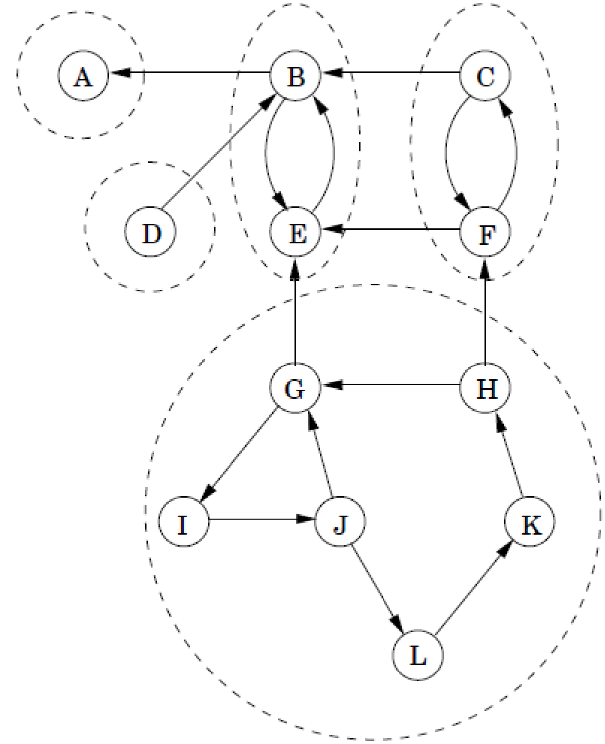
ma avevamo bisogno di una componente *pozzo*?

idea: invertiamo gli archi!

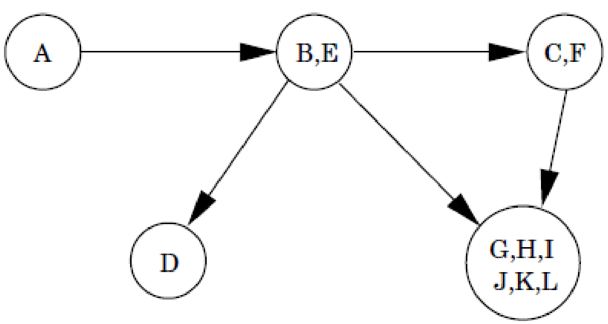


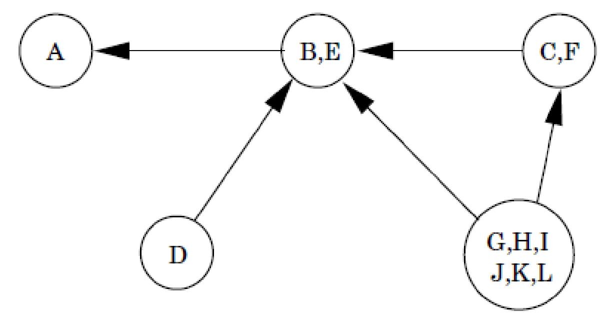
G

G^R



Nota bene: le componenti fortemente connesse sono le stesse!
(perchè?)





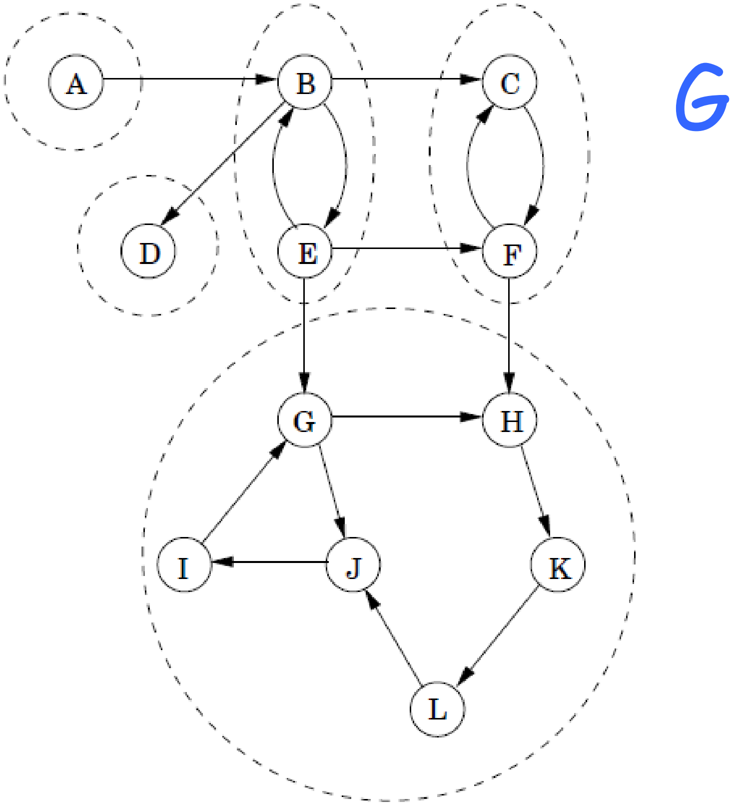
VisitaDFS (grafo *G*)

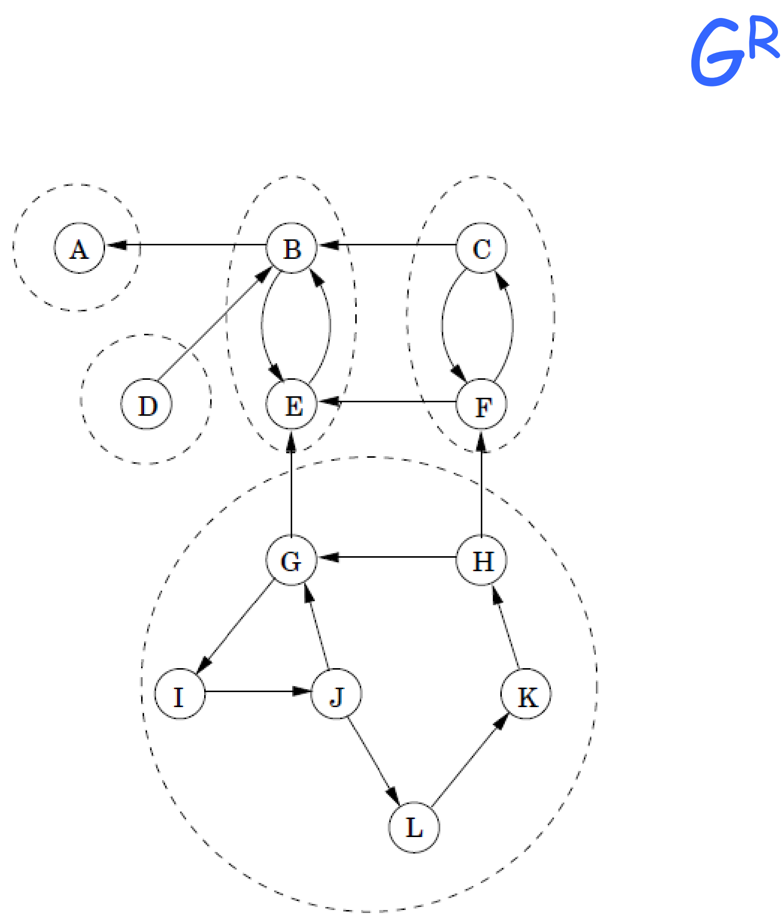
1. calcola G^R
2. esegui DFS(G^R) per trovare valori post(v)
3. **return** CompConnesse(G)

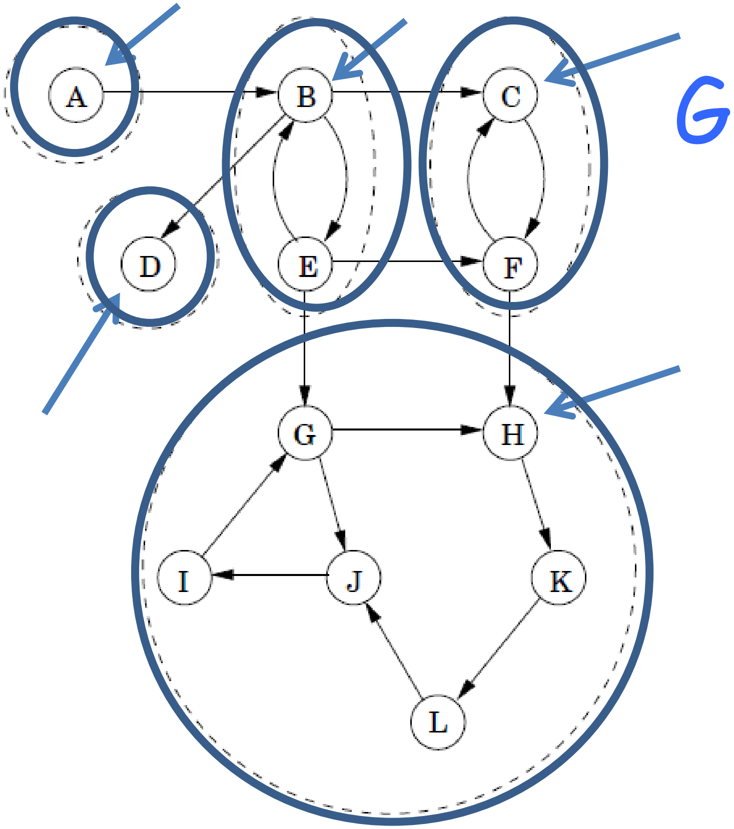
Complessità temporale:
se *G* è rappresentato
con liste di adiacenza
$\Theta(n+m)$

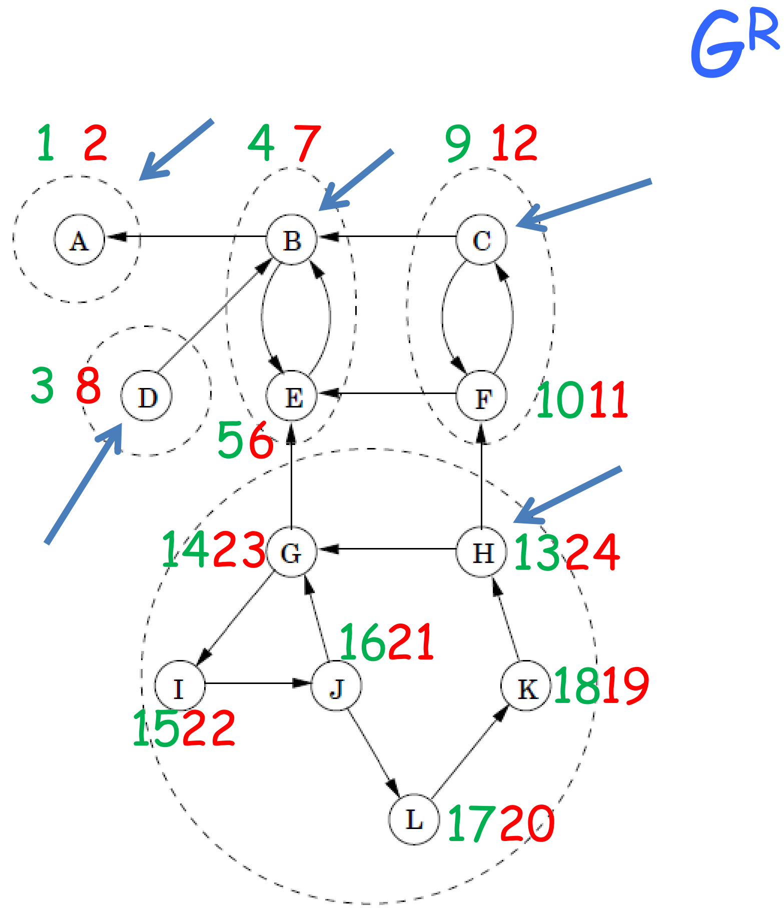
CompConnesse (grafo *G*)

1. **for each** nodo *v* **do** imposta *v* come *non marcato*
2. *Comp* $\leftarrow \emptyset$
3. **for each** nodo *v* in ordine decrescente di post(v) **do**
4. **if** (*v* è *non marcato*) **then**
5. *T* $\leftarrow$ albero vuoto
6. visitaDSFRicorsiva(*v*,*T*)
7. aggiungi *T* a *Comp*
8. **return** *Comp*


A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L
G


A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L
G^R


G
A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L


G^R
1 2
4 7
9 12
A
B
C
3 8
D
E
F
5 6
10 11
14 23
G
H
13 24
16 21
I
J
K
18 19
15 22
L
17 20