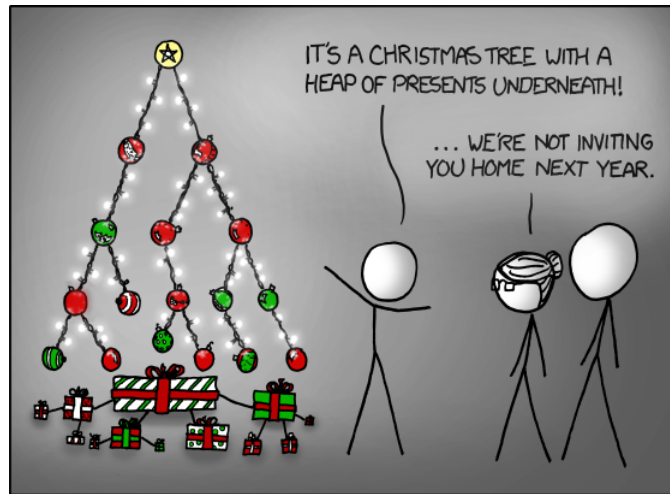


Problem Set 3
(quello di natale, ovvero:
algoritmi sotto l'albero)
docente: Luciano Gualà

Esercizio 0 (esercizio di preparazione allo spirito natalizio)

Per accogliere lo spirito natalizio di questo Problem Set si consiglia prima di preparare un albero di natale adeguato. Un suggerimento è fornito in Figura 1.

Figura 1: Un esempio di albero di natale adeguato.



Esercizio 1 (Babbo Natale e le nuove tecnologie)

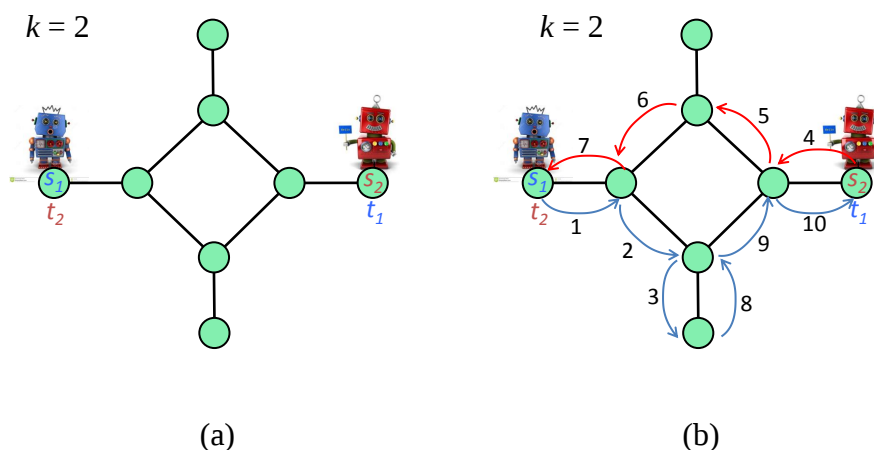
Quest'anno Babbo Natale per consegnare i regali, non potendo usare la slitta perché delle associazioni animaliste gli hanno fatto causa per sfruttamento delle renne, si è dotato di robot che posso essere telecomandati a distanza. Non è stato facile cambiare le sue abitudini, ma ce l'ha quasi fatta. Gli restano infatti da consegnare solo gli ultimi due regali. Ce la farà?

La mappa del mondo è rappresentata come un grafo non orientato e non pesato $G = (V, E)$ dove i due robot si possono muovere. All'inizio i due robot, ognuno con il proprio regalo da consegnare, sono posizionati su due nodi del grafo, diciamo s_1 ed s_2 , mentre le due case in cui vanno consegnati i regali si trovano su t_1 e t_2 . In ogni istante di tempo Babbo Natale può effettuare la seguente mossa: ordinare ad uno dei due robot di spostarsi dal nodo su cui è a un nodo adiacente (percorrendo un arco del grafo). L'obiettivo è quindi portare il robot che si trova su s_1 nel nodo t_1 ed il robot che si trova su s_2 nel nodo t_2 . Le antenne dei robot, però, soffrono di problemi di interferenze: se i robot finiscono troppo vicini l'uno con l'altro non riescono più a ricevere il segnale e quindi a muoversi. Per questo motivo si vuole che i robot in ogni istante di tempo siano sempre a distanza reciproca (nel

grafo) di almeno k , dove k è un parametro del problema. Un esempio di istanza e soluzione è fornito in Figura 2.

Aiutate Babbo Natale ad andare in vacanza progettando un algoritmo che trovi il numero minimo di mosse che porta i robot nelle posizioni desiderate.

Figura 2: (a) Un'istanza del problema: i due robot devono scambiarsi di posto, in ogni istante di tempo si può muovere solo uno dei due lungo un arco adiacente al nodo in cui si trova, i due robot devono sempre trovarsi a distanza almeno k . (b) una possibile soluzione da 10 mosse.



Esercizio 2 (l'uccisione di Babbo Natale)

Anche quest'anno a Chinonsò il Grinch sta cercando di far fallire il natale. Ha un piano perfetto: ucciderà Babbo Natale prima che consegna i regali. Sa che il panzone con la barba arriverà alle porte di Chinonsò fra esattamente Δ ore. E ha scoperto dove trovare il coltello magico, l'unica arma che può uccidere Babbo Natale. Il coltello si trova dentro una grotta, sotto il cadavere del grillo. Il Grinch non sa se farà in tempo ad andare a recuperare il coltello prima che Babbo Natale arrivi, ma ha un complice che (se serve) può recuperare il coltello per lui: il suo fedele cane e amico Max. La mappa di Chinonsò è rappresentata come un grafo non orientato $G = (V, E)$. Il Grinch e Max si trovano rispettivamente nei nodi v_G e v_M , mentre la grotta che nasconde il coltello e le porte di Chinonsò sono rispettivamente nei nodi v_C e v_P . Attraversare un arco richiede un'ora per il Grinch e due ore per Max (che è più lento del suo amico bipede). Il coltello può essere recuperato sia dal Grinch che

da Max, ma deve essere il Grinch a sferrare il colpo fatale a Babbo Natale, e questo può avvenire solo in v_P nel momento esatto in cui Babbo Natale si presenterà. Max e il Grinch possono scambiarsi il coltello in qualsiasi nodo del grafo in un tempo trascurabile, così come è trascurabile il tempo necessario, una volta in v_C , per recuperare il coltello. Mancano esattamente Δ ore. La neve sta cadendo. Le stelle sono punte di spillo. Progettate un algoritmo con complessità lineare nella dimensione del grafo che decide se c'è una strategia che consente al Grinch di assassinare Babbo Natale.

Esercizio 3 (*e tornava l'emigrante*)

Fabiano è a Tor Vergata e vuole tornare a casa per natale ma non ha la macchina e deve raggiungere la sua lontanissima città, Potenza. La rete di trasporti è modellata come un grafo orientato $G = (V, E, w)$ dove il peso di un arco (u, v) rappresenta il tempo necessario per spostarsi con un opportuno mezzo da u a v . Fabiano ha diversi abbonamenti (della metro, dei treni regionali e interregionali, tessera per affittare biciclette, slitte e monopattini) che gli permettono di viaggiare gratis su molte tratte. Però ci sono delle tratte che non sono coperte dai suoi abbonamenti. Più precisamente, alcuni degli archi del grafo sono *a pagamento* e ogni volta che Fabiano vuole attraversarne uno deve pagare 1 euro. Nel portafoglio ha k euro. Tor Vergata è sul nodo s mentre casa sua è nel nodo t . L'obiettivo di Fabiano è arrivare il prima possibile a casa. Progettare un algoritmo efficiente che calcoli il miglior cammino che porta Fabiano a casa.