Problem Set 2

Prof. Luciano Gualà

Da consegnare entro domenica 22 gennaio 2023 agli indirizzi
`guala@mat.uniroma2.it`, `alessandrostr95@gmail.com`
(Si prega di specificare nell'elaborato gli autori con i relativi indirizzi email.)

Problema 1. *(La Befana vien di notte e a Luigi tante botte)*
La Befana deve consegnare l'ultima calza di carbone al bambino più cattivo dell'anno. Il bambino si chiama Luigi. I genitori di Luigi le hanno mandato un'email in cui le chiedevano di non portare caramelle ma solo tanto carbone al loro figlio. "Non sta mai fermo, ci ha rubato i soldi per comprarsi un cappotto nuovo e mentre guardiamo le serie TV ci disturba facendo domande a raffica tanto che non riusciamo a seguire la storia."

Così ora la Befana deve consegnare il carbone a Luigi. Ha a disposizione la sua scopa voltane per spostarsi per la città e la sua calza con la quale portare il carbone. La calza può portare, se riempita tutta, Δ grammi di carbone. Per accontentare i genitori di Luigi (e scontentare Luigi) la Befana deve consegnare al bambino $\delta < \Delta$ grammi di carbone.

La città è modellata come un grafo $G = (V, E)$ non orientato e non pesato. La Befana si trova nel nodo s mentre la casa di Luigi è nel nodo t.

Il problema è che la calza della Befana ha in fondo un buco e quando lei vola con la sua scopa dal buco perde carbone. Ogni volta che attraversa un arco del grafo, perde 1 grammo di carbone. Questo crea alla Befana almeno due problemi. Il primo è che se non sta attenta rischia di arrivare a casa di Luigi (sul nodo t) con meno di δ grammi di carbone e questo le costerebbe il posto da Befana per il prossimo anno. Il secondo problema, ancora più insidioso, è che se la calza si svuotasse mentre lei è in volo volerebbe via per il vento e lei non saprebbe più come trasportare il carbone.

Per fortuna nella città ci sono dei posti dove lei può ricaricare di carbone la sua calza. Nella città questi posti corrispondono all'insieme di nodi $C \subseteq V$. Se la Befana raggiunge un nodo $u \in C$, può riempire nuovamente la sua calza (se non l'ha persa in volo) fino a contenere nuovamente Δ grammi di carbone. Si assuma che $s \in C$ e che quindi la Befana prima di partire può riempire la sua calza.

- Si progetti un algoritmo che aiuti la Befana a capire il percorso che deve fare (con le eventuali soste per ricaricare la calza) per arrivare a casa di Luigi con almeno δ grammi di carbone e rendere felici i genitori del bambino (e infelice il bambino).

- Si risolva lo stesso problema sotto la seguente assunzione: ogni volta che la Befana si ferma su un nodo $u \in C$ e ricarica la sua calza, il buco si allarga e da quel momento in poi perde un grammo in più su ogni arco (all'inizio quando la Befana attraversa un arco perde 1 grammo di carbone, dopo la prima ricarica perde 2 grammi su ogni arco, dopo la seconda ricarica 3 grammi e così via).

Si argomenti sulla correttezza degli algoritmi proposti e si fornisca la stima della complessità temporale in funzione della dimensione del grafo e del numero $|C|$ dei posti dove è possibile trovare carbone.

Problema 2. *(un puzzle nella calza)*
La Befana vi ha lasciato nella calza, insieme a caramelle e cioccolatini, un puzzle algoritmico per ricordarvi che presto ci sarà il parziale di ASD. Il puzzle ha come scacchiera un grafo non orientato e non pesato $G = (V, E)$ dove ogni nodo $v \in V$ ha un valore univoco associato $c(v)$. Sul grafo è posata una pedina, inizialmente su un nodo specifico s. C'è anche un nodo target t e l'obiettivo è trovare una sequenza di mosse che portano la pedina da s a t. L'unica mossa che si può fare è spostare la pedina dalla sua posizione corrente u in un nodo vicino v attraverso l'arco $(u, v) \in E$, solo se $c(u) < c(v)$.

- Progettare una algoritmo con complessità lineare che dice se il puzzle è *risolvibile*, ovvero se esiste una sequenza di mosse che sposta la pedina da s a t.

- Si assuma che l'istanza che avete del puzzle non sia risolvibile. Il vostro obiettivo è aumentare il valore di un solo nodo del grafo in modo da rendere l'istanza risolvibile. Più in dettaglio, volete trovare (se esiste) un nodo v del grafo e un nuovo valore $c' > c(v)$ tale che, se assegnate a v il nuovo valore c' l'istanza che ottenete è risolvibile. Progettate un algoritmo che risolva efficientemente questo problema.