

Problem Set 1

docente: Luciano Gualà

Esercizio 1 (notazione asintotica)

Siano $f(n), g(n), h(n)$ tre funzioni asintoticamente positive. Inoltre, sia $c > 1$ una costante reale positiva. Si dimostrino o confutino le seguenti affermazioni:

1. $2^{f(n)+2^c} = \Theta(2^{f(n)})$.
2. $g(n) = \Theta(1)$ implica $2^{f(n)+g(n)} = O(2^{f(n)})$.
3. $g(n) = o(f(n))$ implica $2^{f(n)+g(n)} = O(2^{f(n)})$.
4. $f(n) + g(n) + h(n) = \Theta(\max\{f(n), g(n), h(n)\})$.
5. $f(n) = \Theta(\log n)$ implica $\log n^{f(n)} = O(\log^c n^{g(n)})$.
6. $f(n) = \Theta(f(c \cdot n))$.
7. $f(n) = \Theta(f(c + n))$.

Esercizio 2

Sia $V[1; n]$ un vettore di n interi non necessariamente ordinato. Un indice $1 \leq i < n$ è detto *double-gap* se $V[i + 1] - V[i] \geq 2$. Si consideri un vettore V tale che $V[n] - V[1] \geq n$, e si argomenti sul fatto che tale vettore ha necessariamente almeno un indice double-gap. Poi si progetti un algoritmo che, dato un vettore V tale che $V[n] - V[1] \geq n$, ritorna un indice double-gap in tempo $O(\log n)$.

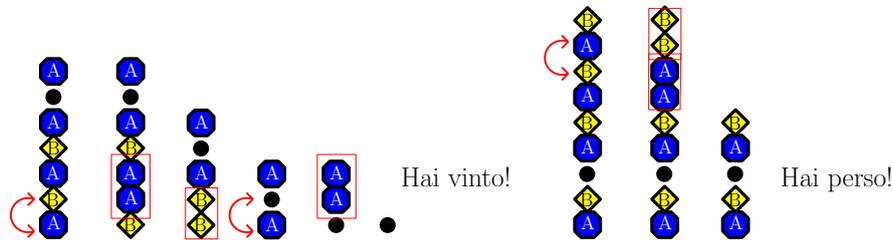


Figura 1: Due esempi di partita, una in cui il giocatore vince (eliminando tutte le caramelle), e una in cui perde. Il sassolino è rappresentato da un pallino nero.

Esercizio 3 (Un nuovo videogame)

Gira voce di un imminente lancio da parte della King di un nuovo videogame chiamato *Candy Column Crush*. La configurazione iniziale di gioco consiste in una colonna di n caramelle e un sassolino. Le caramelle sono di due tipi, A e B. L'obiettivo del gioco è rimuovere tutte le caramelle. Una sequenza di due o più caramelle dello stesso tipo è chiamata *blocco*. Il giocatore può effettuare la seguente tipologia di mossa: scambiare il contenuto di due posizioni adiacenti. Se lo scambio porta il gioco in una configurazione in cui non ci sono blocchi, allora lo scambio non produce effetto e il contenuto delle due posizioni torna nella posizione iniziale. Altrimenti, tutti i blocchi che si sono formati scoppiano contemporaneamente e le caramelle rimaste, per forza di gravità, si ricompattano verso il basso; a questo punto, se

si sono formati nuovi blocchi, anche questi scoppiano contemporaneamente e via dicendo, fino a che non ci sono più blocchi e il controllo del gioco è passato nuovamente al giocatore che può effettuare la prossima mossa. Alcuni esempi di partita sono mostrati in figura.

Si progetti un algoritmo (veloce) che, data una configurazione iniziale di gioco, trovi una sequenza di mosse in grado di rimuovere tutte le caramelle o, se questo non è possibile, segnali che il gioco non è risolvibile.