Algoritmi e Strutture Dati

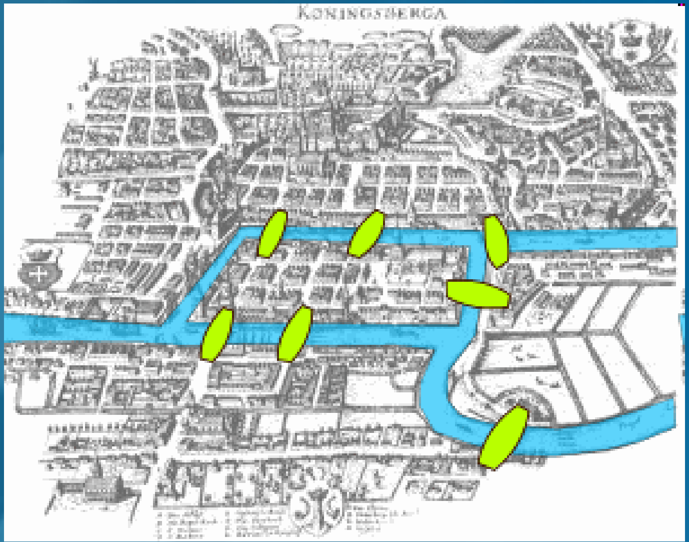
Capitolo 11

Grafi e visite di grafi

grafi, teoria dei grafi, problemi su grafi

Origini storiche

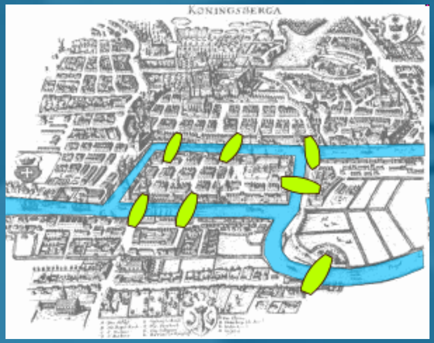
Nel 1736, il matematico Eulero, affrontò l’annoso problema dei 7 ponti di Königsberg (Prussia):

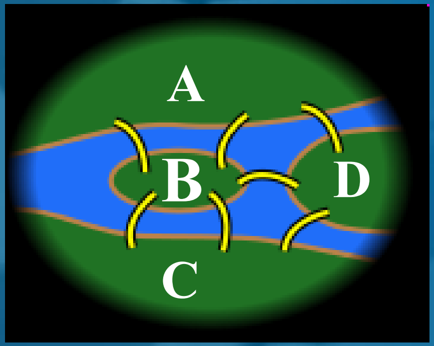


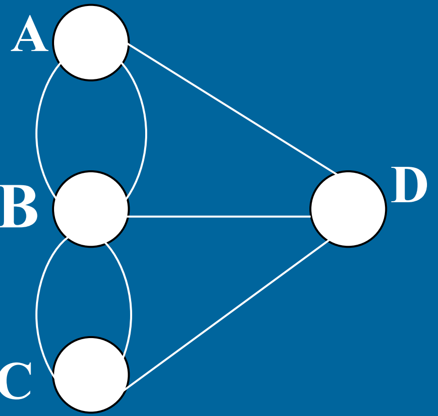
È possibile o meno fare una passeggiata che parta da un qualsiasi punto della città e percorra una ed una sola volta ciascuno dei 7 ponti?

Origini storiche (2)

Eulero affrontò il problema schematizzando topologicamente la pianta della città, epurando così l'istanza da insignificanti dettagli topografici:







…e così Königsberg venne rappresentata con un insieme di 4 punti (uno per ciascuna zona della città), opportunamente uniti da 7 linee (una per ciascun ponte)

Definizione di grafo
(non orientato)

Un grafo G=(V,E) consiste in:

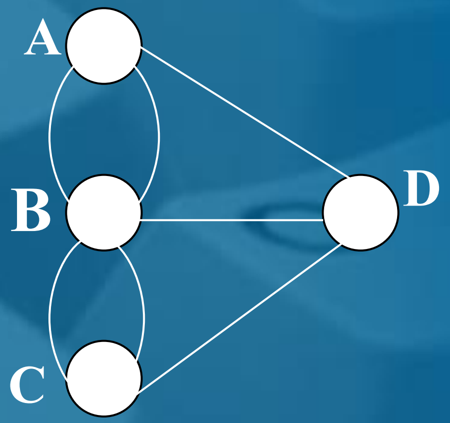
- un insieme V di vertici (o nodi);
- un insieme E di coppie (non ordinate) di vertici, detti archi.

Esempio

Grafo di Eulero associato alla città di Königsberg:

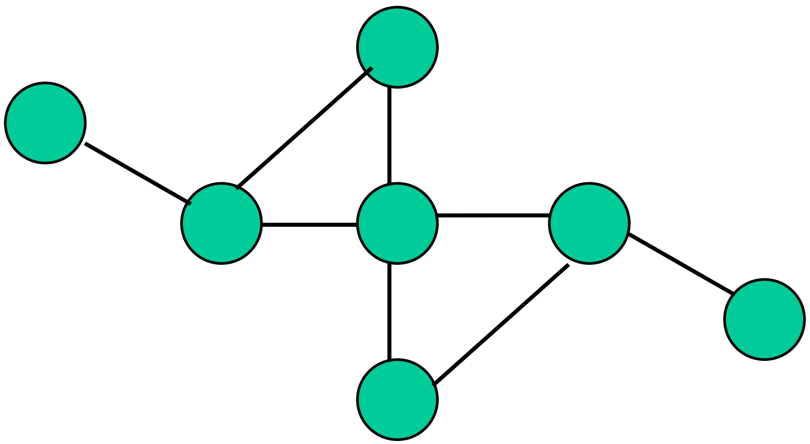
$V=\{A,B,C,D\}$,

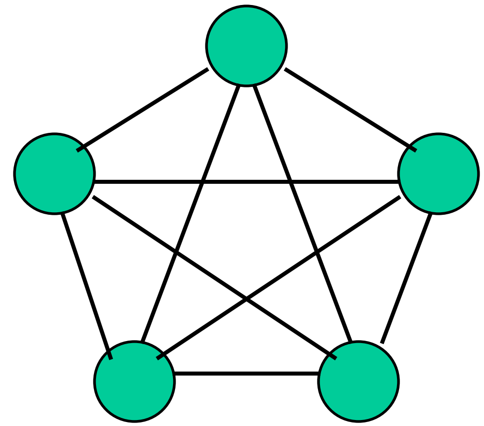
$E=\{(A,B), (A,B), (A,D), (B,C), (B,C), (B,D), (C,D)\}$

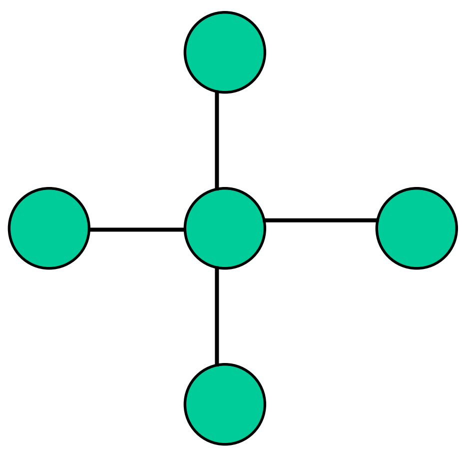


Nota: È più propriamente detto multigrafo, in quanto contiene archi paralleli.

...esempi



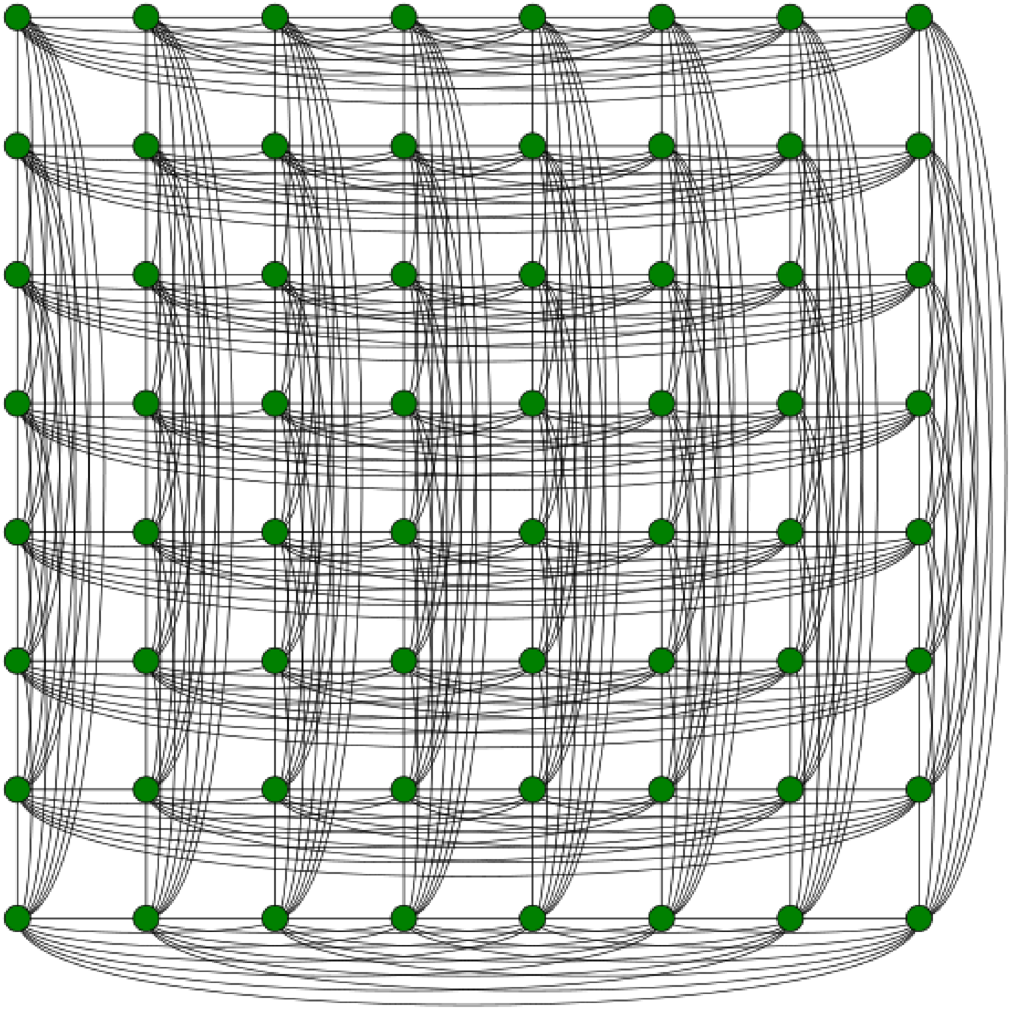




Rook's Graph

un nodo per ogni
posizione della scacchiera

c'è un arco fra due
nodi/posizioni
se e solo se
una torre può spostarsi
dall'una all'altra
posizione

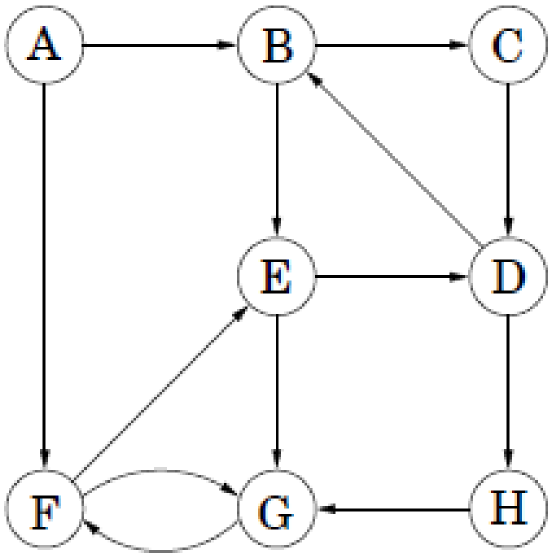


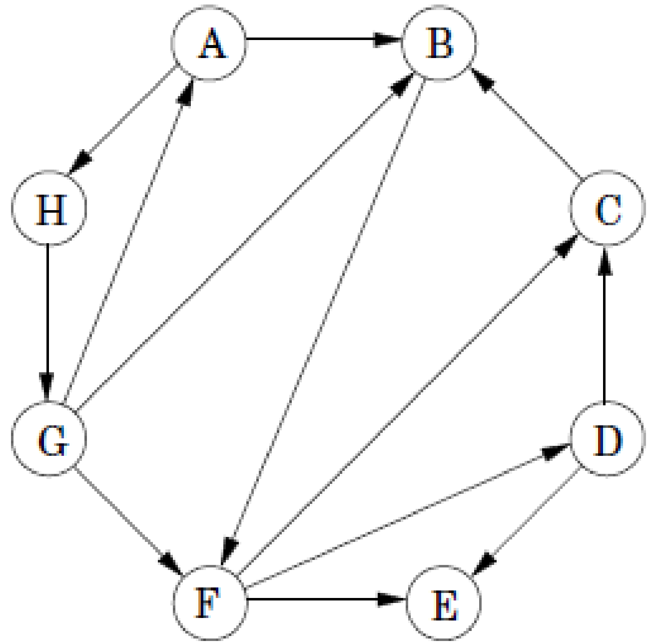
Definizione di grafo diretto

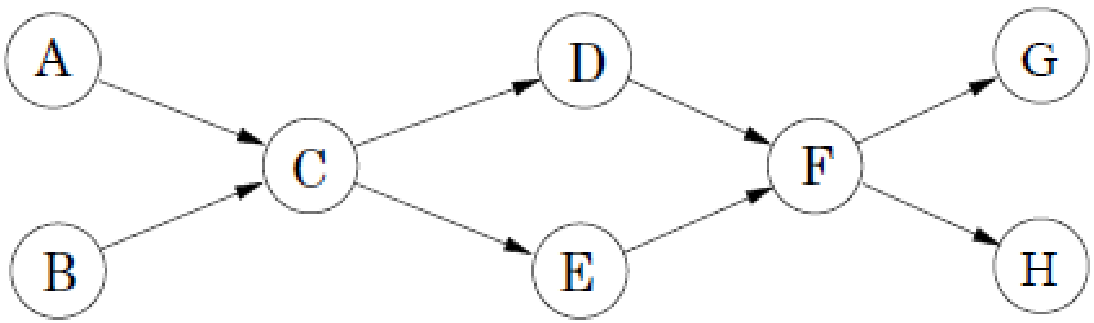
Un grafo diretto D=(V,A) consiste in:

- un insieme V di vertici (o nodi);
- un insieme A di coppie ordinate di vertici, detti archi diretti.

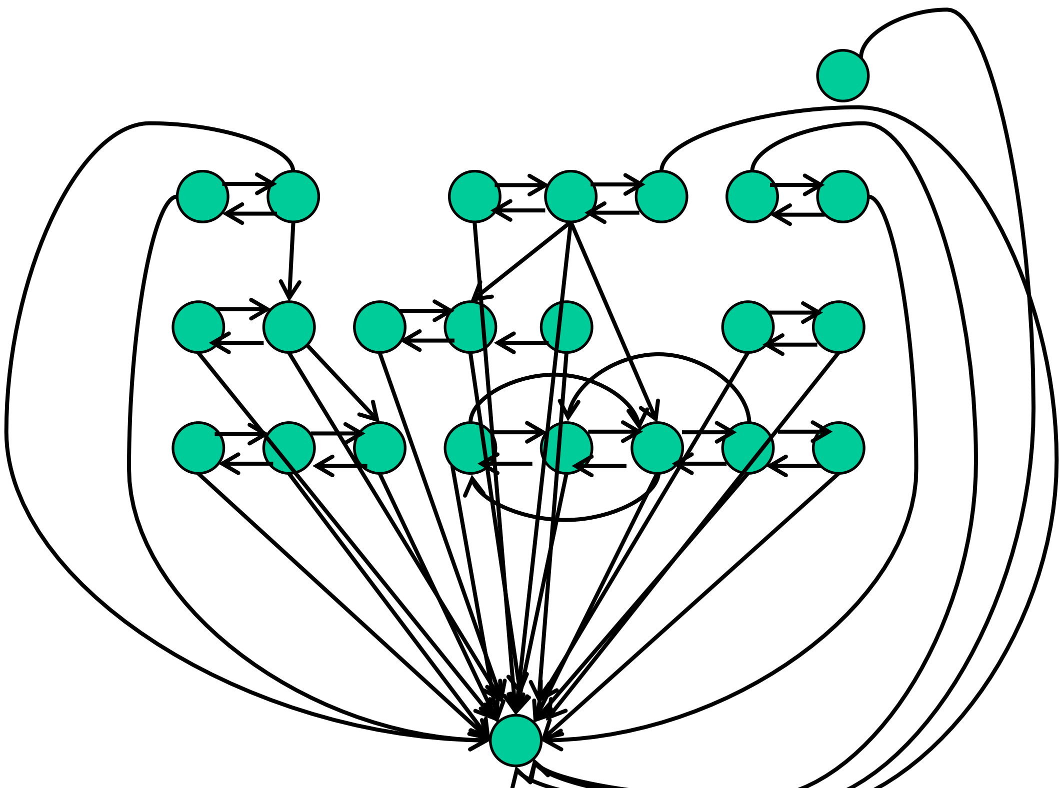
...esempi







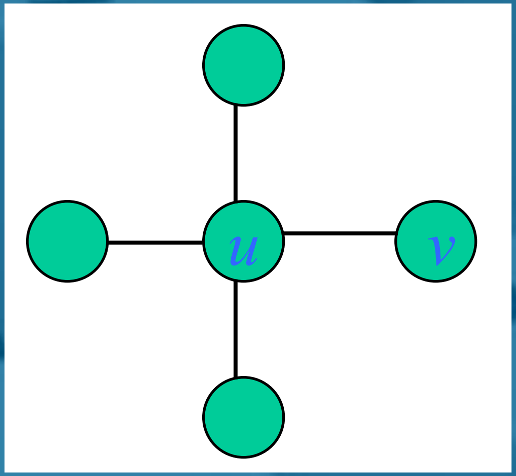
un altro esempio: grafo sociale della classe di ASD



i nodi rappresentano
le persone in aula

c'è un arco (u,v) se
la u conosce
nome e cognome di v

Terminologia



$G=(V,E)$ grafo non diretto

$n=|V|$ numero di vertici

$m=|E|$ numero di archi

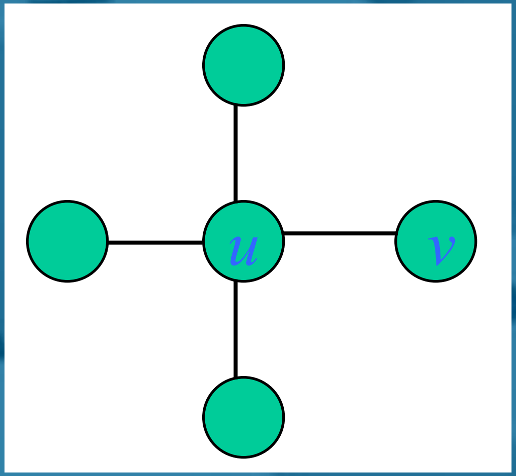
u ed *v* sono adiacenti (vicini)

(u,v) è incidente a *u* e a *v* (detti estremi)

$\delta(u)$: grado di *u*: #archi incidenti a *u*

grado di G $= \max_{v \in V}\{\delta(v)\}$

Terminologia



$G=(V,E)$ grafo diretto

$n=|V|$ numero di vertici

$m=|E|$ numero di archi

u ed *v* sono adiacenti (vicini)

(u,v) è uscente da *u* ed entrante in *v*

$\delta_{out}(u)$: grado uscente di *u*: #archi uscenti da *u*

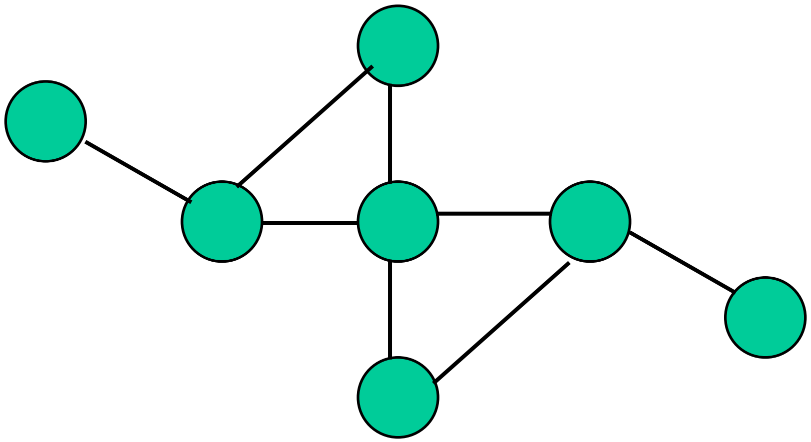
$\delta_{in}(u)$: grado entrante in *u*: #archi entranti in *u*

grado entrante di G = $\max_{v\in V}\{\delta_{in}(v)\}$

grado uscente di G = $\max_{v\in V}\{\delta_{out}(v)\}$

che relazione c'è fra grado dei nodi e numero di archi?

Una semplice proprietà

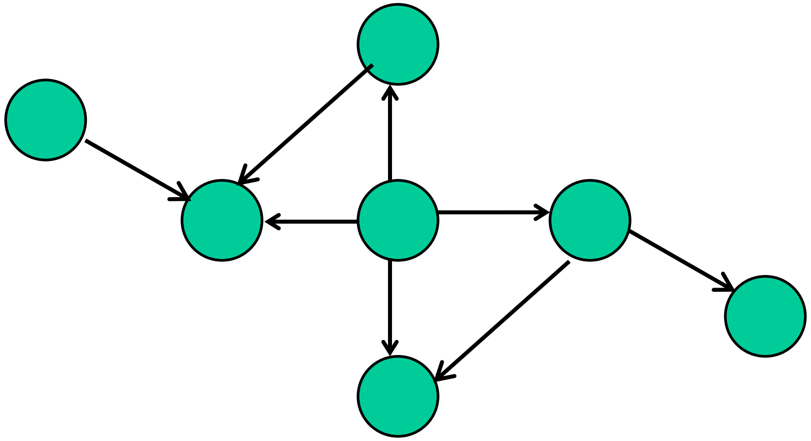


cosa ottengo se sommo
i gradi di ogni nodo?

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2m$$

in ogni grafo
il numero di nodi
di grado dispari
è pari

domanda (sui grafi diretti):
cosa ottengo se sommo il grado
uscente/entrante di tutti i nodi?

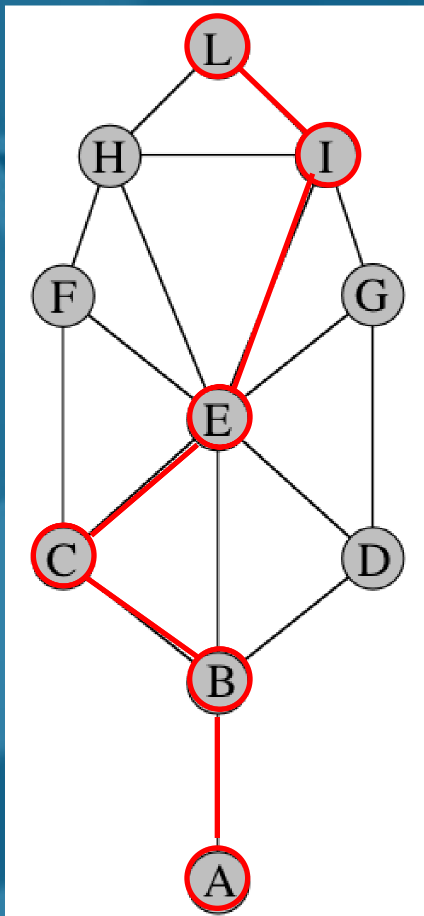


Una semplice proprietà

cosa ottengo se sommo
i gradi di ogni nodo?

$$\sum_{v \in V} \delta_{out}(v) = \sum_{v \in V} \delta_{in}(v) = m$$

Terminologia

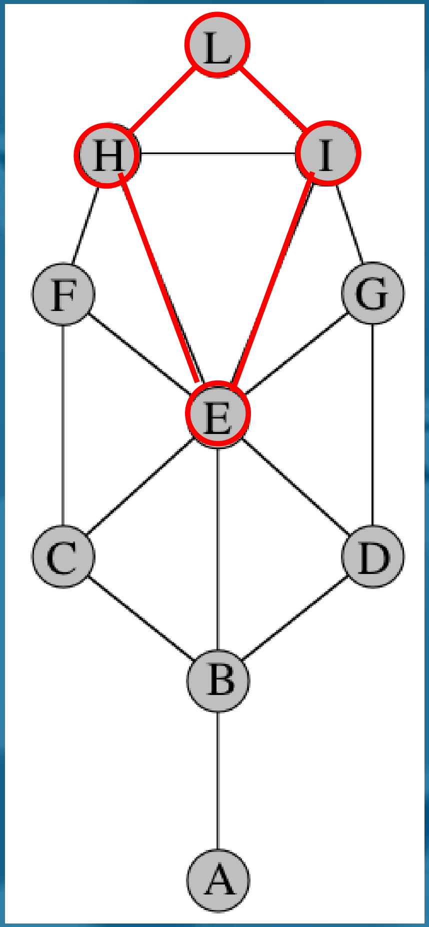


- *cammino*: sequenza di nodi connessi da archi
- *lunghezza di un cammino*: #archi del cammino
- *distanza*: La lunghezza del più corto cammino tra due vertici si dice *distanza* tra i due vertici

distanza fra L e A: 4

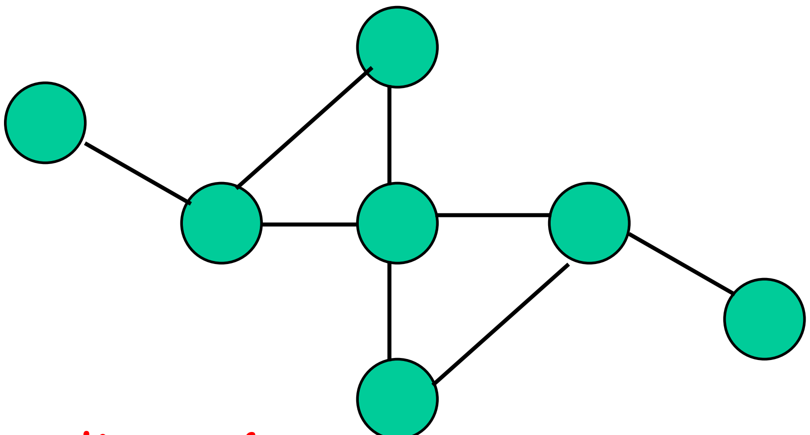
in un grafo orientato, il cammino deve rispettare il verso di orientamento degli archi

Terminologia

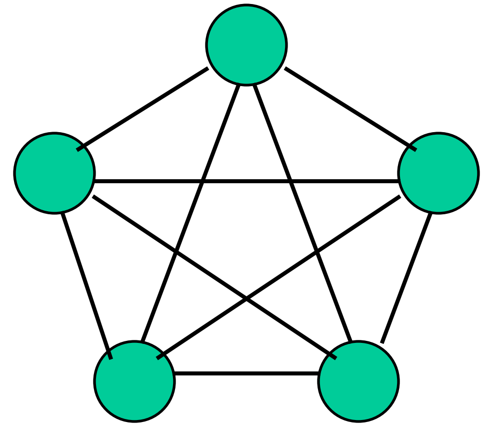


- G è connesso se esiste un cammino per ogni coppia di vertici
- *ciclo*: un cammino chiuso, ovvero un cammino da un vertice a se stesso
- il diametro è la massima distanza fra due nodi
  - $\max_{u,v \in V} dist(u,v)$
  - il diametro di un grafo non connesso è ∞

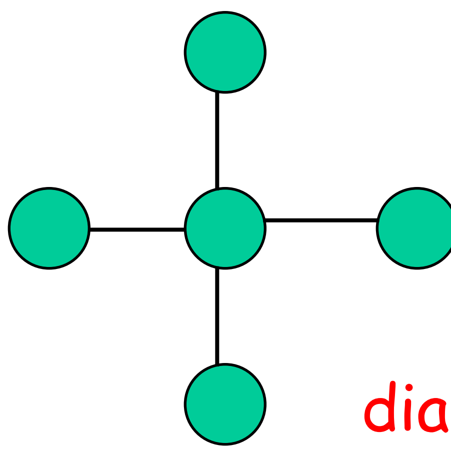
...esempi



diam=4



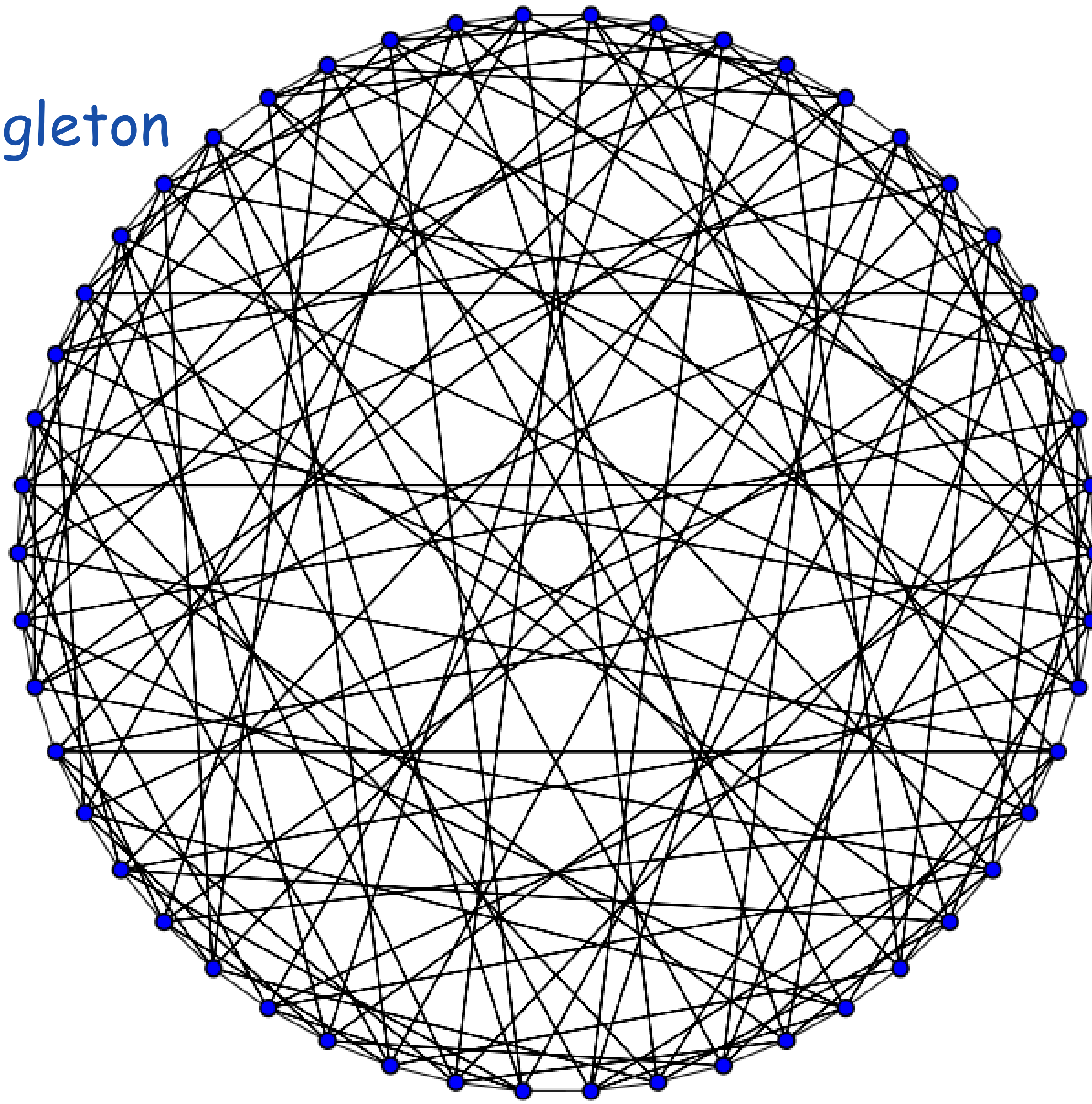
diam=1

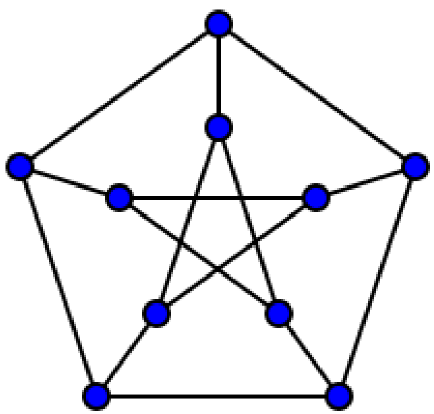


diam=2

...altri due grafi di diametro 2

grafo
Hoffman-Singleton

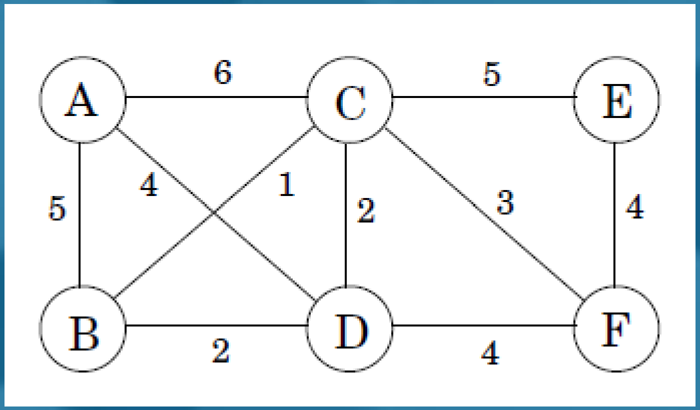


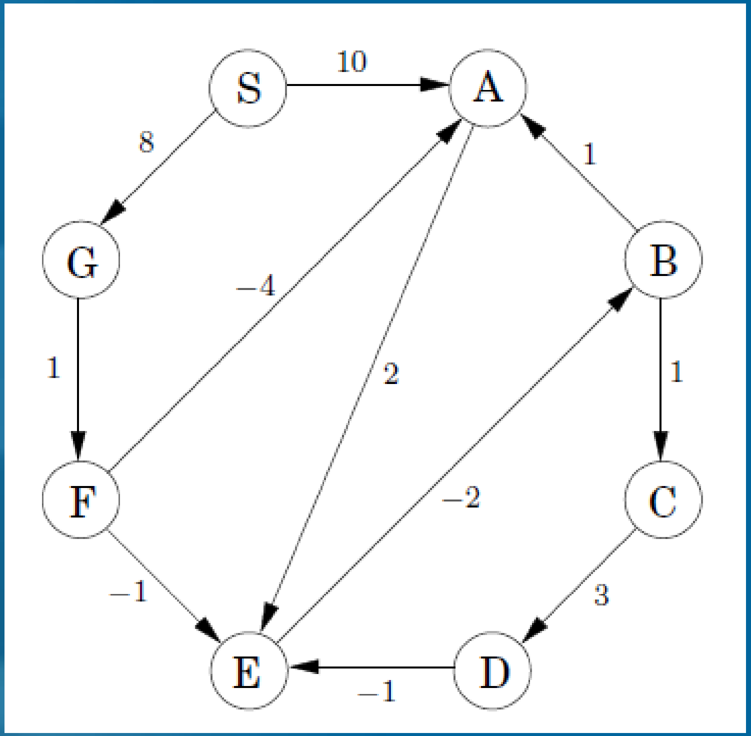


grafo di
Petersen

Terminologia

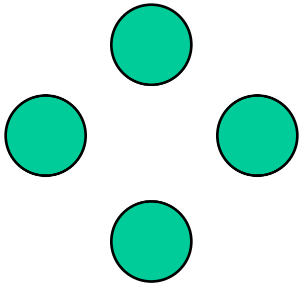
- Grafo pesato: è un grafo G=(V,E,w) in cui ad ogni arco viene associato un valore definito dalla funzione peso w (definita su un opportuno insieme, di solito i reali).





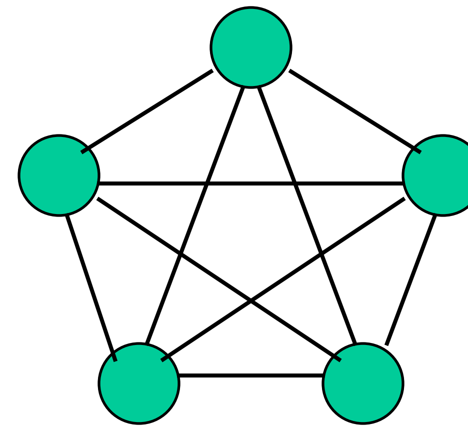
quanti archi può avere
un grafo di n nodi?

due grafi molto particolari



Grafo totalmente sconnesso: è un grafo $G=(V,E)$ tale che $V\neq\emptyset$ ed $E=\emptyset$.

Grafo completo: per ogni coppia di nodi esiste un arco che li congiunge.



K_5

Il grafo completo con n vertici verrà indicato con K_n

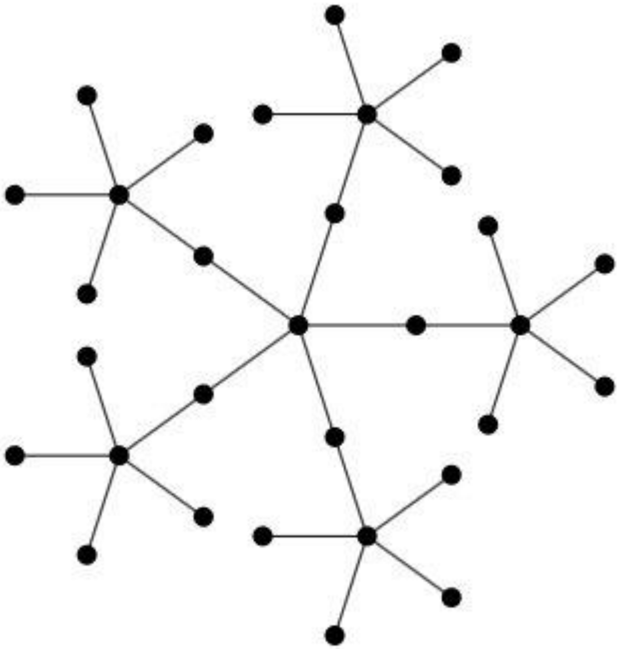
$m=|E|= n\cdot(n-1)/2$

un grafo (senza cappi o archi paralleli) può avere un numero di archi m compreso tra 0 e $n(n-1)/2=\Theta(n^2)$.

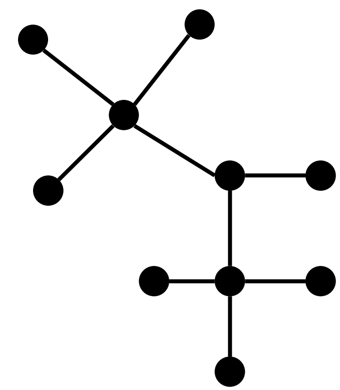
come è fatto un grafo connesso con il minimo numero di archi?

Definizione

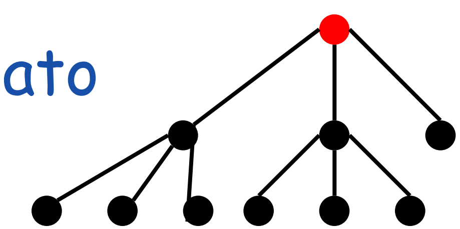
Un albero è un grafo connesso ed aciclico.



libero



radicato



Teorema

Sia $T=(V,E)$ un albero; allora $|E|=|V|-1$.

dim. (per induzione su $|V|$)

caso base: $|V|=1$ T  $|E|=0=|V|-1$

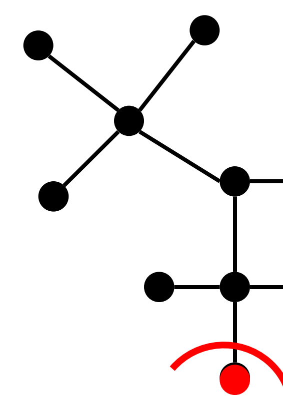
caso induttivo: $|V|>1$

Sia n il numero di nodi di T

poiché T è connesso e aciclico ha almeno una foglia (nodo con grado 1)

se tutti i nodi avessero grado almeno 2 ci sarebbe un ciclo (riuscite a vedere perché?)

T



rimuovendo tale foglia si ottiene grafo connesso e aciclico con n-1 nodi che per ipotesi induttiva ha n-2 archi

$\Rightarrow$ T ha n-1 archi

■

Esercizio

Sia G=(V,E) un grafo non orientato. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono tutte equivalenti:

(a) G è un albero;
(b) due vertici qualsiasi di G sono collegati da un unico cammino semplice;
(c) G è connesso, ma se viene rimosso un arco qualsiasi da E, non grafo risultante non è connesso;
(d) G è connesso e $|E|=|V|-1$;
(e) G è aciclico e $|E|=|V|-1$;
(f) G è aciclico, ma se un arco qualsiasi viene aggiunto a E, il grafo risultante contiene un ciclo.

⇨

per un grafo connesso con n nodi e m archi vale:

$$n-1 \leq m \leq n(n-1)/2$$

Esercizio

Sia G=(V,E) un grafo non orientato. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono tutte equivalenti:

(a) G è un albero;

(b) due vertici qualsiasi di G sono collegati da un unico cammino semplice;

(c) G è connesso, ma se viene rimosso un arco qualsiasi da E, non grafo risultante non è connesso;

(d) G è co

(e) G è ac

(f) G è ac grafo risultar

se G è connesso

$$m=\Omega(n) \text{ e } m=O(n^2)$$

per un grafo connesso con n nodi e m archi vale:

$$n-1 \leq m \leq n(n-1)/2$$

Nota bene: se un grafo ha $m \geq n-1$ archi, non è detto che sia connesso. Quanti archi deve avere un grafo per essere sicuramente connesso?

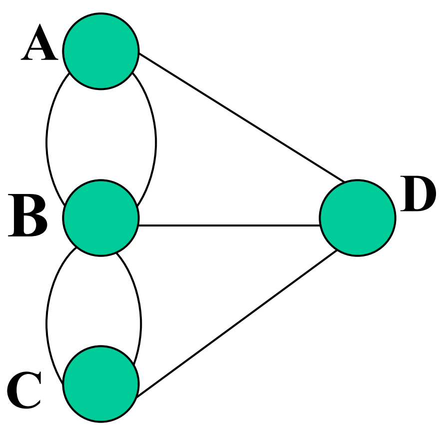
...tornando al problema dei 7 ponti

Definizione

Dato un grafo G, un ciclo (rispettivamente un cammino) Euleriano è un ciclo (rispettivamente un cammino non chiuso) di G che passa per tutti gli archi di G una e una sola volta.

Teorema (di Eulero)

Un grafo G ammette un ciclo Euleriano se e solo se tutti i nodi hanno grado pari. Inoltre, ammette un cammino Euleriano se e solo se tutti i nodi hanno grado pari tranne due (i due nodi di grado dispari sono gli estremi del cammino).



il problema dei 7 ponti non ammette soluzione!

perché i grafi?

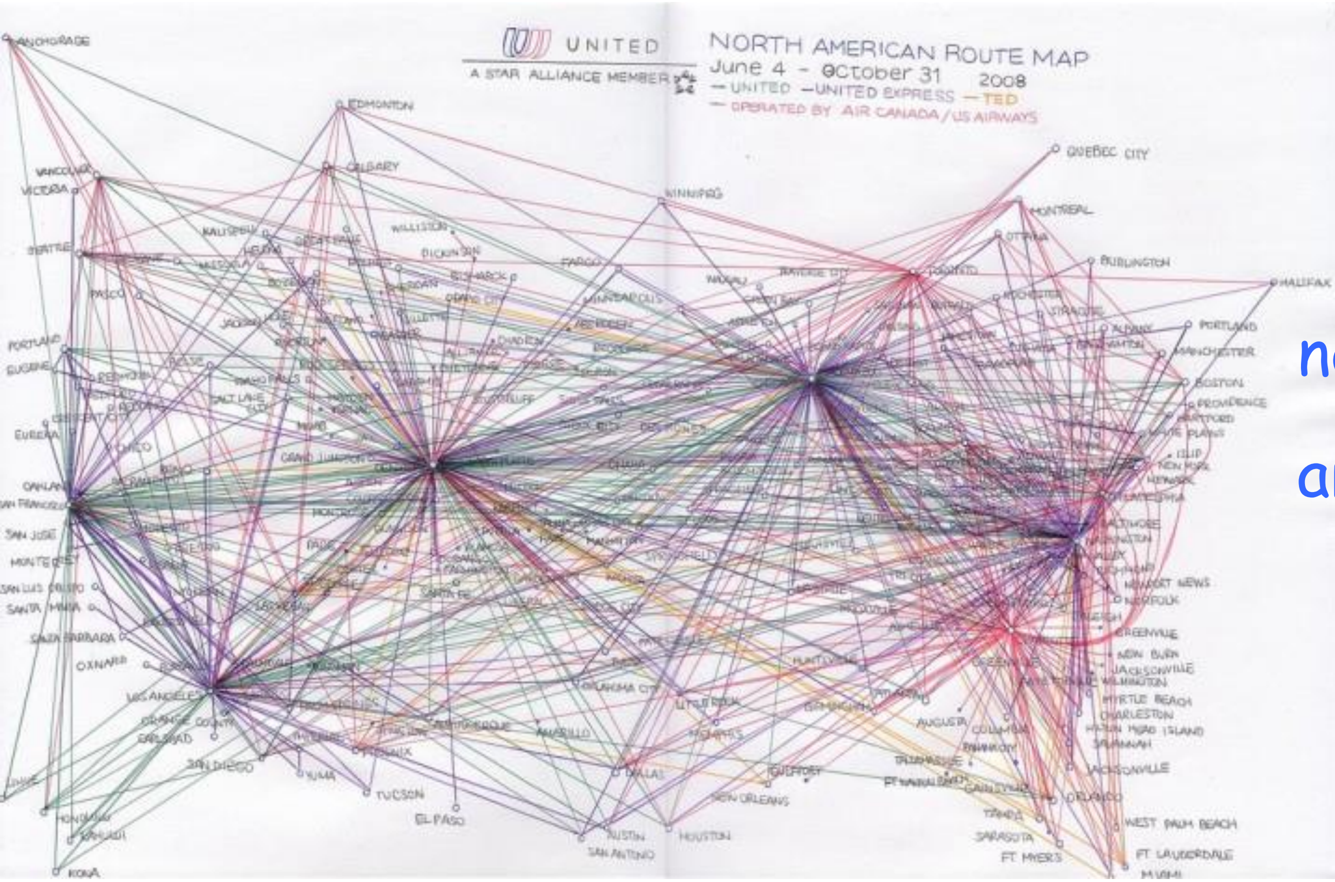
i grafi costituiscono un linguaggio potente per descrivere oggetti e problemi algoritmici

reti stradali e di trasporto

nodi: incroci

archi: strade

reti stradali e di trasporto



nodi: aeroporti

archi: rotte aeree

reti stradali e di trasporto

Londra

nodi: fermate

archi: tratte metro

reti stradali e di trasporto

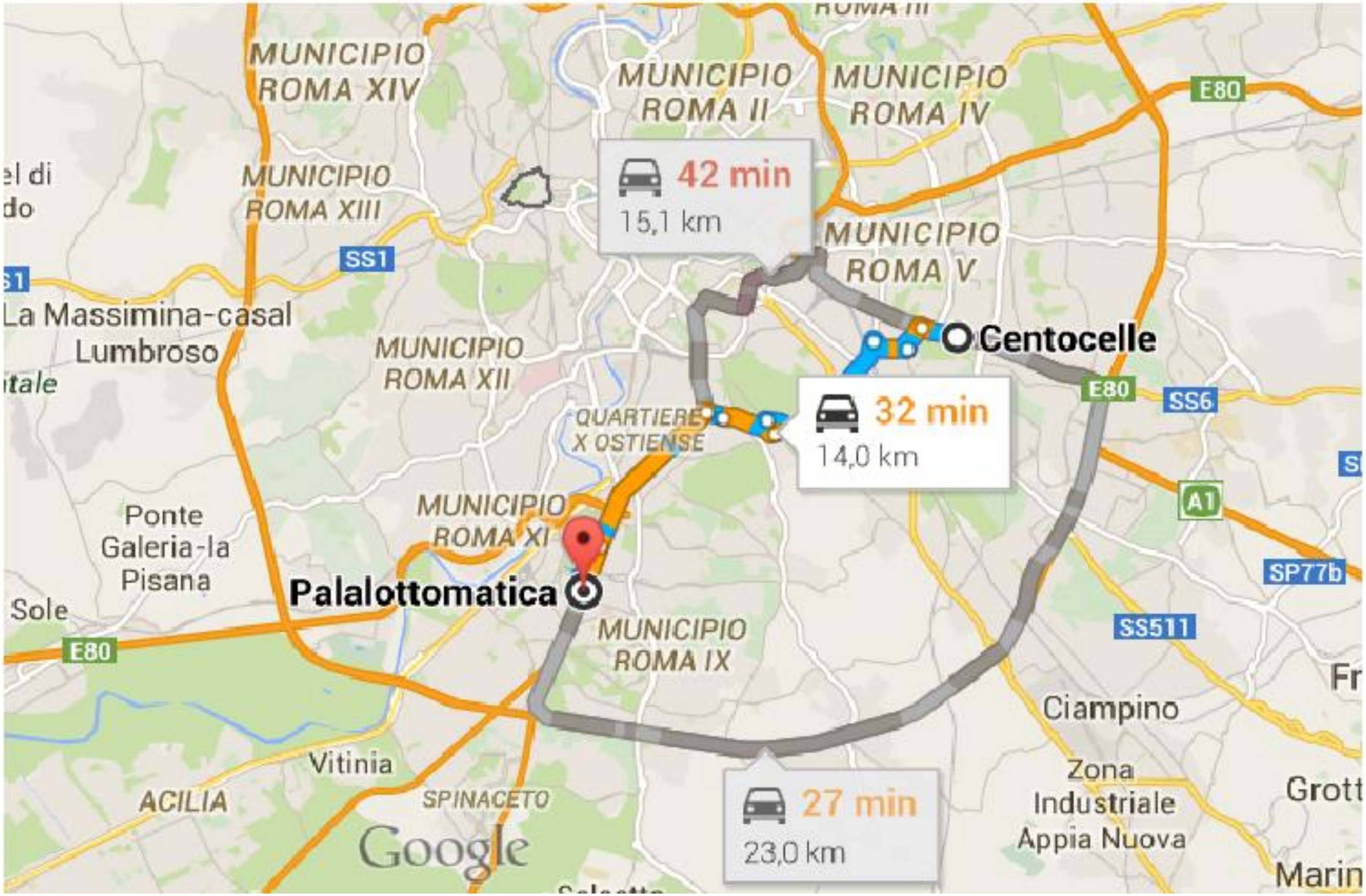
nodi: fermate

archi: tratte metro

Roma

… attualmente aciclico ☹
ma almeno è connesso ☺

problema:
trovare il cammino minimo fra due nodi



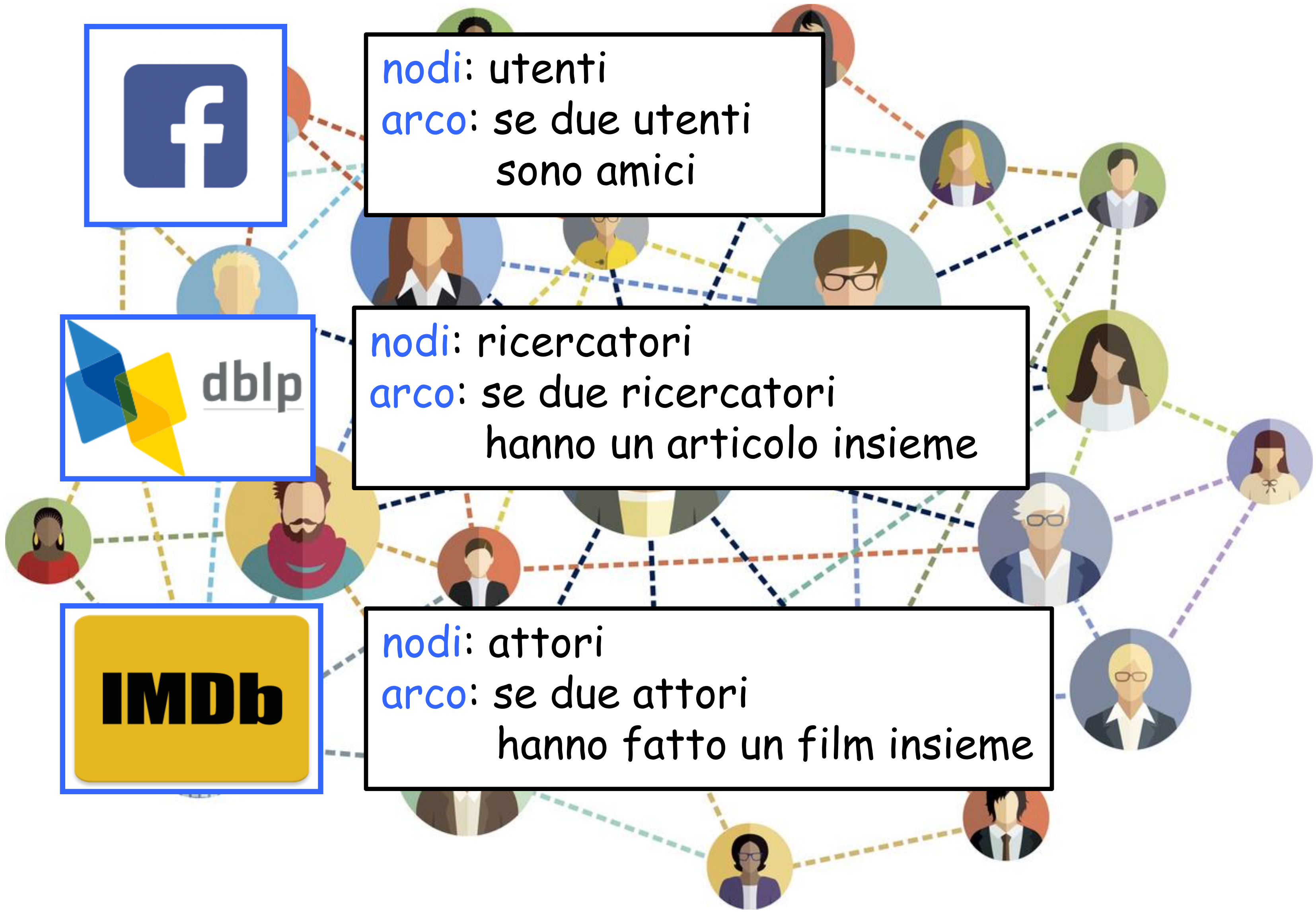
problema:
trovare il cammino minimo fra due nodi

pesi archi: lunghezze → strada più breve

pesi archi: tempo percorrenza → strada più veloce

reti sociali

reti sociali



nodi: utenti
arco: se due utenti sono amici

nodi: ricercatori
arco: se due ricercatori hanno un articolo insieme

nodi: attori
arco: se due attori hanno fatto un film insieme

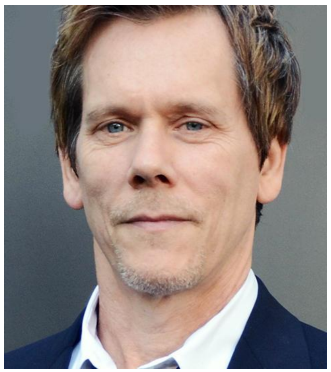
reti sociali

problemi:

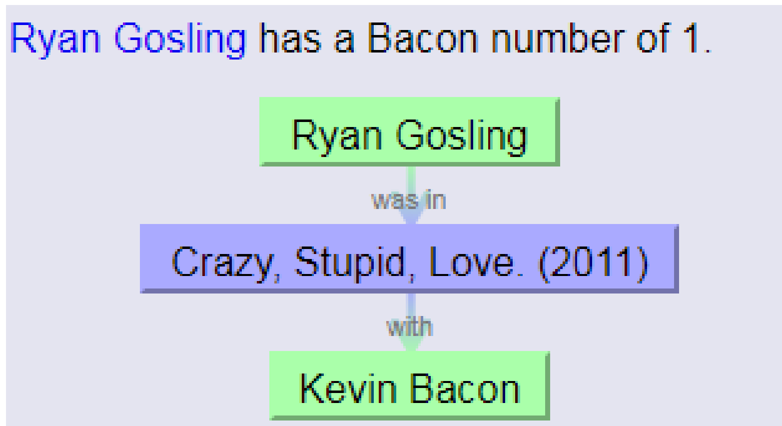
- individuare nodi “centrali”
- individuare “comunità”
- calcolo distanza fra due nodi
- trovare il diametro della rete


Kevin Bacon

Kevin Bacon Number:
distanza dal nodo Kevin Bacon

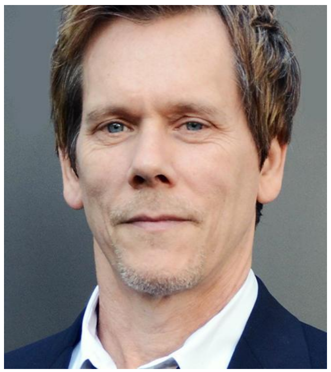


Kevin Bacon

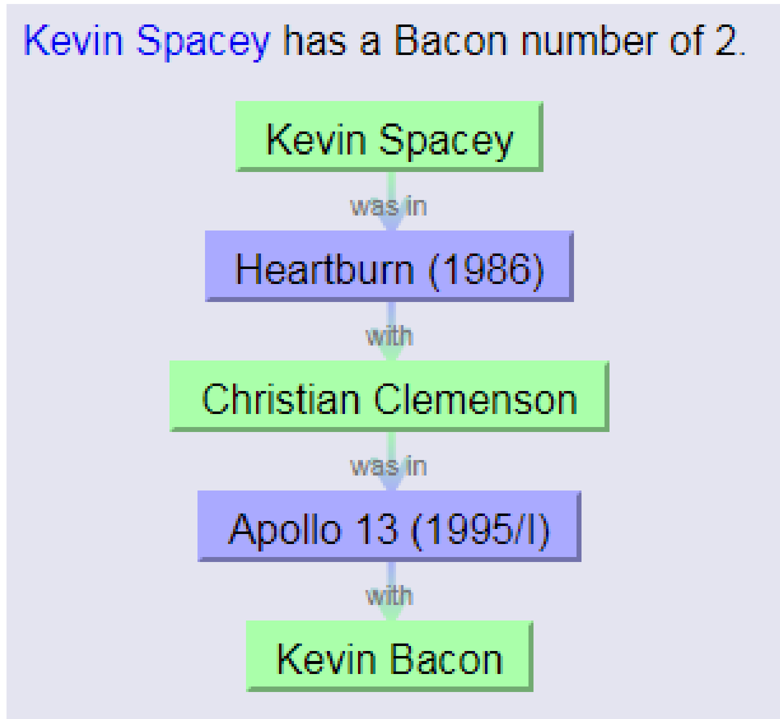


Ryan Gosling

Kevin Bacon Number:
distanza dal nodo Kevin Bacon

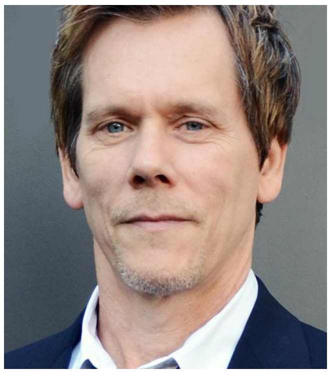


Kevin Bacon



Kevin Spacey

Kevin Bacon Number:
distanza dal nodo Kevin Bacon



Kevin Bacon

Millie bobby brown has a Bacon number of 3.

Millie Bobby Brown

was in

The XX: I Dare You (2017)

with

Ashton Sanders

was in

Straight Outta Compton (2015)

with

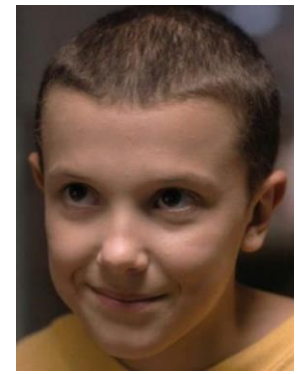
Alex Wexo

was in

A Few Good Men (1992)

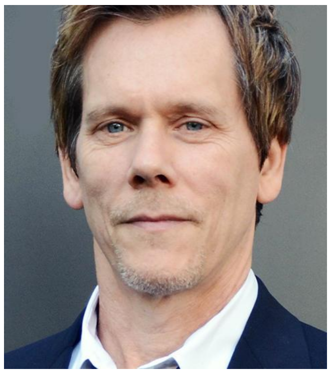
with

Kevin Bacon

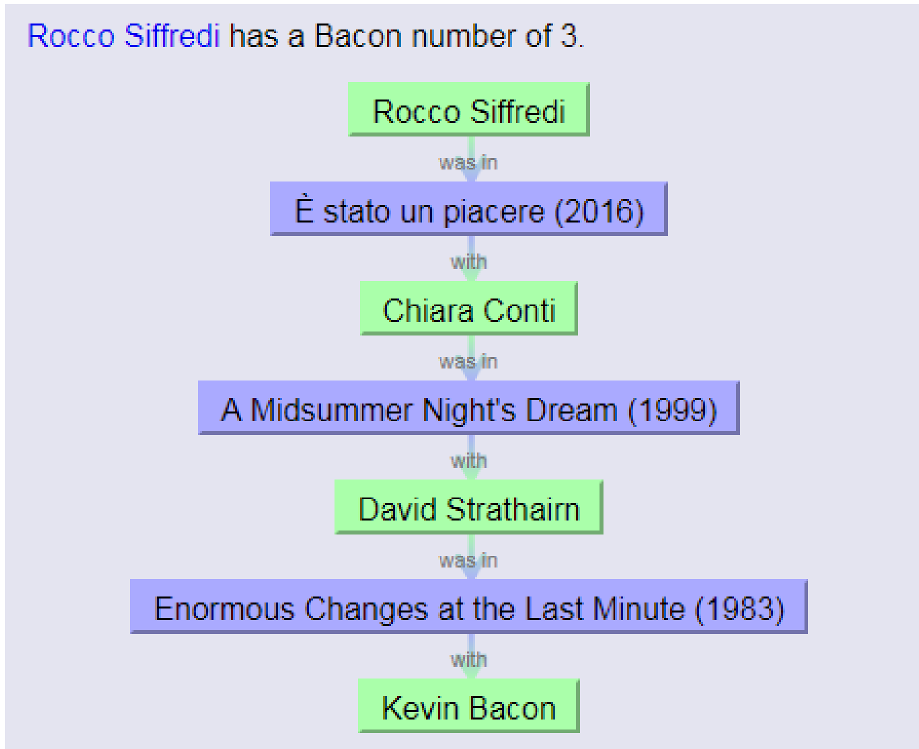


Millie Bobby Brown

Kevin Bacon Number:
distanza dal nodo Kevin Bacon

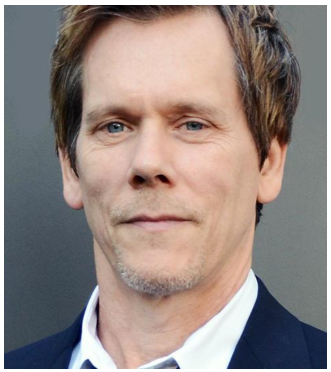


Kevin Bacon

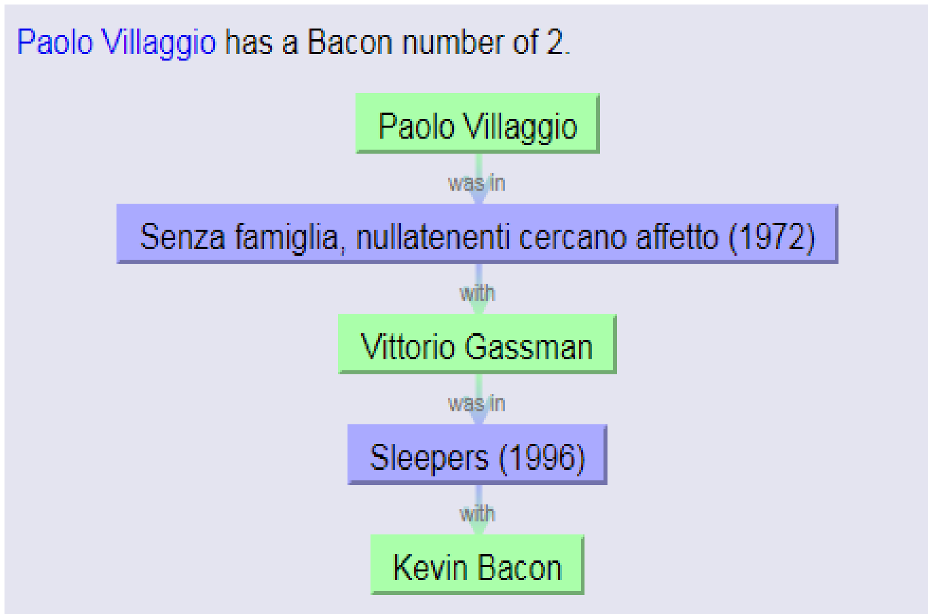


Rocco Siffredi

Kevin Bacon Number:
distanza dal nodo Kevin Bacon

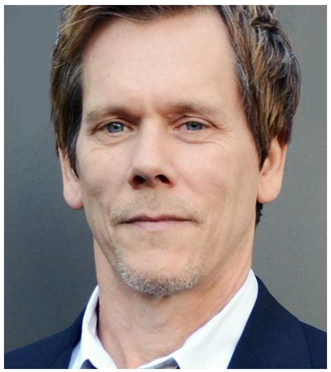


Kevin Bacon

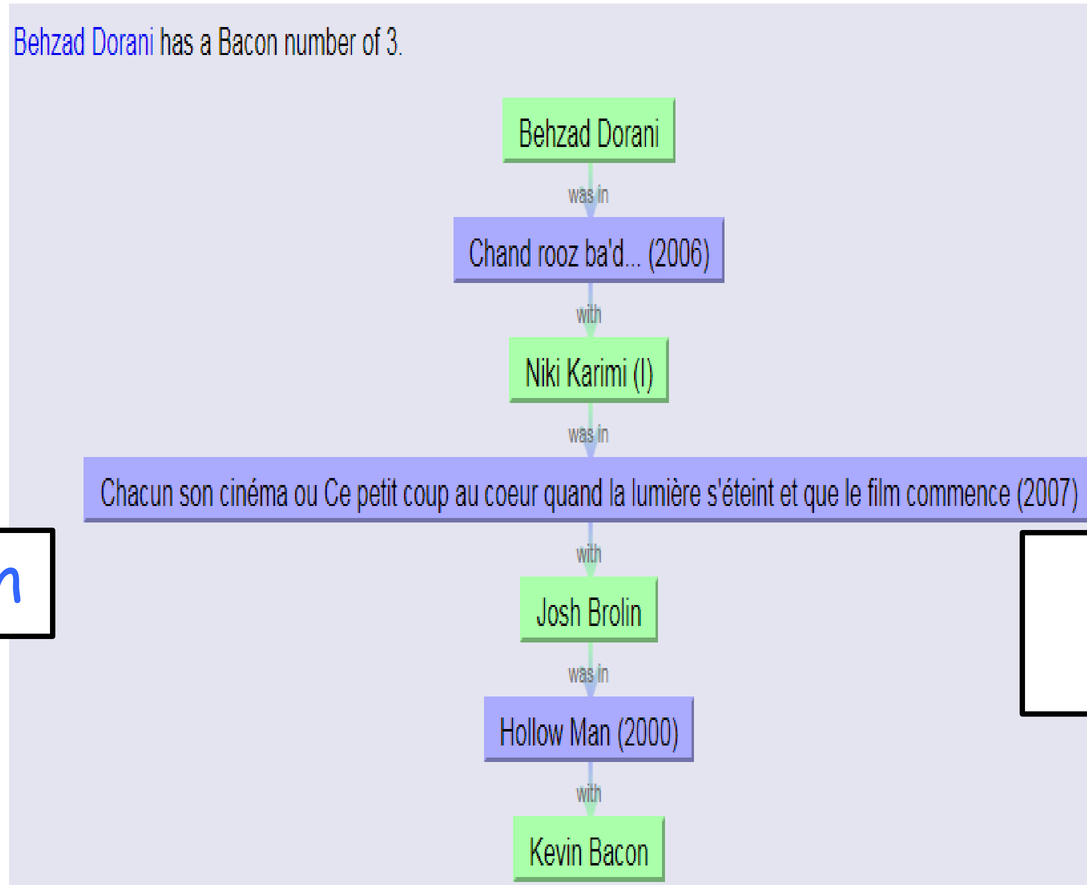


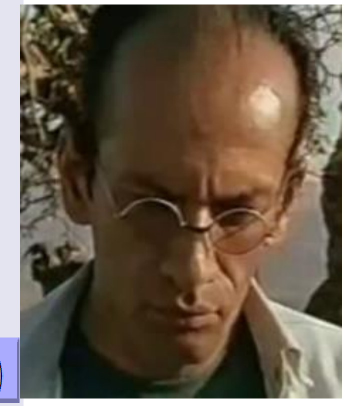
Paolo Villaggio

Kevin Bacon Number:
distanza dal nodo Kevin Bacon



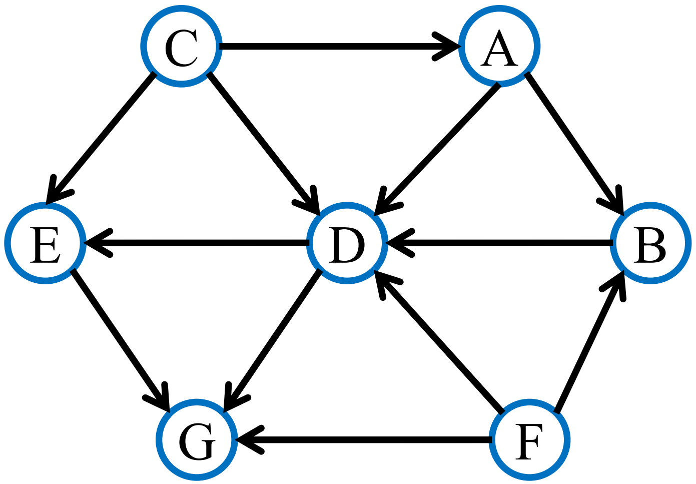
Kevin Bacon





Behzad Dorani

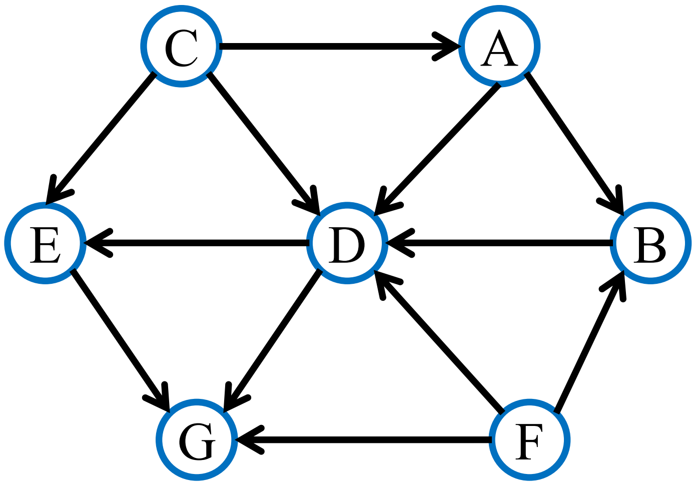
reti "delle dipendenze"



nodi: compiti da svolgere
arco (u,v): u deve essere eseguito prima di v

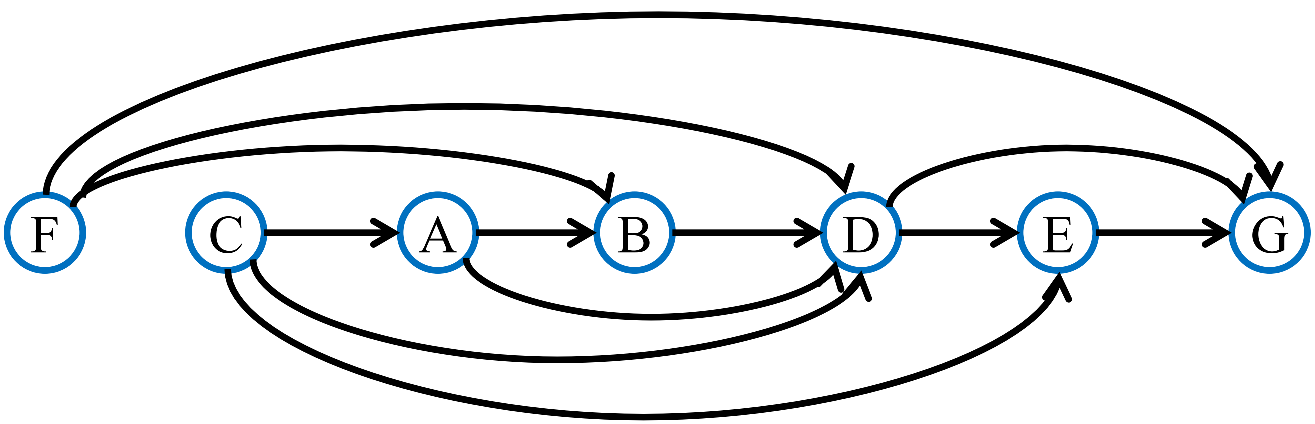
esempi:
-esami e propedeuticità
-moduli software di un progetto e dipendenze
-...

reti “delle dipendenze”

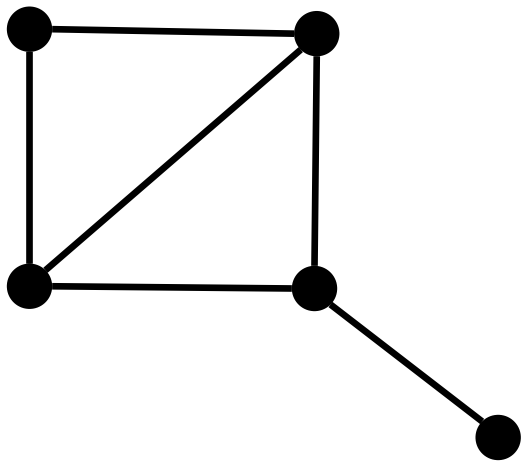


nodi: compiti da svolgere
arco (u,v): u deve essere eseguito prima di v

problema:
trovare un ordine in cui eseguire i compiti in modo da rispettare le dipendenze

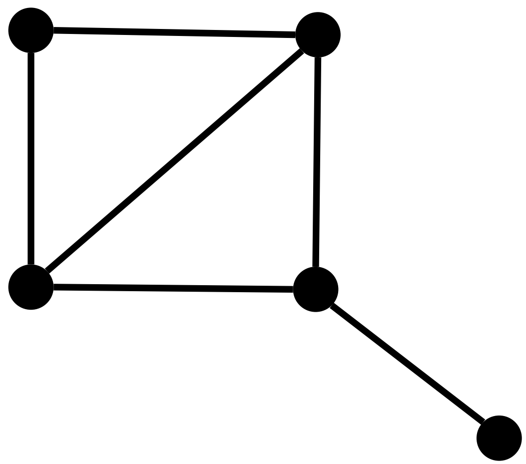


reti "delle dipendenze"



nodi: compiti da svolgere
arco (u,v): u e v non possono essere svolti insieme

esempio:
-date esami e vincoli
-certi esami non possono essere svolti lo stesso giorno (stesso anno, usano la stessa aula, ecc.)



reti "delle dipendenze"

nodi: compiti da svolgere
arco (u,v): u e v non possono essere svolti insieme

problemi:

-trovare max #di compiti eseguibili

-trovare min #di "gruppi" di compiti, t.c. compiti dello stesso gruppo possono essere eseguiti insieme

massimo insieme indipendente

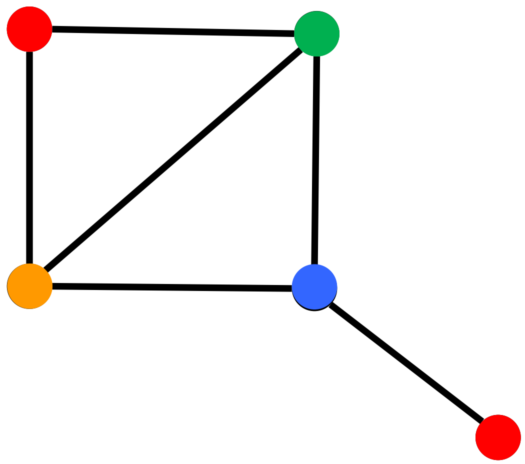
trovare l'insieme X di nodi di cardinalità massima tale che per ogni u,v in X, u e v non sono adiacenti

colorazione di un grafo

colorare i nodi del grafo risultante usando il minimo numero χ di colori in modo che due nodi adiacenti non abbiano lo stesso colore

χ : numero cromatico

un esempio



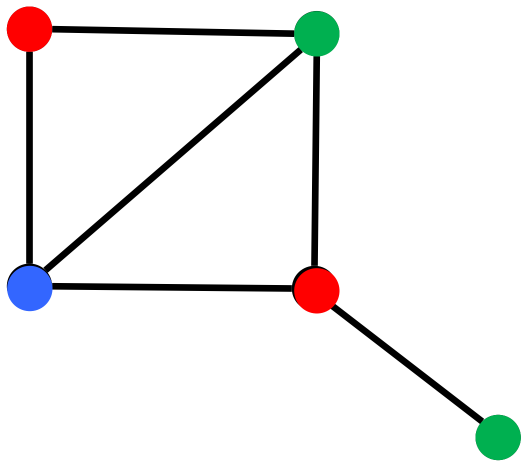
giorni disponibili:

c_1 = mercoledì
c_2 = giovedì
c_3 = venerdì
c_4 = sabato
c_5 = domenica

possiamo fare meglio?

possiamo usare 3 colori?

un esempio



giorni disponibili:

c_1 = mercoledì
c_2 = giovedì
c_3 = venerdì
c_4 = sabato
c_5 = domenica

possiamo usare 2 colori?

..no: ogni ciclio da tre (triangolo) ha bisogno di almeno tre colori!

$$\chi(G)=3$$

Esercizio

Dire quali delle seguenti figure possono essere disegnate senza staccare la penna dal foglio (e senza ripassare più volte sulla stessa linea). Motivare la risposta.