# Esercitazione
# 12 gennaio 2022

# Esercizio 1:
# Babbo Natale e le nuove tecnologie
# (Ex 1, PS 2020)

**Esercizio 1** *(Babbo Natale e le nuove tecnologie)*
Quest'anno Babbo Natale per consegnare i regali, non potendo usare la slitta perché delle associazioni animaliste gli hanno fatto causa per sfruttamento delle renne, si è dotato di robot che posso essere telecomandati a distanza. Non è stato facile cambiare le sue abitudini, ma ce l'ha quasi fatta. Gli restano infatti da consegnare solo gli ultimi due regali. Ce la farà?

La mappa del mondo è rappresentata come un grafo non orientato e non pesato $G = (V, E)$ dove i due robot si possono muovere. All'inizio i due robot, ognuno con il proprio regalo da consegnare, sono posizionati su due nodi del grafo, diciamo $s_1$ ed $s_2$, mentre le due case in cui vanno consegnati i regali si trovano su $t_1$ e $t_2$. In ogni istante di tempo Babbo Natale può effettuare la seguente mossa: ordinare ad uno dei due robot di spostarsi dal nodo su cui è a un nodo adiacente (percorrendo un arco del grafo). L'obiettivo è quindi portare il robot che si trova su $s_1$ nel nodo $t_1$ ed il robot che si trova su $s_2$ nel nodo $t_2$. Le antenne dei robot, però, soffrono di problemi di interferenze: se i robot finiscono troppo vicini l'uno con l'altro non riescono più a ricevere il segnale e quindi a muoversi. Per questo motivo si vuole che i robot in ogni istante di tempo siano sempre a distanza reciproca (nel grafo) di almeno $k$, dove $k$ è un parametro del problema. Un esempio di istanza e soluzione è fornito in Figura 2.

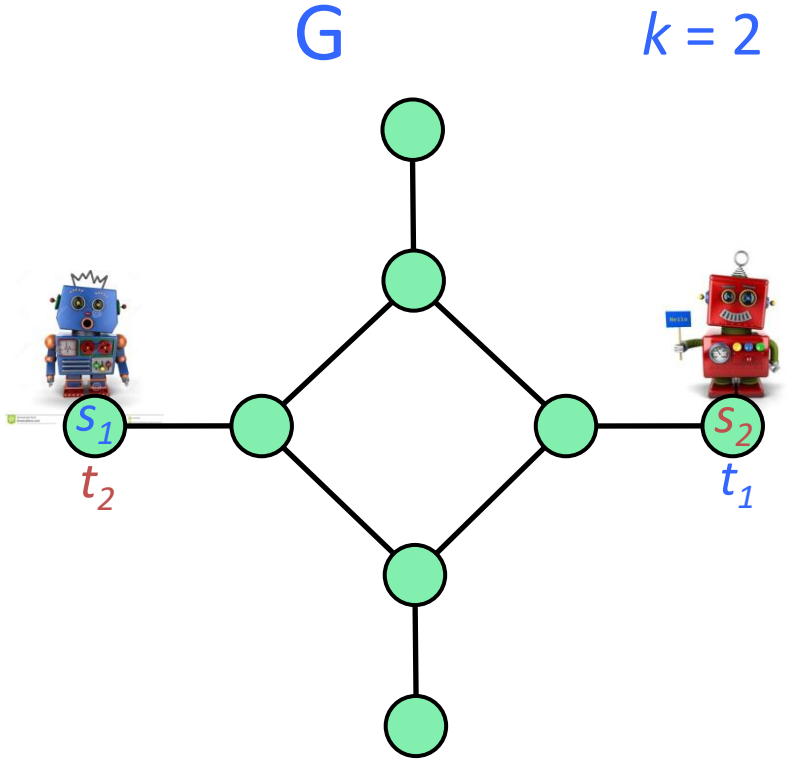
Aiutate Babbo Natale ad andare in vacanza progettando un algoritmo che trovi il numero minimo di mosse che porta i robot nelle posizioni desiderate.

obiettivo: spostare il robot blu da $s_1$ a $t_1$
& il robot rosso da $s_2$ a $t_2$

mossa: sposta un robot dal nodo corrente a uno adiacente.

vincolo: i robots devono essere sempre a distanza almeno $k$ fra loro

trovare la sequenza minima di mosse!

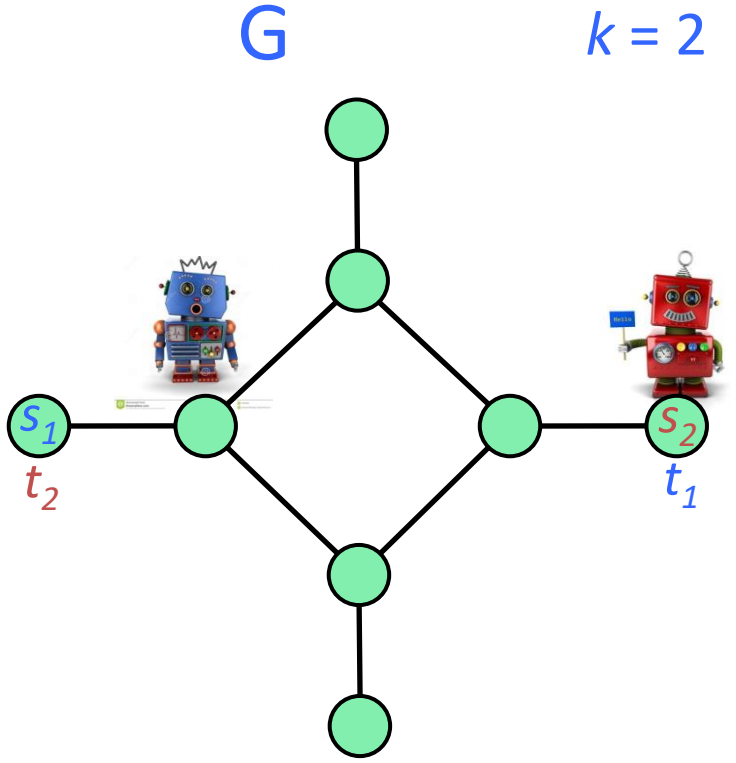


obiettivo: spostare il robot blu da $s_1$ a $t_1$
& il robot rosso da $s_2$ a $t_2$

mossa: sposta un robot dal nodo corrente a uno adiacente.

vincolo: i robots devono essere sempre a distanza almeno $k$ fra loro

trovare la sequenza minima di mosse!

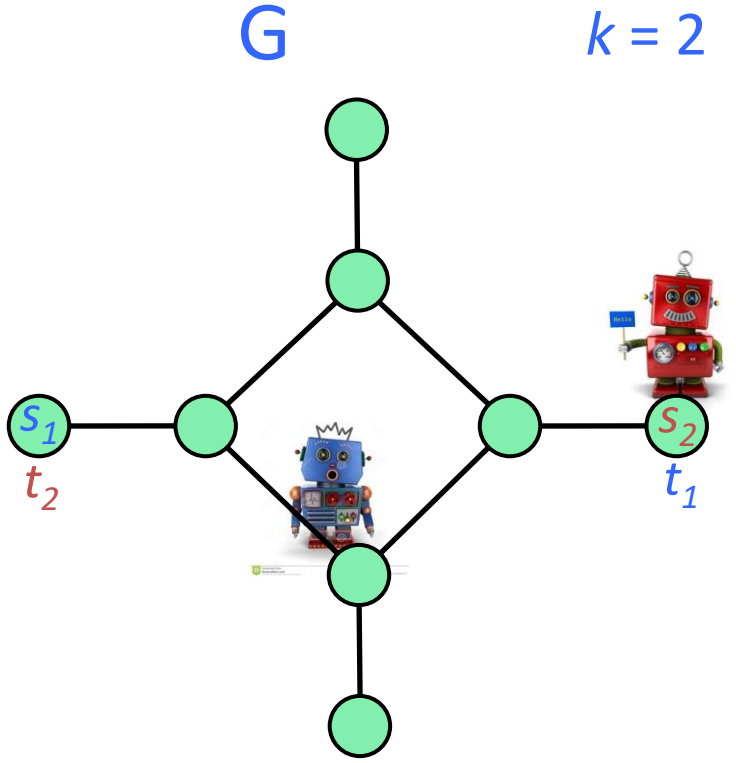


obiettivo: spostare il robot blu da $s_1$ a $t_1$
& il robot rosso da $s_2$ a $t_2$

mossa: sposta un robot dal nodo corrente a uno adiacente.

vincolo: i robots devono essere sempre a distanza almeno $k$ fra loro

trovare la sequenza minima di mosse!

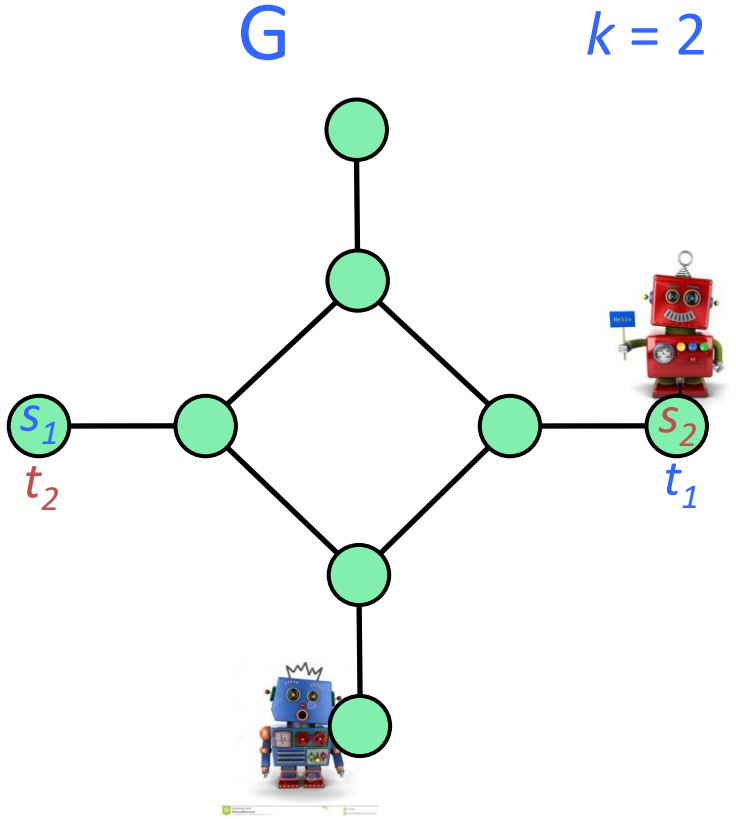


obiettivo: spostare il robot blu da $s_1$ a $t_1$
& il robot rosso da $s_2$ a $t_2$

mossa: sposta un robot dal nodo corrente a uno adiacente.

vincolo: i robots devono essere sempre a distanza almeno $k$ fra loro

trovare la sequenza minima di mosse!

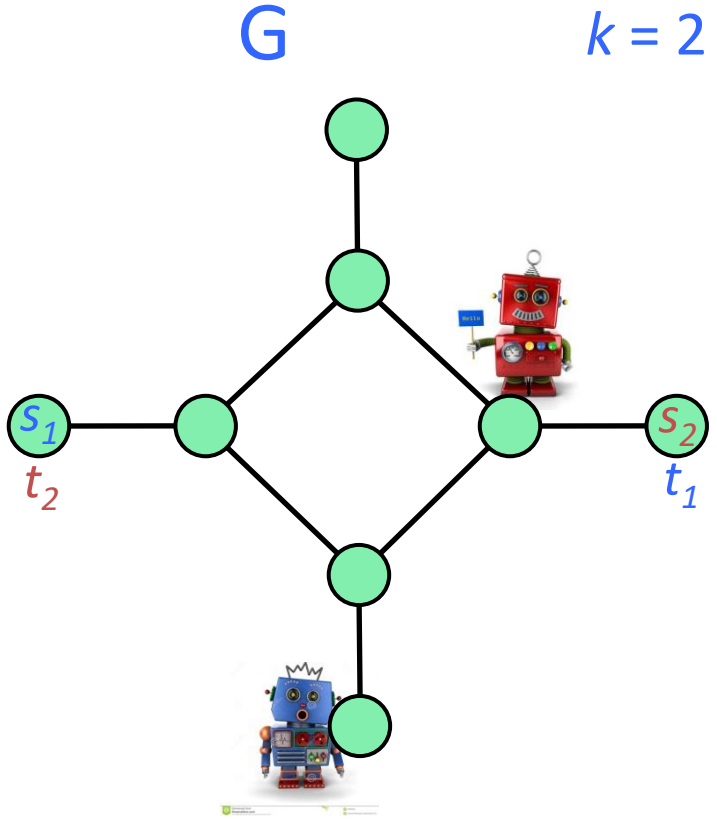


obiettivo: spostare il robot blu da $s_1$ a $t_1$
& il robot rosso da $s_2$ a $t_2$

mossa: sposta un robot dal nodo corrente a uno adiacente.

vincolo: i robots devono essere sempre a distanza almeno $k$ fra loro

trovare la sequenza minima di mosse!

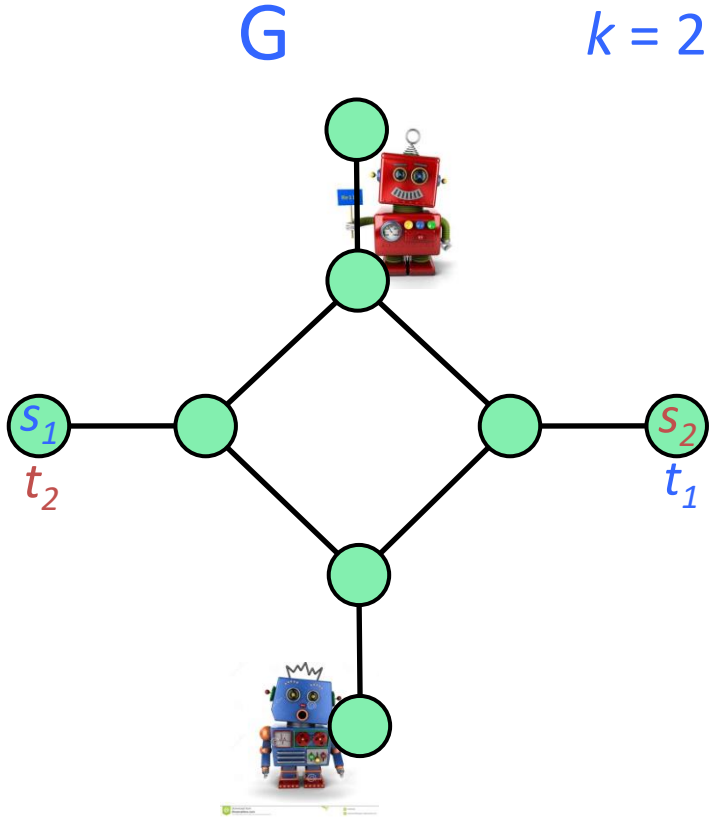


obiettivo: spostare il robot blu da $s_1$ a $t_1$
& il robot rosso da $s_2$ a $t_2$

mossa: sposta un robot dal nodo corrente a uno adiacente.

vincolo: i robots devono essere sempre a distanza almeno $k$ fra loro

trovare la sequenza minima di mosse!

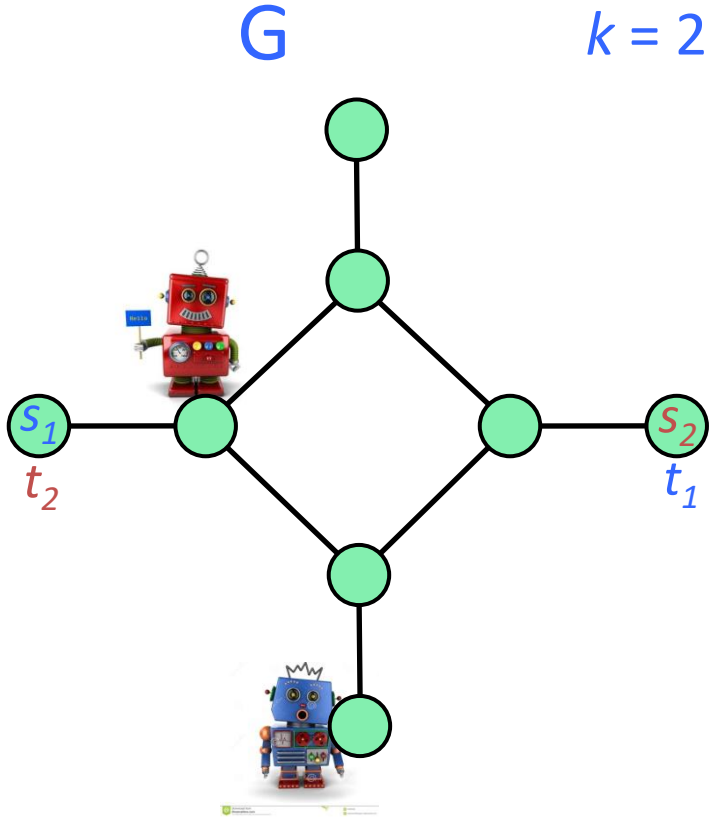


obiettivo: spostare il robot blu da $s_1$ a $t_1$
& il robot rosso da $s_2$ a $t_2$

mossa: sposta un robot dal nodo corrente a uno adiacente.

vincolo: i robots devono essere sempre a distanza almeno $k$ fra loro

trovare la sequenza minima di mosse!

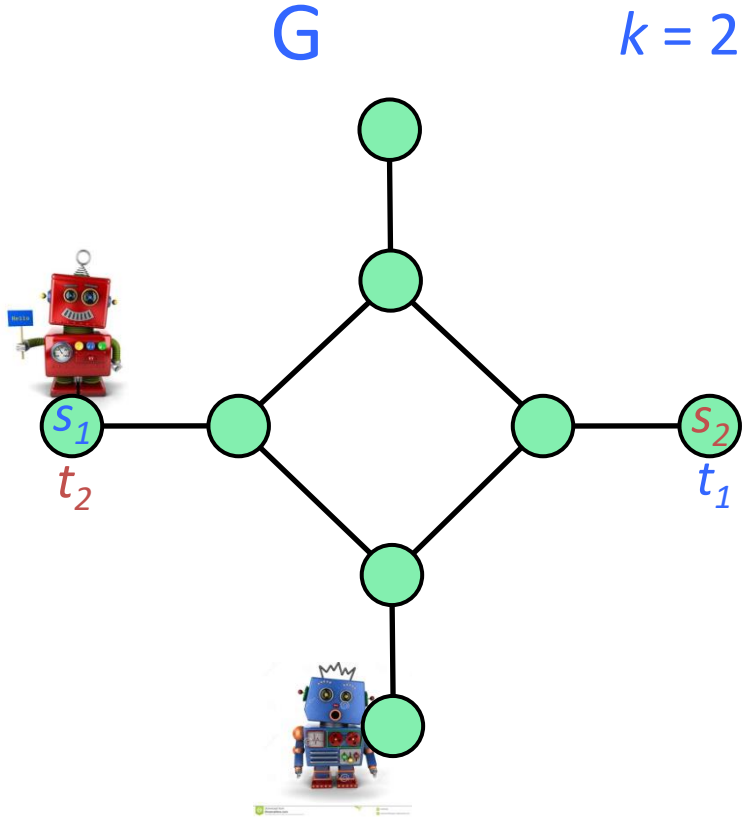


obiettivo: spostare il robot blu da $s_1$ a $t_1$
& il robot rosso da $s_2$ a $t_2$

mossa: sposta un robot dal nodo corrente a uno adiacente.

vincolo: i robots devono essere sempre a distanza almeno $k$ fra loro

trovare la sequenza minima di mosse!

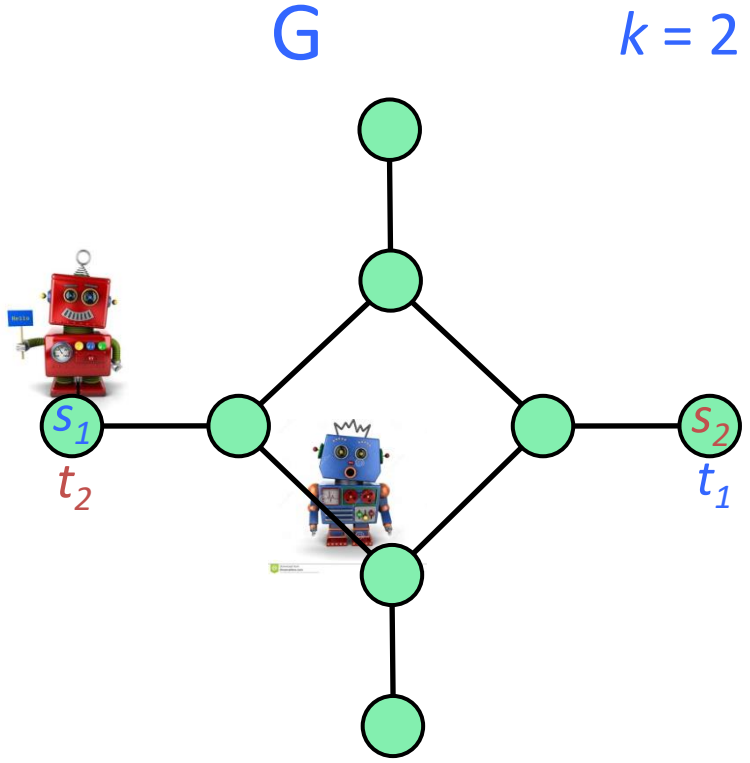


obiettivo: spostare il robot blu da $s_1$ a $t_1$
& il robot rosso da $s_2$ a $t_2$

mossa: sposta un robot dal nodo corrente a uno adiacente.

vincolo: i robots devono essere sempre a distanza almeno $k$ fra loro

trovare la sequenza minima di mosse!

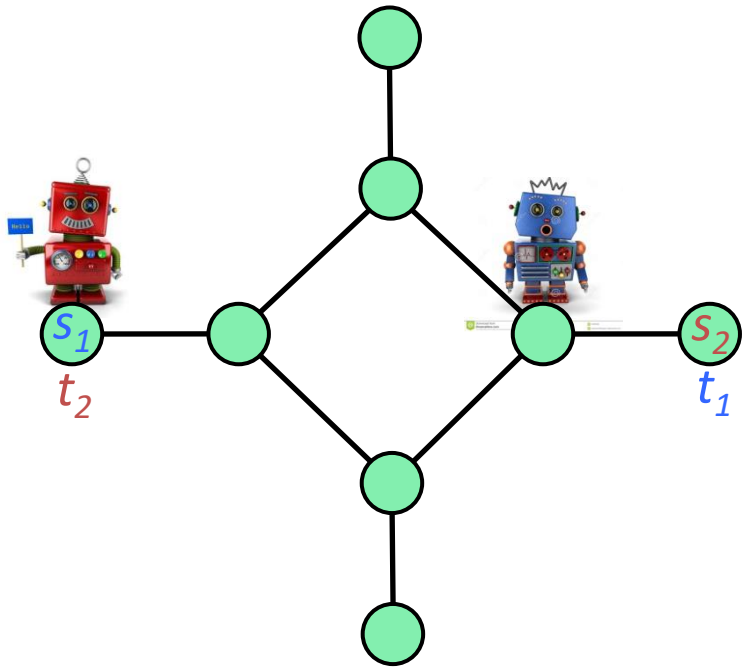


obiettivo: spostare il robot blu da $s_1$ a $t_1$
& il robot rosso da $s_2$ a $t_2$

mossa: sposta un robot dal nodo corrente a uno adiacente.

vincolo: i robots devono essere sempre a distanza almeno $k$ fra loro

trovare la sequenza minima di mosse!

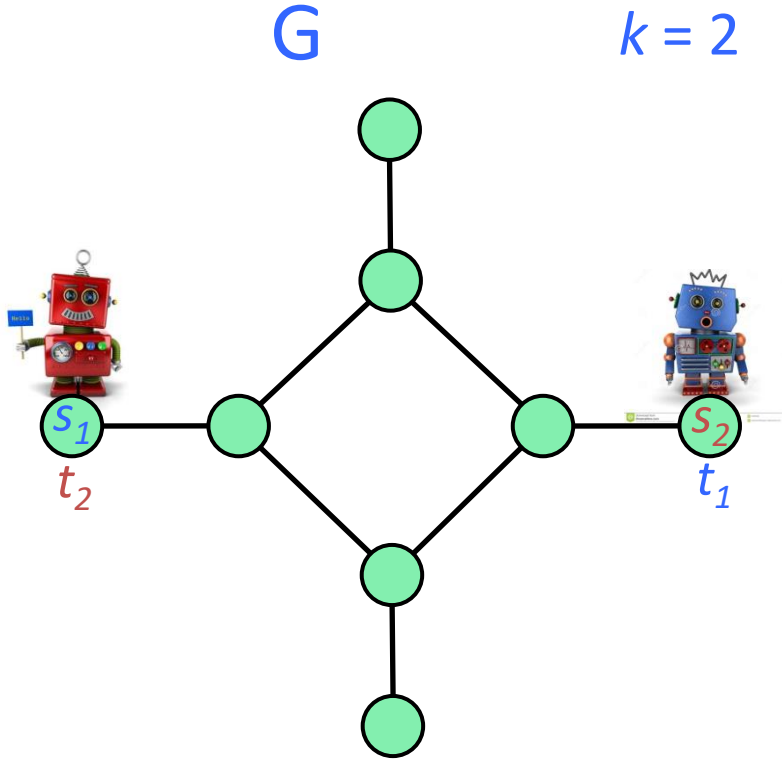


obiettivo: spostare il robot blu da $s_1$ a $t_1$
& il robot rosso da $s_2$ a $t_2$

mossa: sposta un robot dal nodo corrente a uno adiacente.

vincolo: i robots devono essere sempre a distanza almeno $k$ fra loro

trovare la sequenza minima di mosse!



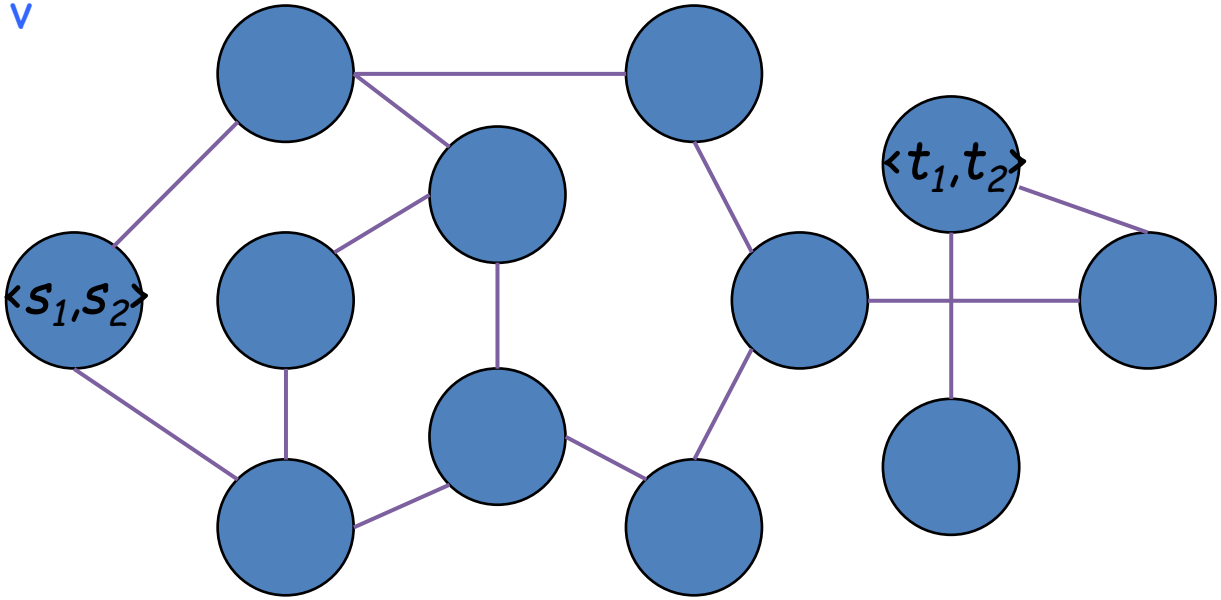
Idea: ridurre il problema al calcolo di un cammino su un opportuno grafo delle configuraizoni

definire un grafo ausiliario $G'=(V',E')$

$$V' = \{\langle u, v\rangle : u, v \in V \text{ e } d_G(u, v) \geq k\}$$

$$E' = \{(\langle u, v\rangle, \langle x, y\rangle) : (u = x \text{ e } (v, y) \in E) \text{ o } (v = y \text{ e } (u, x) \in E)$$


robot blu è su u &
robot rosso è su v




cerco il cammino minimo da $\langle s_1,s_2\rangle$ a $\langle t_1,t_2\rangle$

correttezza:

Proprietà:

Esiste una sequenza di k mosse che porta i robot nella posizione finale se e soltanto se esiste un cammino in $G'$ da $\langle s_1, s_2 \rangle$ a $\langle t_1, t_2 \rangle$ di lunghezza k.

complessità:

dimensione di $G'$:

$$|V'| = O(n^2)$$

$$|E'| \leq \sum_{\langle u,v\rangle \in V'} \delta_{G'}(\langle u,v\rangle) \leq \sum_{\langle u,v\rangle \in V'} (\delta_G(u) + \delta_G(v)) = \sum_{\langle u,v\rangle \in V'} \delta_G(u) + \sum_{\langle u,v\rangle \in V'} \delta_G(v) \leq$$

$$\sum_{u,v \in V} \delta_G(u) + \sum_{u,v \in V} \delta_G(v) \leq n \sum_{u \in V} \delta_G(u) + n \sum_{v \in V} \delta_G(v) \leq 2nm + 2nm = O(nm)$$

-costruzione di $G'$:

$O(|V'|+|E'|)$
$=O(mn)$

se trovo le distanze fra
tutte le coppie in $O(mn)$
(n visite BFS, una da ogni vertice)

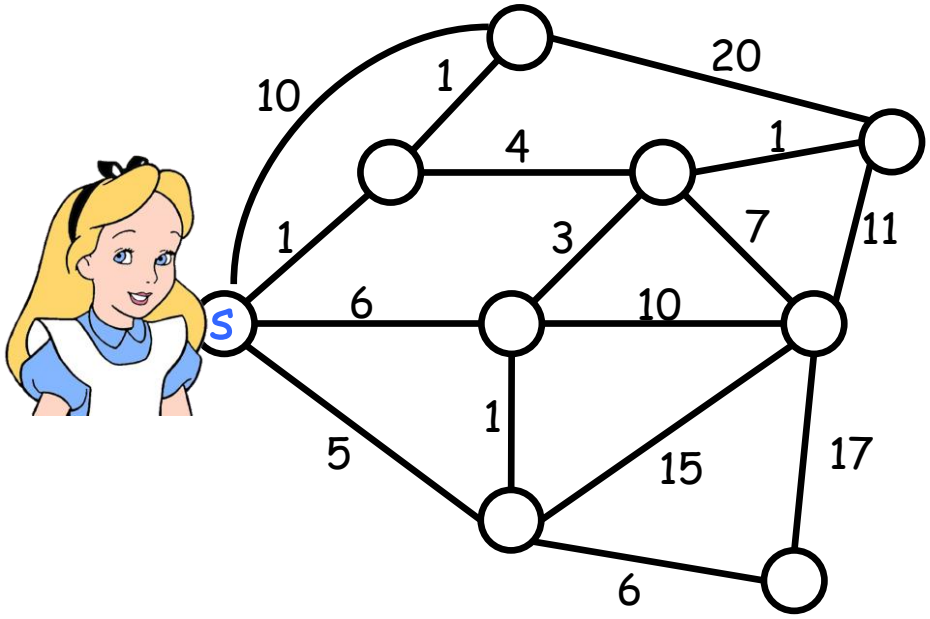
-calcolo cammino minimo in $G'$:

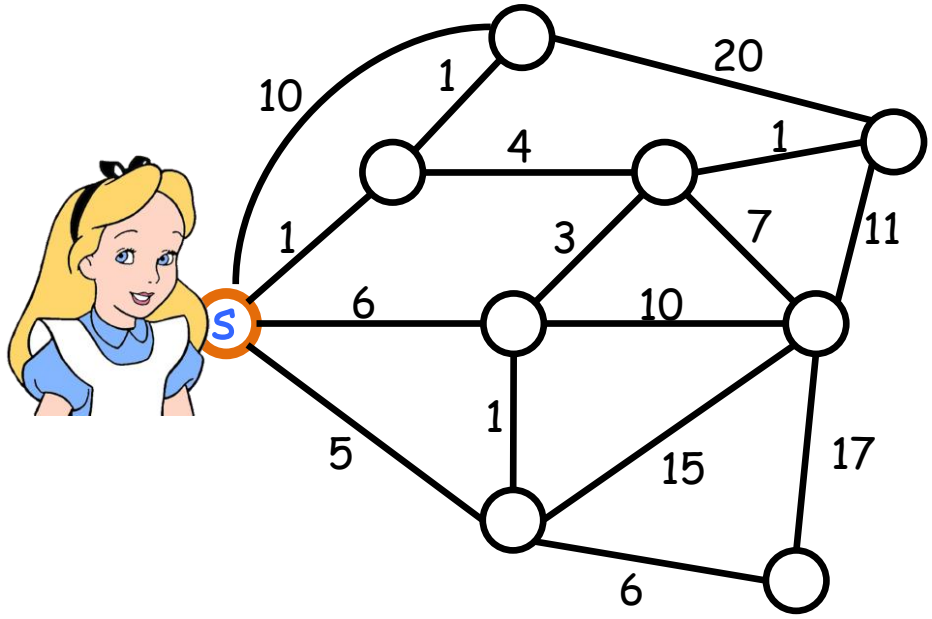
$O(|V'|+|E'|)$
$=O(n^2+mn)$
$=O(mn)$

$O(mn)$

# Esercizio 2:
# Alice diventa grande.

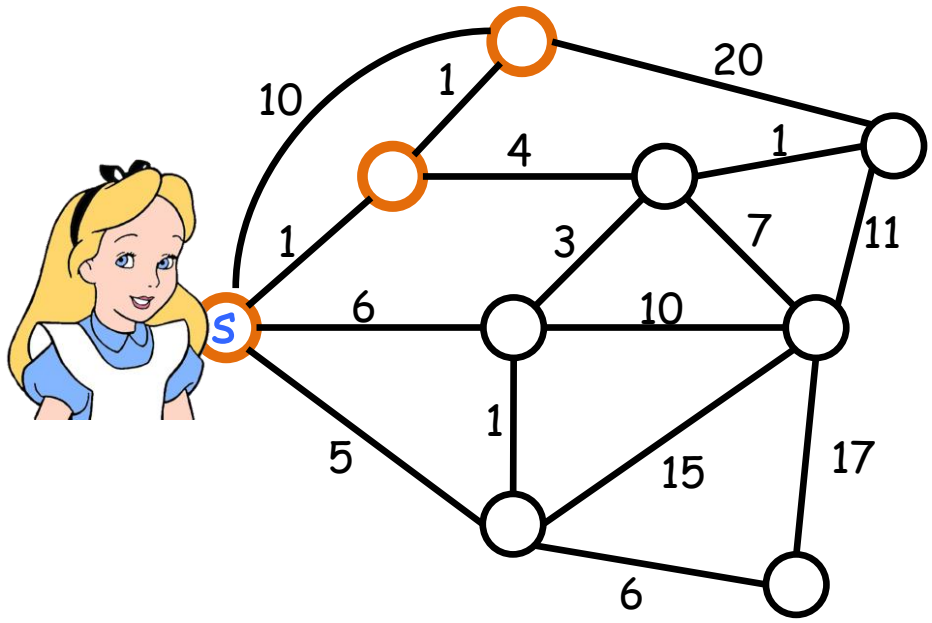
**Esercizio** Alice sta crescendo e vuole vedere il mondo, che è modellato come un grafo non orientato $G = (V, E)$ di $n$ nodi e $m$ archi, dove ogni nodo rappresenta un posto bellissimo e ogni arco $(u, v) \in E$ indica la possibilità di spostarsi da $u$ a $v$. Alice si trova sul nodo $s$ e vorrebbe visitare tutti i restanti $n-1$ posti meravigliosi. Purtroppo, però, non tutti gli archi sono percorribili a tutte le età. Ad ogni arco $e \in E$ quindi è associato un valore $w(e)$ che indica l'età minima necessaria per attraversare l'arco. Diremo che un posto $v$ è raggiungibile da Alice all'età $x$ se esiste un cammino da $s$ a $v$ composto di soli archi di peso minore o uguale a $x$. Progettate un algoritmo che calcoli l'età minima che consente ad Alice di vedere il mondo intero, ovvero la più piccola età $x$ per cui tutti i posti sono raggiungibili da Alice all'età $x$.


S
10
1
20
4
1
1
3
7
11
6
10
1
5
15
17
6

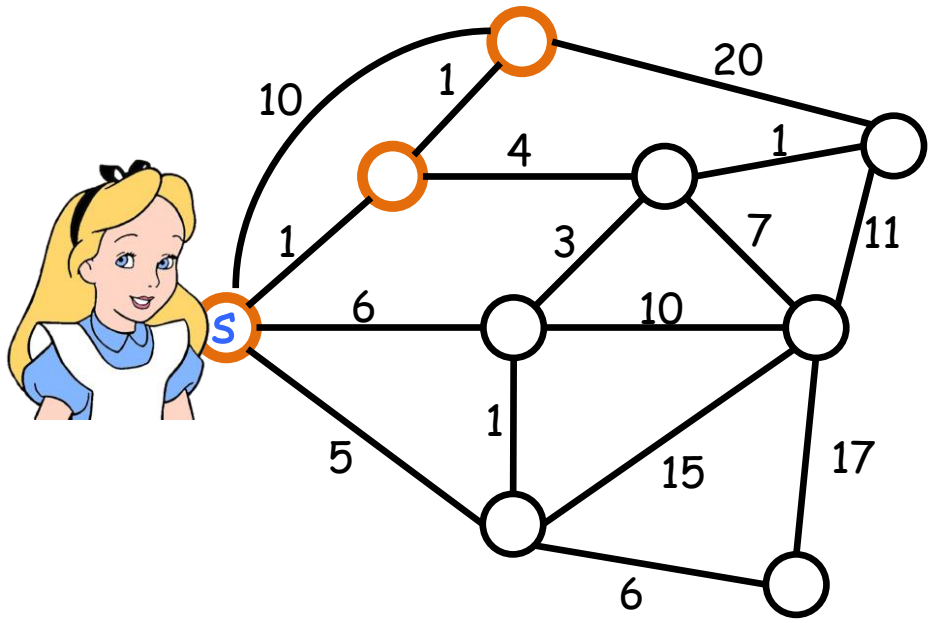



0

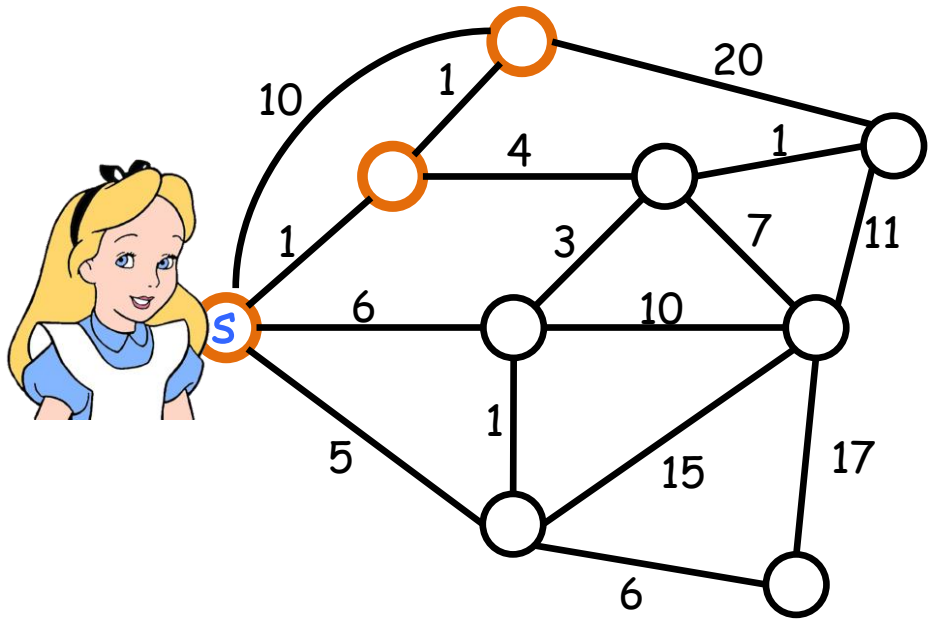
età



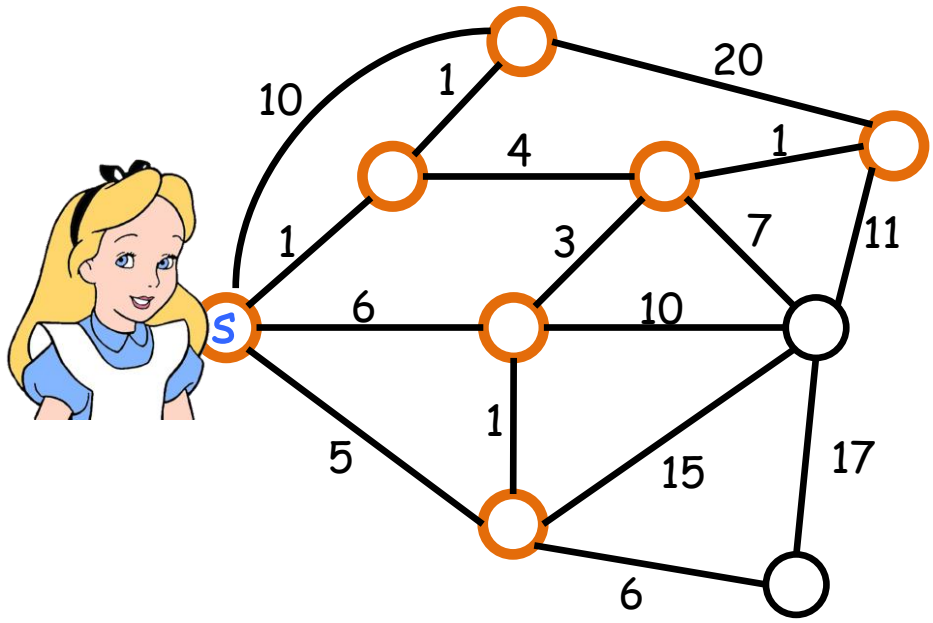

0 1 età



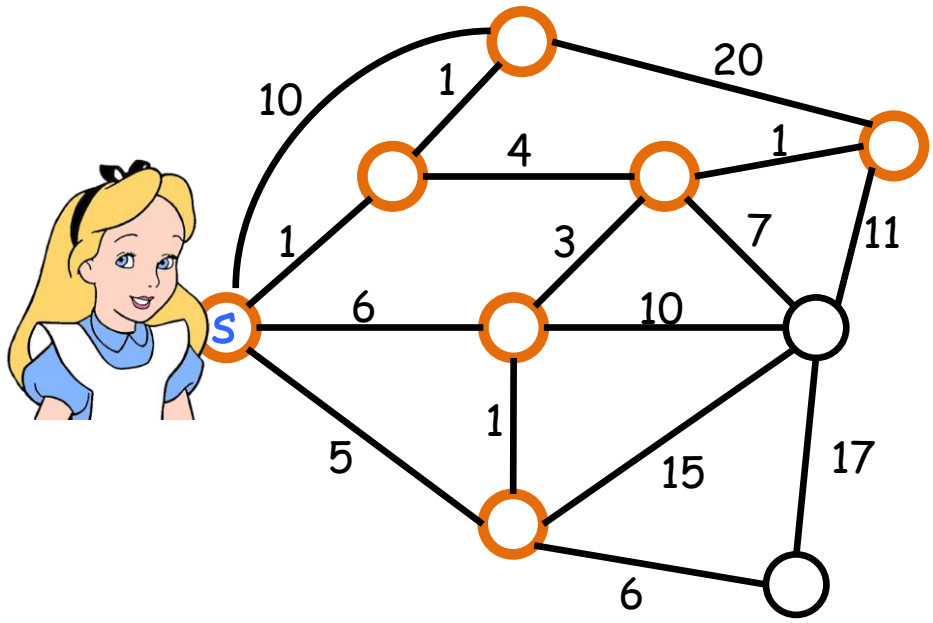

0 1 2 età



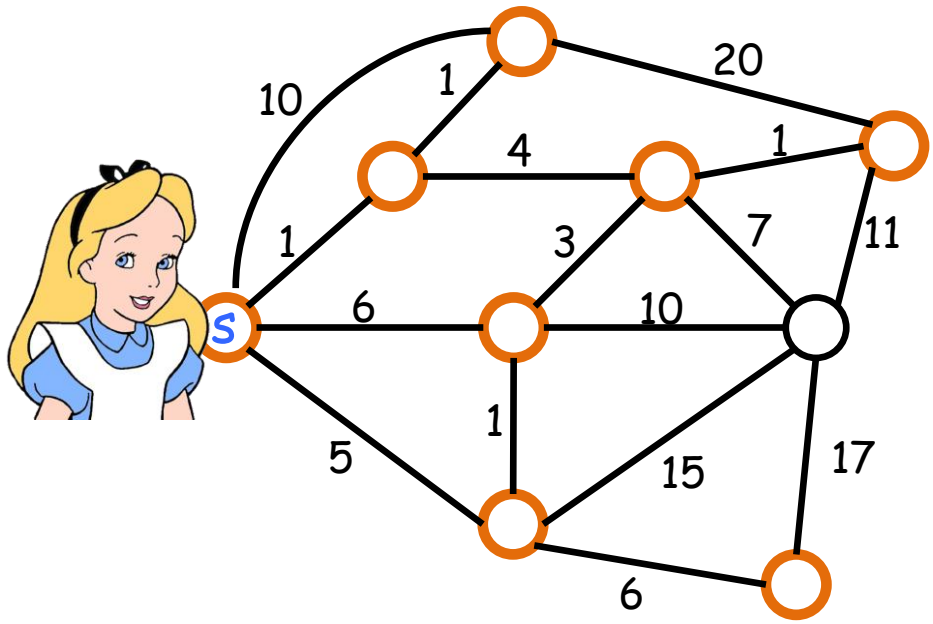

0 1 2 3 età



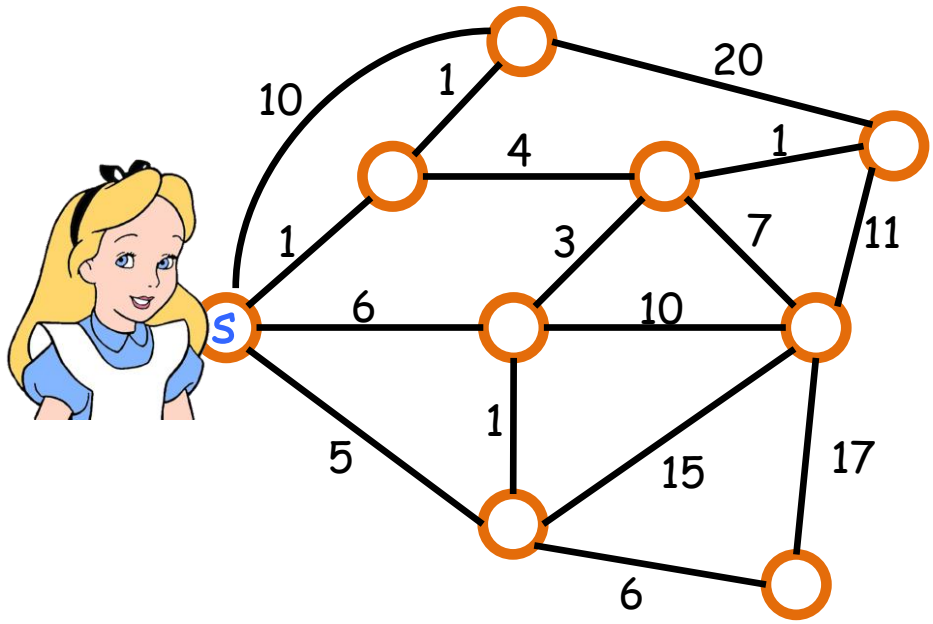

0 1 2 3 4 età



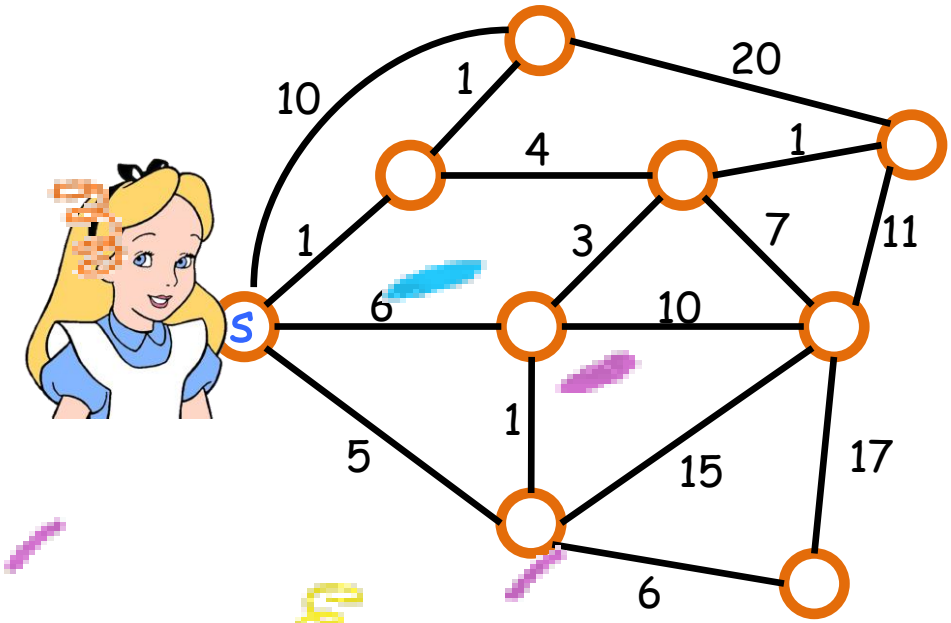

0 1 2 3 4 5 età

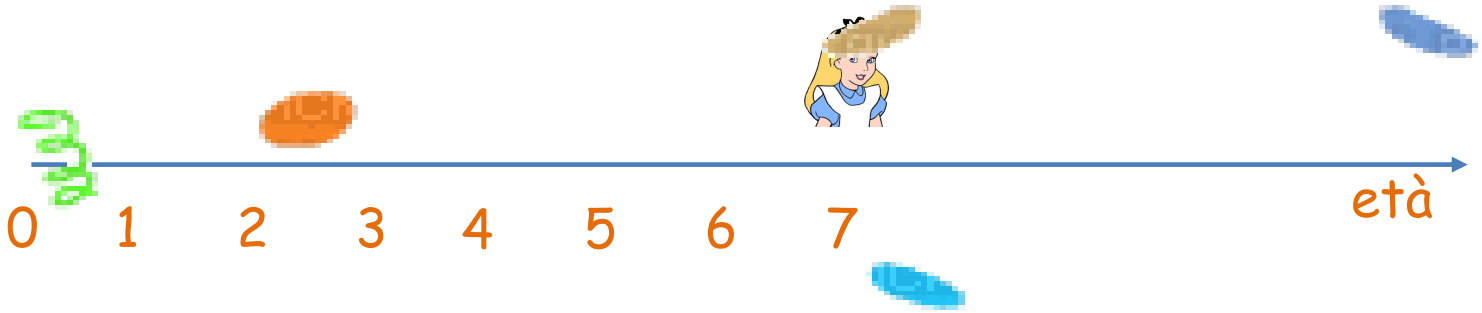



0 1 2 3 4 5 6 età




0 1 2 3 4 5 6 7 età


10
1
20
4
1
1
3
7
11
S
6
10
1
5
15
17
6


0
1
2
3
4
5
6
7
età

idea: far crescere l'insieme degli archi utilizzabili con l'età

Considera gli archi di $G$ ordinati in ordine crescente di peso:

$$\underbrace{e_1, e_2, e_3, \ldots \quad \ldots \quad e_i}_{E_i} \quad \ldots \quad e_{m-1}, e_m$$

$G_i=(V,E_i=\{e_1, e_2,\ldots, e_i\})$

osservazione: se $G_i$ è connesso allora Alice può vedere il mondo intero all'età di $w(e_i)$.

goal: trovare il minimo i per cui $G_i$ è connesso

corretto?

sì: per oss. di prima

complessità?

SearchAge(G)

1. ordina gli archi E di G in ordine crescente di peso e siano essi $e_1,e_2,...e_m$. } $O(m \log m)=O(m \log n)$
2. **for** i=1 to m
   - costruisci $G_i=(V,\{e_1,e_2,...e_i\})$
   - **if** $G_i$ è connesso **then return** $w(e_i)$ } $O(m+n)$
3. **return** "nessuna età"

$O(m(m+n)=O(m^2)$

posso fare meglio?

cerco l'indice i usando l'approccio della ricerca binaria!

corretto?

sì

complessità?

SearchAge(G)

1. **if** G non è connesso **then return** "nessuna età"
2. ordina gli archi E di G in ordine crescente di peso e siano essi $e_1,e_2,...e_m$.
3. **return** BinarySearchAge($G$,1,$m$)

assume sempre $G_j$ connesso

BinarySearchAge($G$, i, j)

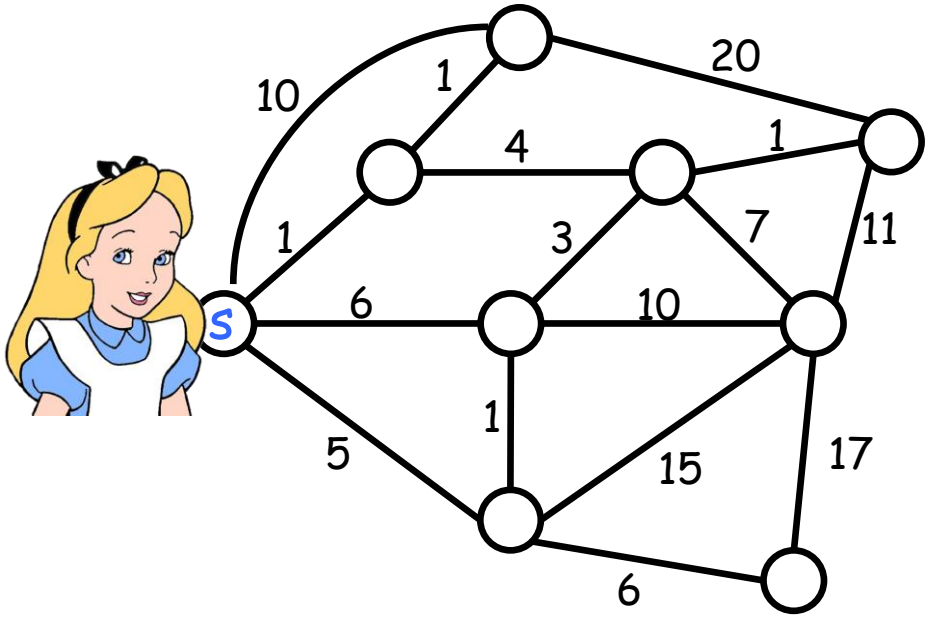
1. **if** (i=j) **then return** $w(e_i)$
2. h=$\lfloor$ (i+j)/2$\rfloor$
3. costruisci $G_h$=(V,{$e_1,e_2,...e_h$})
4. **if** $G_h$ è connesso
   **then return** BinarySearch($G$, i, h)
   **else return** BinarySearch($G$, h+1, j)

BinarySeachAge guarda $O(\log m)=O(\log n)$ grafi $G_h$ per ognuno dei quali spende tempo $O(m+n)$

⇒ $O(m \log n)$

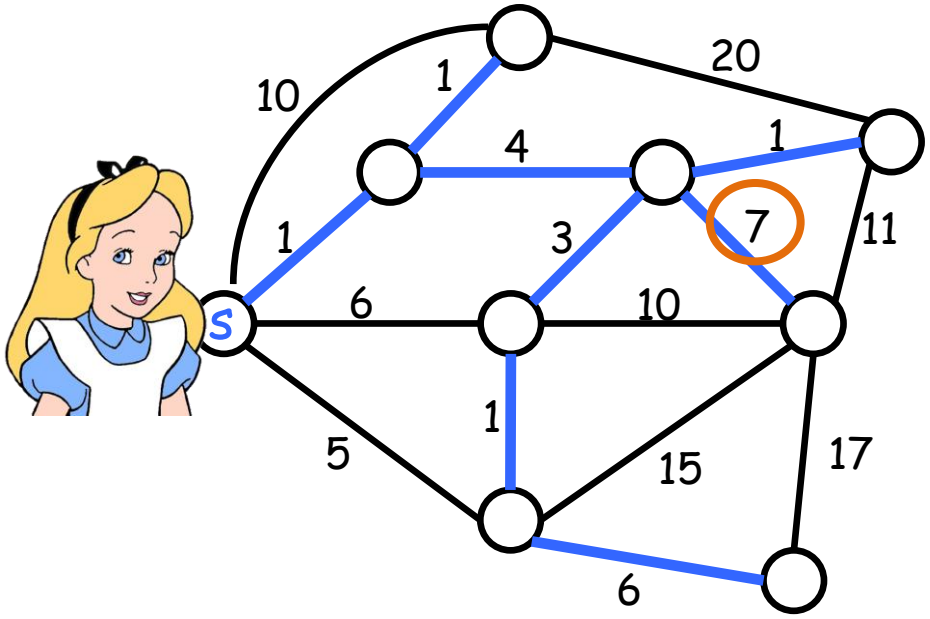
# un'altra soluzione

(attenzione: spoiler su ASD modulo 2!)



un'altra soluzione

(attenzione: spoiler su ASD modulo 2!)




calcola il Minimum Spanning Tree T e restituisci il peso dell'arco più pesante di T

# Qualche altro esercizio su grafi

## Problema (mandare la pedina in buca)

Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato e non pesato, dove ogni arco $e \in E$ ha uno fra tre possibili colori $\{1, 2, 3\}$, e sia $U \subseteq V$ un sottoinsieme di nodi *speciali*. Su un nodo $s \in V$ è posizionata una pedina, inizialmente di colore 1. Il vostro obiettivo è quello di portare la pedina su un nodo *target* $t \in V$. Per far ciò potete usare le seguenti *mosse*:

- `sposta`: se la pedina si trova sul nodo $u \in V$, ha colore $i$, e c'è un arco $(u, v) \in E$ di colore $i$, allora potete spostare la pedina da $u$ a $v$. Il colore della pedina resta $i$;
- `cambia colore`: se la pedina si trova su un nodo speciale $u \in U$, potete ricolorare la pedina del colore che volete. La pedina in questo caso, dopo la mossa, resta sul nodo $u$.

Progettate un algoritmo efficiente che trova, se ne esiste una, la sequenza più corta di mosse che risolve l'istanza del gioco.

## Problema (una storia romantica di un amore contrastato)

Romeo e Giulietta si amano e vogliono incontrarsi il prima possibile ma l'amore, si sa, è una cosa difficile. Il mondo in cui vivono è modellato come un grafo non orientato e pesato $G = (V, E, w)$ in cui ad ogni arco $e \in E$ è associato un peso $w(e)$. Romeo vive in $s \in V$ mentre Giulietta in $t \in V$. Gli archi del grafo, che possono essere utilizzati per muoversi da un nodo verso un suo vicino, possono essere di tue tipi, e quindi $E$ è partizionato in due insiemi $E_A$ e $E_B$. Gli archi in $E_A$ sono relativi a tratte che possono essere percorse soltanto in aereo (la compagnia che gestisce i voli è la Montecchi Airlines), mentre gli archi in $E_B$ sono tratte percorribili solo in bus (corse erogate dalla Capuleti Transporti S.p.a.). In ogni caso il peso di un arco rappresenta il tempo di percorrenza della tratta. Ora, Romeo e Giulietta possono muoversi *contemporaneamente* nel grafo e possono incontrarsi in un qualunque nodo. Però, come in tutti gli amori contrastati che si rispettino, c'è un problema: Romeo soffre di mal d'auto e non può prendere i bus, mentre Giulietta ha paura di volare. Che fare? Riuscite ad aiutarli?

Progettate un algoritmo (il più efficiente possibile) che calcoli le strade che i nostri eroi devo seguire per incontrarsi il prima possibile.

**Problema** Una rete stradale di una città è modellata come un grafo non orientato e non pesato $G = (V, E)$. Dovete portare un pacco ad un cliente che si trova nel nodo $t$. Il pacco inizialmente è depositato in un magazzino che si trova nel nodo $s$. Avete a disposizione due droni, posizionati inizialmente nei nodi $d_1$ e $d_2$. I droni sono perfettamente uguali. Ogni drone può:

- spostarsi dal nodo in cui si trova verso un nodo adiacente usando un arco del grafo;
- caricare il pacco, se il drone e il pacco si trovano nello stesso nodo;
- depositare il pacco su un certo nodo $u$, se il drone si trova nel nodo $u$.

Per questioni di batteria, i droni possono percorrere una distanza di al più $k$ archi, mentre caricare e scaricare il pacco non consuma energia. Si progetti un algoritmo più efficiente possibile che decida se c'è un modo per portare il pacco a destinazione.