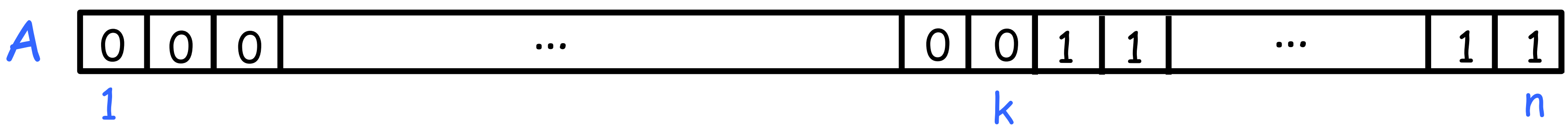
Esercitazione
1 dicembre 2022

problema 1

Progettare un algoritmo efficiente per il seguente problema.

Input: vettore ordinato $A[1:n]$ di n bit, ovvero $A[i] \in \{0,1\}$

Output: l'indice k dell'ultimo 0 (numero di zeri)



goal 1: $O(\log n)$

idea: uso l'approccio delle ricerca binaria.

Algorithm 2: `UltimoZeroRic`(A, i, j)

if $i > j$ **then**
  return -1
$m = \lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor$;
if $A[m] = 0$ e $A[m+1] = 1$ **then**
  return m
if $A[m] = 1$ **then**
  return `UltimoZeroRic`$(A, i, m-1)$
else
  return `UltimoZeroRic`$(A, m+1, j)$

complessità?

O(log n)

Algorithm 1: `UltimoZero`(A)

$n =$ lunghezza di A ;
if $A[n] = 0$ **then**
  return n
else
  return `UltimoZeroRic`$(A, 1, n-1)$

Progettare un algoritmo efficiente per il seguente problema.

Input: vettore ordinato $A[1:n]$ di n bit, ovvero $A[i] \in \{0,1\}$

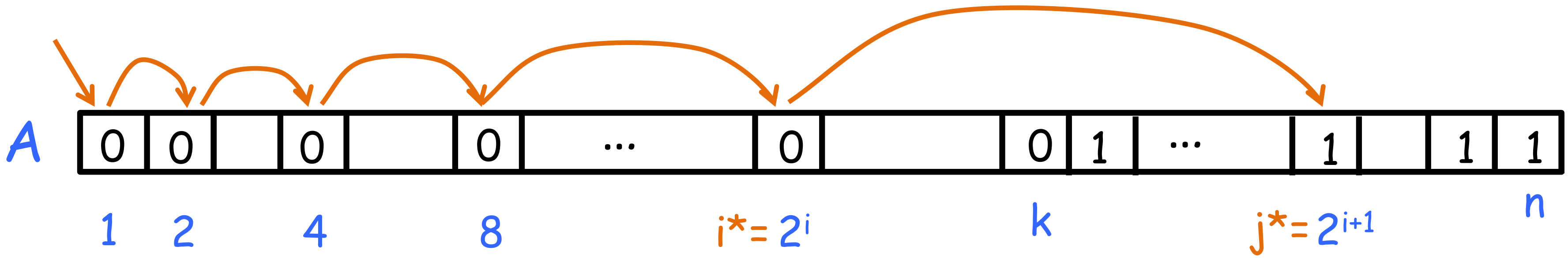
Output: l'indice k dell'ultimo 0 (numero di zeri)

A	0	0	0	…	0	0	1	1	…	1	1
	1					k					n

goal 1: $O(\log n)$

goal 2: $O(\log k)$ ← mai peggiore

idea



idea: trovare in $O(\log k)$ due indici i* e j* tale che:

- $A[i^*]=0$ e $A[j^*]=1$

- $|j^*-i^*|=O(k)$ su cui fare ricerca binaria in tempo $O(\log k)$

analisi:

Ho guardato $i+2=O(i)$ elementi

- $2^i \leq k$ $\Longrightarrow$ $i \leq \log_2 k$

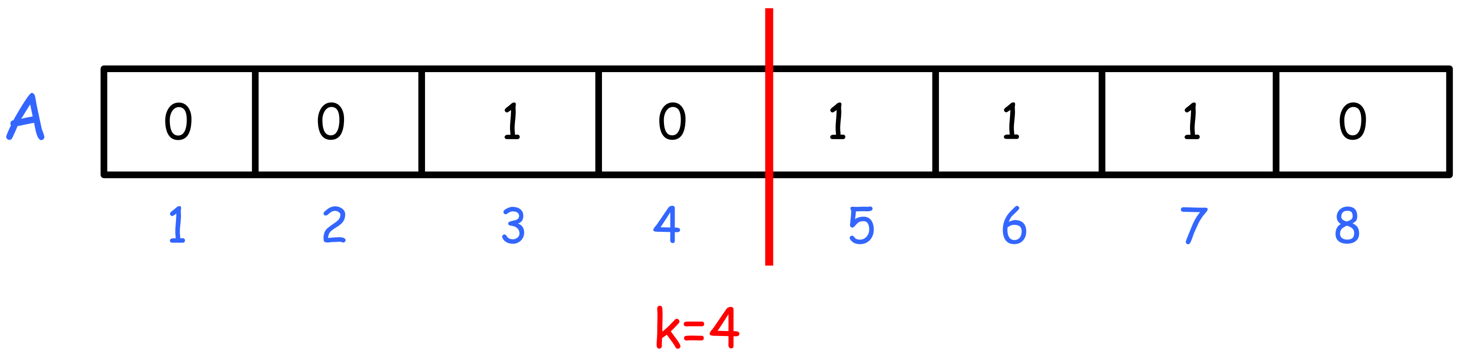
- $j^*-i^*= 2^{i+1} -2^i = 2^i \leq k$

$\Longrightarrow$ $A[i^*;j^*]$ ha j^*-i^*+1 elementi $\Longrightarrow$ $O(k)$ elementi problema 2

Progettare un algoritmo efficiente per il seguente problema.

Input: vettore $A[1:n]$ di n bit, ovvero $A[i] \in \{0,1\}$

Output: un indice k tale che #di zeri in $A[1:k]$ = #di uni in $A[k+1:n]$



goal: $O(n)$

idea: calcolare in tempo O(n) due vettori di dimensione n:

-Z[1:n], con Z[j]=#di zeri in A[1:j]

-U[1:n], con U[j]=#di uni in A[j+1:n]

Calcolo Z[] e U[]

if A[1]=0 **then** Z[1]=1 **else** Z[1]=0

for j=2 to n **do**

    if A[j]=0 **then** Z[j]=Z[j-1]+1

        else Z[j]=Z[j-1]

U[n]=0

for j=n-1 down to 1 **do**

    U[j]=U[j+1]+A[j+1]

A	0	0	1	0	1	1	1	0
	1	2	3	4	5	6	7	8
Z	1	2	2	3	3	3	3	4
	1	2	3	4	5	6	7	8
U	4	4	3	3	2	1	0	0
	1	2	3	4	5	6	7	8

l’algoritmo

Taglia(A)

if A[1]=0 **then** Z[1]=1 **else** Z[1]=0

for j=2 to n **do**

  if A[j]=0 **then** Z[j]=Z[j-1]+1

    else Z[j]=Z[j-1]

U[n]=0

for j=n-1 down to 1 **do**

  U[j]=U[j+1]+A[j+1]

for j=1 to n **do**

  if Z[j]=U[j] **then return** j

return 0

complessità?

$O(n)$

A	0	0	1	0	1	1	1	0
	1	2	3	4	5	6	7	8

un altro algoritmo

```
Taglia(A)
cont=0
for i=1 to n do
   cont=cont+A[i]
return cont
```

complessità?

$O(n)$

correttezza?

correttezza

N: #di uni in A

Δ_j: (#di uni in A[j+1:n])-(#di zeri in A[1:j]) [=U[j] -Z[j]]

goal: voglio un indice k tale che Δ_k=0

Claim: $\Delta_N = 0$

dim

$\Delta_0 = N$ $\qquad\qquad$ $\Delta_j = \Delta_{j-1} - 1$

A	0	0	1	0	1	1	1	0
	1	2	3	4	5	6	7	8

↑

j=0

Δ_0 =4

correttezza

N: #di uni in A

Δ_j: (#di uni in A[j+1:n])-(#di zeri in A[1:j]) [=U[j] -Z[j]]

goal: voglio un indice k tale che Δ_k=0

Claim: $\Delta_N = 0$

dim

$\Delta_0 = N$

$\Delta_j = \Delta_{j-1} - 1$

A	0	0	1	0	1	1	1	0
	1	2	3	4	5	6	7	8

j=1

$\Delta_1 = 3$

correttezza

N: #di uni in A

Δ_j: (#di uni in A[j+1:n])-(#di zeri in A[1:j]) [=U[j] -Z[j]]

goal: voglio un indice k tale che Δ_k=0

Claim: $\Delta_N = 0$

dim

$\Delta_0 = N$ $\Delta_j = \Delta_{j-1} - 1$

A							
0	0	1	0	1	1	1	0
1	2	3	4	5	6	7	8

j=2

Δ_2 =2

N: #di uni in A

Δ_j: (#di uni in A[j+1:n])-(#di zeri in A[1:j]) [=U[j] -Z[j]]

goal: voglio un indice k tale che Δ_k=0

Claim: $\Delta_N = 0$

dim

$\Delta_0 = N$ $\Delta_j = \Delta_{j-1} - 1$

A	0	0	1	0	1	1	1	0
	1	2	3	4	5	6	7	8

j=3

Δ_3 =1

correttezza

N: #di uni in A

Δ_j: (#di uni in A[j+1:n])-(#di zeri in A[1:j]) [=U[j] -Z[j]]

goal: voglio un indice k tale che $\Delta_k=0$

Claim: $\Delta_N = 0$

dim

$\Delta_0 = N$ $\qquad\qquad$ $\Delta_j = \Delta_{j-1} - 1$