Esercitazione
Dynamic Programming

14/04/2026

*si ringrazia il Dott. Maestro
Alessandro Straziota per le slide

Massima sottostringa palindroma

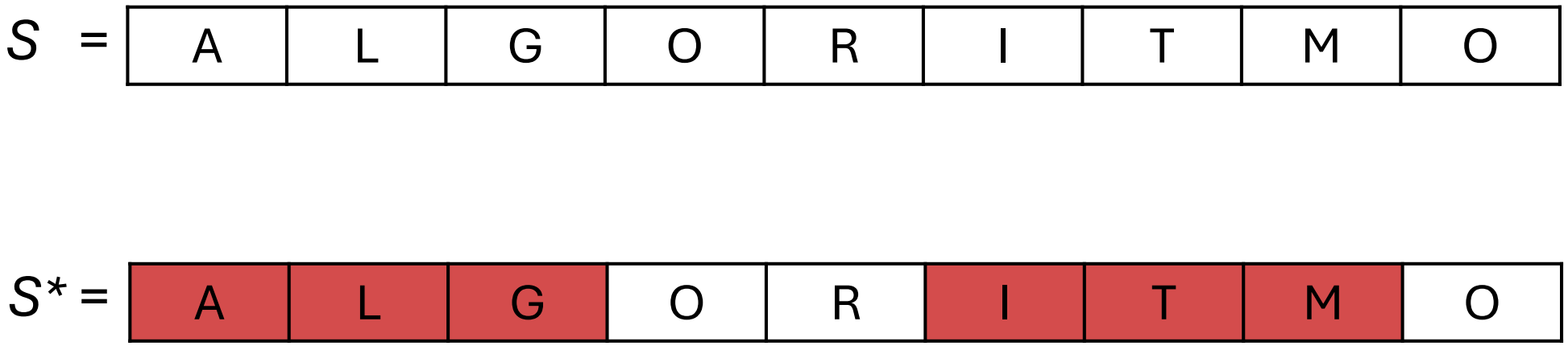
Massima sottostringa palindroma

- **Input:** una stringa *S* di *n* caratteri.

- **Goal:** eliminare da *S* dei caratteri (anche nessuno) in modo tale che la sottostringa risultante *S** sia **palindroma** e di **lunghezza massima**.

- **OPT:** massima lunghezza sottostringa palindroma.

Massima sottostringa palindroma



OPT = 3

Massima sottostringa palindroma

- **Sottoproblema:**

  OPT[i, j] = massima lunghezza sottostringa palindroma di *S*[i … j]

Massima sottostringa palindroma

- **Sottoproblema:**

  OPT[i, j] = massima lunghezza sottostringa palindroma di $S[i \ldots j]$

- **Soluzione:**

$$OPT[1 , n]$$

Massima sottostringa palindroma

- **Sottoproblema:**

  OPT[i, j] = massima lunghezza sottostringa palindroma di *S*[i … j]

- **Soluzione:**

  OPT[1 , n]

- **Caso base:**

  If i > j → OPT[i, j] = 0

  OPT[i, i] = 1

Massima sottostringa palindroma

- **Formula ricorsiva:**

$$OPT[i, j] = \begin{cases} 2 + OPT[i+1, j-1] & \text{se } S[i] = S[j] \\ \max\{ OPT[i+1, j], OPT[i, j-1] \} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Massima sottostringa palindroma

- **Formula ricorsiva:**

Aggiungo *S*[i] ed *S*[j] a *S** , e ricorsivamente osservo S[i+1 … j-1]

$$OPT[i, j] = \begin{cases} 2 + OPT[i+1, j-1] & \text{se } S[i] = S[j] \\ \max\{ OPT[i+1, j], OPT[i, j-1] \} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Massima sottostringa palindroma

- **Formula ricorsiva:**

$$OPT[i, j] = \begin{cases} 2 + OPT[i+1, j-1] & \text{se } S[i] = S[j] \\ \max\{OPT[i+1, j], OPT[i, j-1]\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Rimuovo $S[i]$

Massima sottostringa palindroma

- **Formula ricorsiva:**

$$OPT[i, j] = \begin{cases} 2 + OPT[i+1, j-1] & \text{se } S[i] = S[j] \\ \max\{ OPT[i+1, j], OPT[i, j-1] \} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Rimuovo $S[j]$

Massima sottostringa palindroma

		A	L	G	O	R	I	T	M	O
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L	0	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	0	0	0	0
T	0	0	0	0	0	0	0	0	0
M	0	0	0	0	0	0	0	0	0
O	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Inizializzazione tabella

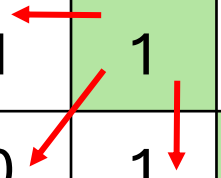
Massima sottostringa palindroma

	A	L	G	O	R	I	T	M	O
A	1	0	0	0	0	0	0	0	0
L	0	1	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	1	0	0	0	0	0	0
O	0	0	0	1	0	0	0	0	0
R	0	0	0	0	1	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	1	0	0	0
T	0	0	0	0	0	0	1	0	0
M	0	0	0	0	0	0	0	1	0
O	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Casi base

Massima sottostringa palindroma

	A	L	G	O	R	I	T	M	O
A	1	1	0	0	0	0	0	0	0
L	0	1	1	0	0	0	0	0	0
G	0	0	1	1	0	0	0	0	0
O	0	0	0	1	1	0	0	0	0
R	0	0	0	0	1	1	0	0	0
I	0	0	0	0	0	1	1	0	0
T	0	0	0	0	0	0	1	1	0
M	0	0	0	0	0	0	0	1	1
O	0	0	0	0	0	0	0	0	1



Caso generale

Attenzione: da riempire in diagonale! Perché?

Massima sottostringa palindroma

	A	L	G	O	R	I	T	M	O
A	1	1	1	1	1	1	1	1	3
L	0	1	1	1	1	1	1	1	3
G	0	0	1	1	1	1	1	1	3
O	0	0	0	1	1	1	1	1	3
R	0	0	0	0	1	1	1	1	1
I	0	0	0	0	0	1	1	1	1
T	0	0	0	0	0	0	1	1	1
M	0	0	0	0	0	0	0	1	1
O	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Massima sottostringa palindroma

	A	L	G	O	R	I	T	M	O
A	1	1	1	1	1	1	1	1	3
L	0	1	1	1	1	1	1	1	3
G	0	0	1	1	1	1	1	1	3
O	0	0	0	1	1	1	1	1	3
R	0	0	0	0	1	1	1	1	1
I	0	0	0	0	0	1	1	1	1
T	0	0	0	0	0	0	1	1	1
M	0	0	0	0	0	0	0	1	1
O	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Valore ottimo

Time $O(n^2)$

Massima sottostringa palindroma

```python
def opt(s: str) -> int:
    n = len(s)
    M = [[0] * n for _ in range(n)]
    for i in range(n):
        M[i][i] = 1

    for d in range(1, n):
        for i in range(n - d):
            j = i + d
            if s[i] == s[j]:
                M[i][j] = 2 + M[i + 1][j - 1]
            else:
                M[i][j] = max(M[i + 1][j], M[i][j - 1])

    return M[0][n - 1]
```

Implementazione in python con approccio **tabulation** (bottom-up)

Massima sottostringa palindroma

Ma abbiamo veramente bisogno di riempire TUTTA la tabella ?

Studente di informatica

Massima sottostringa palindroma

Massima sottostringa palindroma

	o	t	t	o		s	a	g	a	c	i		c	a	g	a	s	o	t	t	o
o	**1**	**1**	**2**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**5**	**5**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**	**15**	**17**	**19**
t	**0**	**1**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**3**	**3**	**3**	**5**	**5**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**	**15**	**17**	**17**
t	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**	**5**	**5**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**	**15**	**15**	**15**
o	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**	**5**	**5**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**	**13**	**13**	**13**
	0	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**	**5**	**5**	**5**	**7**	**9**	**11**	**11**	**11**	**11**	**11**
s	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**11**	**11**	**11**	**11**
a	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**5**	**7**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**	**9**
g	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**5**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**	**7**
a	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**	**5**
c	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**4**
i	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**4**
	0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**4**
c	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**4**
a	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**4**
g	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**4**
a	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**4**
s	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**2**	**4**
o	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**2**	**4**
t	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**2**	**2**
t	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
o	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**

Massima sottostringa palindroma

o	t	t	o		s	a	g	a	c	i		c	a	g	a	s	o	t	t	o

		o	t	t	o		s	a	g	a	c	i		c	a	g	a	s	o	t	t	o
	0	1	1	2	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	7	9	11	13	15	17	19
t	0	0	1	2	2	2	2	2	3	3	3	5	5	5	7	9	11	13	15	17	17	
t	0	0	0	1	1	1	1	1	3	3	3	5	5	5	7	9	11	13	15	15	15	
o	0	0	0	0	1	1	1	1	3	3	3	5	5	5	7	9	11	11	11	11	11	
s	0	0	0	0	0	1	1	1	3	3	3	3	3	5	7	9	11	11	11	11	11	
a	0	0	0	0	0	0	1	1	3	3	3	3	3	5	7	9	9	9	9	9	9	
g	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	3	5	7	7	7	7	7	7	7	
a	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	3	5	5	5	5	5	5	5	5	
c	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	4	
i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	4	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	3	3	3	3	3	4	
c	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	3	3	3	3	3	4	
a	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	3	3	3	3	3	4	
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	4	
a	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	4	
s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	4	
o	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	4	
t	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	2	
t	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	
o	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	

Tante celle sono vuote o inutili. Riempiamo solo quelle necessarie!!

Studente di informatica

Massima sottostringa palindroma

```python
def opt(s: str, i: int, j: int, cache: dict = dict()) -> int:
    if (i, j) in cache:
        return cache[i, j]

    if i > j:
        cache[i, j] = 0
    elif i == j:
        cache[i, j] = 1
    else:
        if s[i] == s[j]:
            cache[i, j] = 2 + opt(s, i + 1, j - 1, cache)
        else:
            cache[i, j] = max(opt(s, i + 1, j, cache), opt(s, i, j - 1, cache))
    return cache[i, j]
```

Implementazione in python con approccio **memoization** (top-down)

Massima sottostringa palindroma

o	t	t	o		s	a	g	a	c	i		c	a	g	a	s	o	t	t	o

	o	t	t	o		s	a	g	a	c	i		c	a	g	a	s	o	t	t	o
o																					19
t																				17	
t																			15		
o																		13			
												5	5	5	7	9	11				
s						1	1	1	3	3	3	3	3	5	7	9	11				
a							1	1	3	3	3	3	3	5	7	9					
g								1	1	1	1	1	3		7						
a									1	1	1	1	3	5							
c										1	1	1	3								
i											1	1									
												1									
c																					
a																					
g																					
a																					
s																					
o																					
t																					
t																					
o																					

Gotta Memoize 'Em All! *

(*) -2 punti all'esame per chi non capisce il riferimento

Massima sottostringa palindroma

Come ricavare la soluzione dai valori dell'ottimo

```python
def solution(s: str, OPT: dict, i: int, j: int) -> str:
    if i > j:
        return ""
    elif i == j:
        return s[i]
    elif s[i] == s[j]:
        return s[i] + solution(s, OPT, i + 1, j - 1) + s[j]
    elif OPT[i + 1, j] > OPT[i, j - 1]:
        return solution(s, OPT, i + 1, j)
    else:
        return solution(s, OPT, i, j - 1)
```

Il problema dei due scaffali

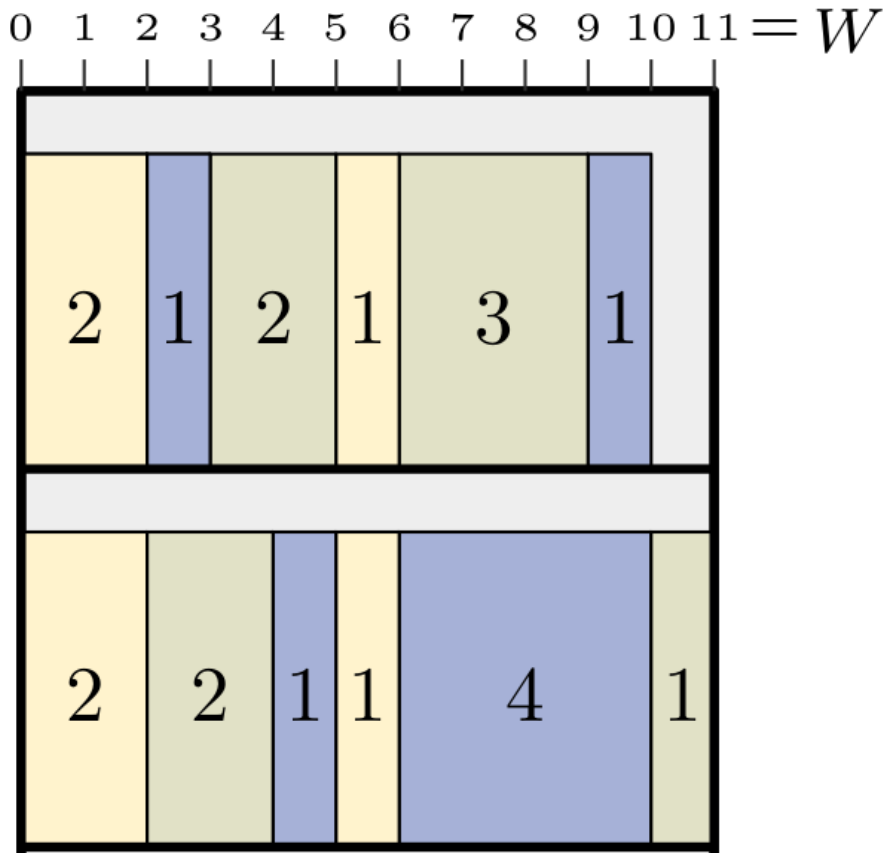
(*) Si ringrazia il prof. Stefano Leucci per l'esercizio

Il problema dei due scaffali

- **Input:** una collezione di n libri di spessore $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{N}$.
- **Goal:** vuoi comprare due scaffali S_1 ed S_2 , **entrambi di larghezza** $W \in \mathbb{N}$, per disporre tutti i tuoi libri.
- **OPT:** larghezza **minima** necessaria per gli scaffali S_1 ed S_2 .

Il problema dei due scaffali

Inptu: { 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 4, 1, 3, 1 }



OPT: 11

Il problema dei due scaffali

- **Sottoproblema:**

  OPT[i, w] = minimo spazio usato sullo scaffale S_1 se sullo scaffale S_2 ho a disposizione spazio w e voglio piazzare *i* libri di spessore $t_1, \ldots, t_i$.

- **Soluzione:**

  $W \leq T = \sum t_i$

  min W tale che OPT[n, W] ≤ W

- **Caso base:**

  OPT[0, w] = 0

Il problema dei due scaffali

- **Formula ricorsiva:**

$$OPT[i, w] = \begin{cases} t_i + OPT[i-1, w] & \text{se } t_i > w \\ \min\{ t_i + OPT[i-1, w],\ OPT[i-1, w - t_i] \} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il problema dei due scaffali

- **Formula ricorsiva:**

t_i non entra nello scaffale S_2, quindi lo devo mettere per forza in S_1

$$OPT[i, w] = \begin{cases} t_i + OPT[i-1, w] & \text{se } t_i > w \\ \min\{ t_i + OPT[i-1, w], OPT[i-1, w - t_i] \} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il problema dei due scaffali

- **Formula ricorsiva:**

$$OPT[i, w] = \begin{cases} t_i + OPT[i-1, w] & \text{se } t_i > w \\ \min\{ t_i + OPT[i-1, w],\ OPT[i-1, w-t_i] \} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Inserisco t_i nello scaffale S_2

Il problema dei due scaffali

- **Formula ricorsiva:**

$$OPT[i, w] = \begin{cases} t_i + OPT[i-1, w] & \text{se } t_i > w \\ \min\{ t_i + OPT[i-1, w],\ OPT[i-1, w - t_i] \} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Inserisco t_i nello scaffale S_1

Il problema dei due scaffali

- **Space:** $O(n\,T)$ *dove* $T = \sum t_i$

Il problema dei due scaffali

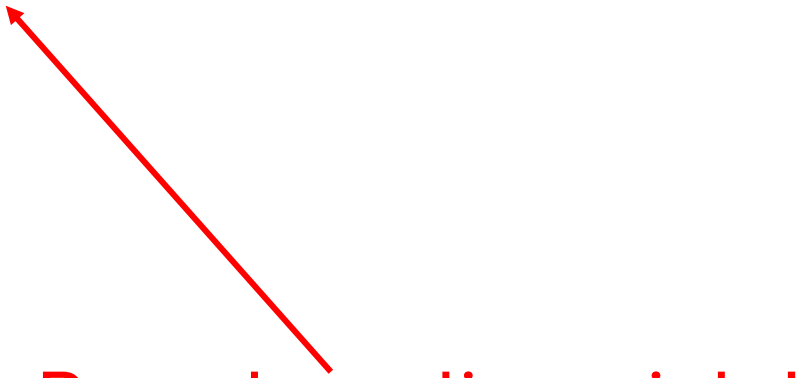
- **Space:** $O(n\ T)$ *dove* $T = \sum t_i$

- **Time:** $O(n\ T)$, ogni volta devo combinare un numero costante di sottoproblemi.

Il problema dei due scaffali

- **Space:** *O(n T) dove* $T = \sum t_i$

- **Time:** *O(n T)*, ogni volta devo combinare un numero costante di sottoproblemi.



Pseudo-polinomiale!

Il problema dei due scaffali

- **Esercizio 1:** implementare l'algoritmo con approccio bottom-up (tabulation) e top-down (memoization).

- **Esercizio 2:** adattare l'algoritmo nel caso in cui si hanno a disposizione 3 scaffali S_1, S_2 ed S_3.