

Esercitazione  
17 marzo 2026

Algoritmi greedy

# problema 1

## Esercizio svolto #3 (pag. 187)

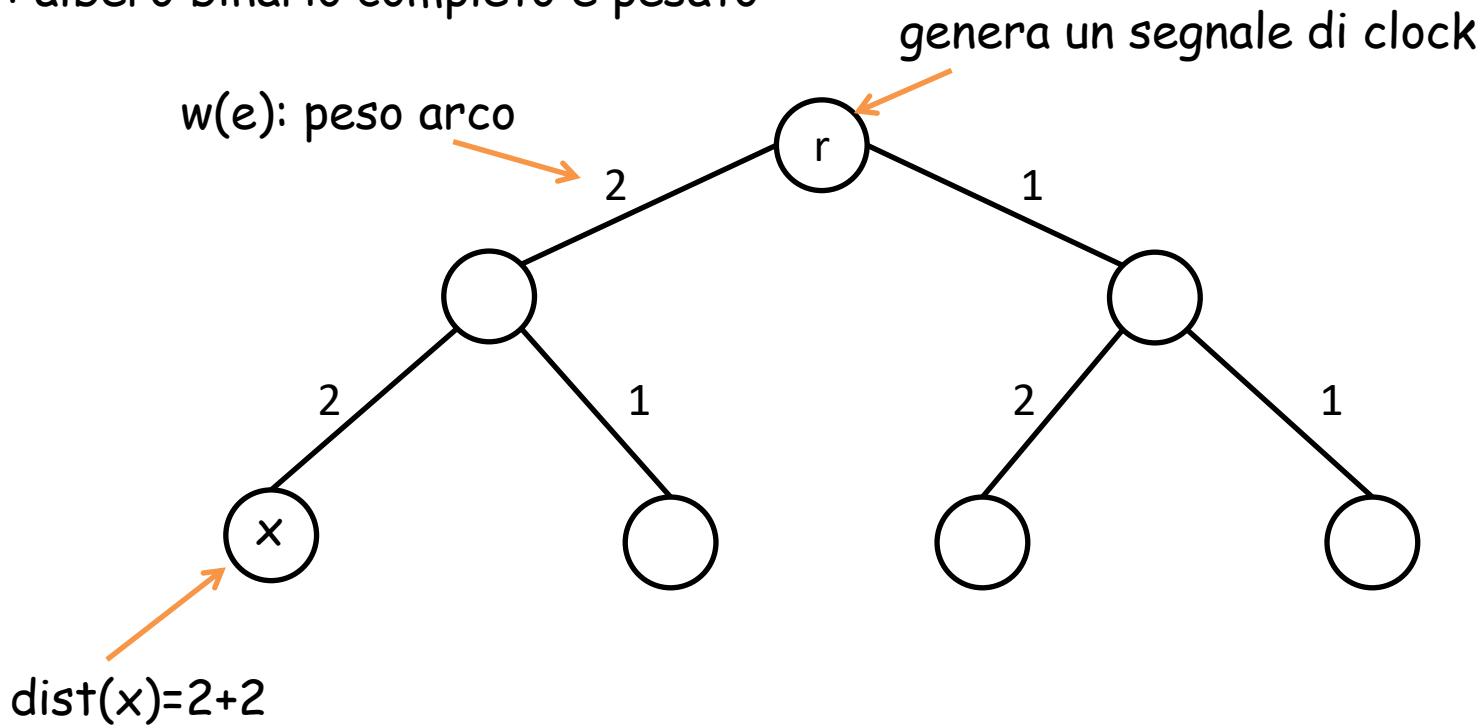
Sia  $G = (V, E)$  un grafo con pesi positivi distinti sugli archi ed  $e \in E$  un arco di  $G$ . Progettare un algoritmo lineare in grado di determinare se esiste un MST di  $G$  che contiene l'arco  $e$ .

# problema 2

Esercizio #24 (pag. 200)

## sincronizzazione di circuiti

T: albero binario completo e pesato



tempo a cui arriva il segnale

**goal:** sincronizzare le foglie: metterle tutte alla stessa distanza

**come:** posso incrementare i pesi degli archi

**misura (da minimizzare):** peso totale dell'albero risultante (min somma incrementi)

input:

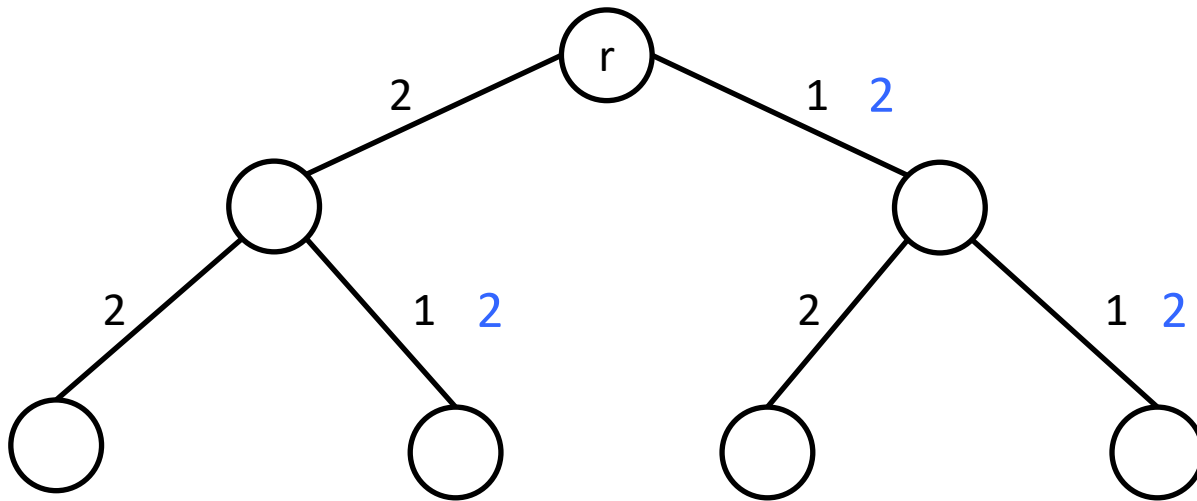
albero binario completo e pesato  $T$

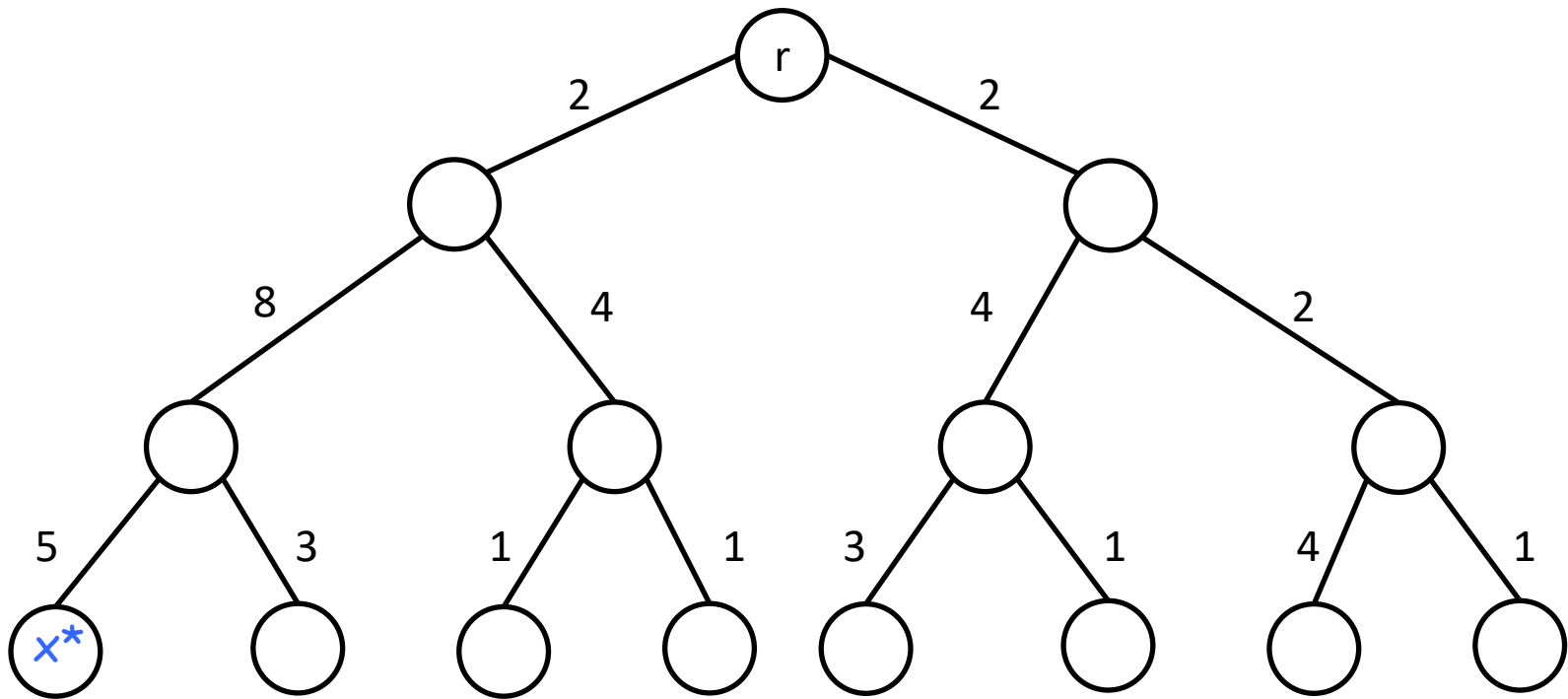
soluzione ammissibile:

nuova pesatura  $w'$  per  $T$  con  $w'(e) \geq w(e)$  tale che tutte le foglie rispetto a  $w'$  hanno la stessa distanza dalla radice

misura (da minimizzare):

$$w'(T) = \sum_e w'(e)$$





$x^*$ : foglia più lontana a distanza  $L=15$

**idea:** mettere tutte le foglie a distanza  $L=15$

**intuizione:** conviene aumentare gli archi "alti"

**definizione:** arco  $e$  copre una foglia  $x$  se il cammino dalla radice verso  $x$  passa per  $e$

$F$ : insieme delle foglie

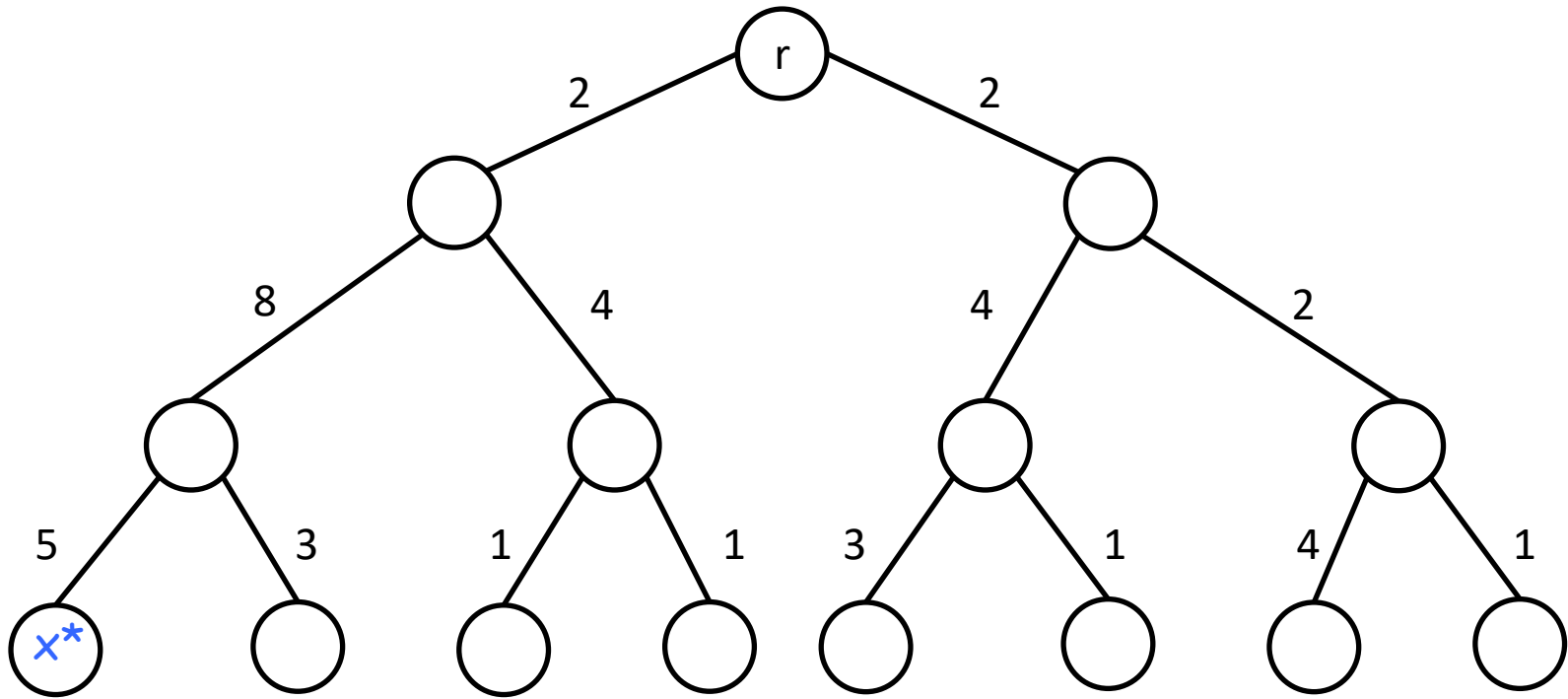
$F_e$ : insieme delle foglie coperte da  $e$

per ogni sottoinsieme di archi  $X$

$\{F_e\}_{e \in X}$  famiglia **laminare** di insiemi:

per ogni  $e, e'$  in  $X$

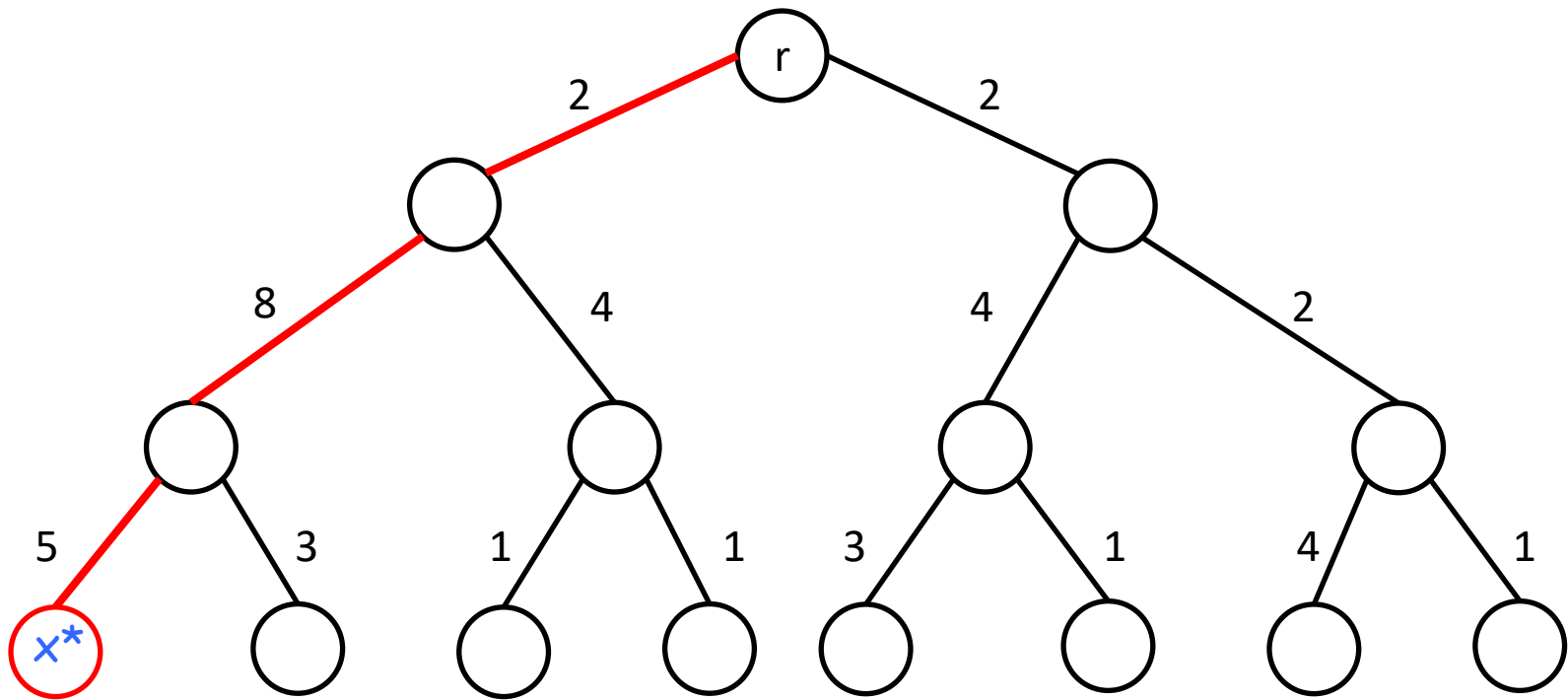
-  $F_e \subseteq F_{e'}$  oppure  $F_e \cap F_{e'} = \emptyset$



$x^*$ : foglia più lontana a distanza  $L=15$

### algoritmo greedy:

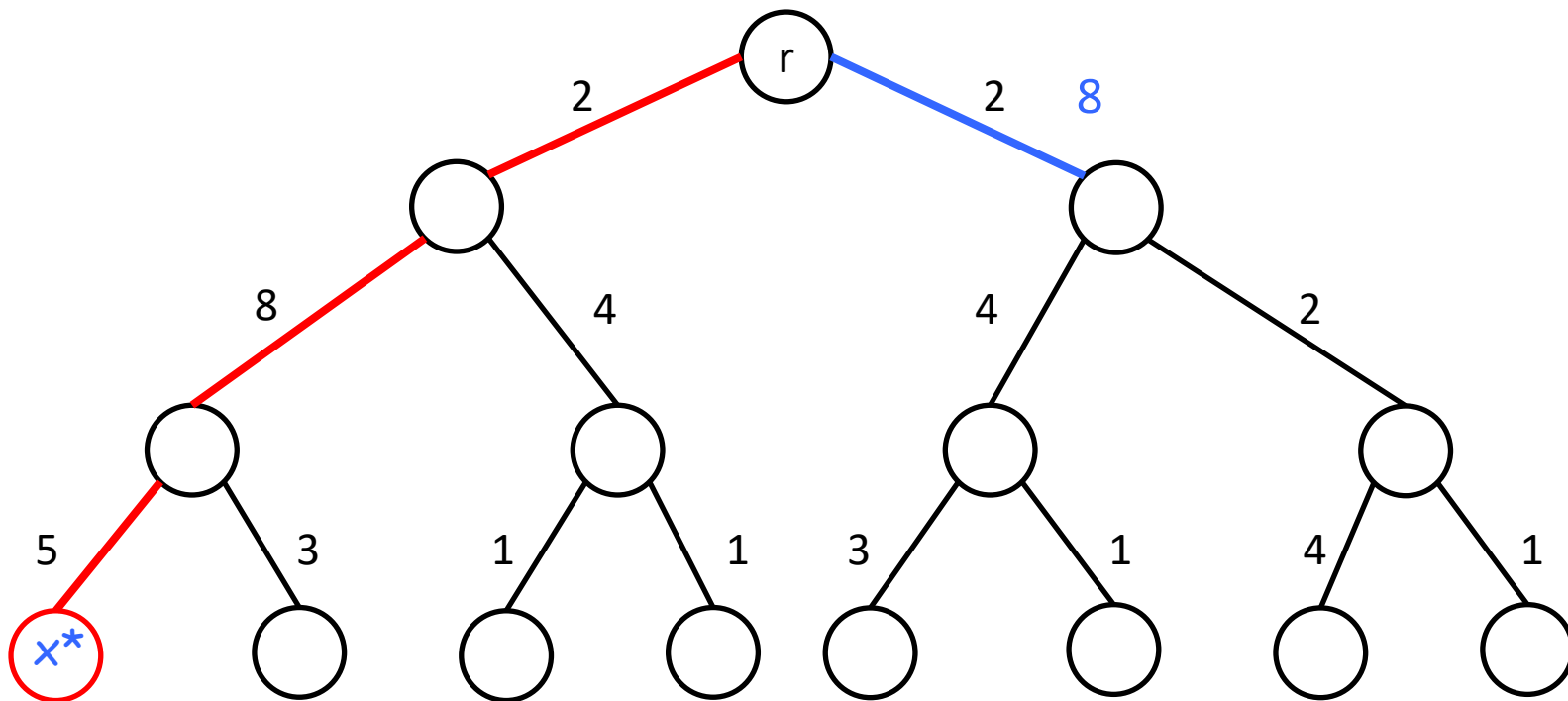
- marca tutti gli archi del cammino  $r-x^*$
- considera gli archi di  $T$  top-down (in ordine ascendente di profondità)
  - se l'arco  $e$  non è marcato
    - alza il peso di  $e$  finché una foglia  $x \in F_e$  non diventa a distanza  $L$
    - marca tutti gli archi lungo il cammino verso  $x$
- restituisci la nuova pesatura



$x^*$ : foglia più lontana a distanza  $L=15$

### algoritmo greedy:

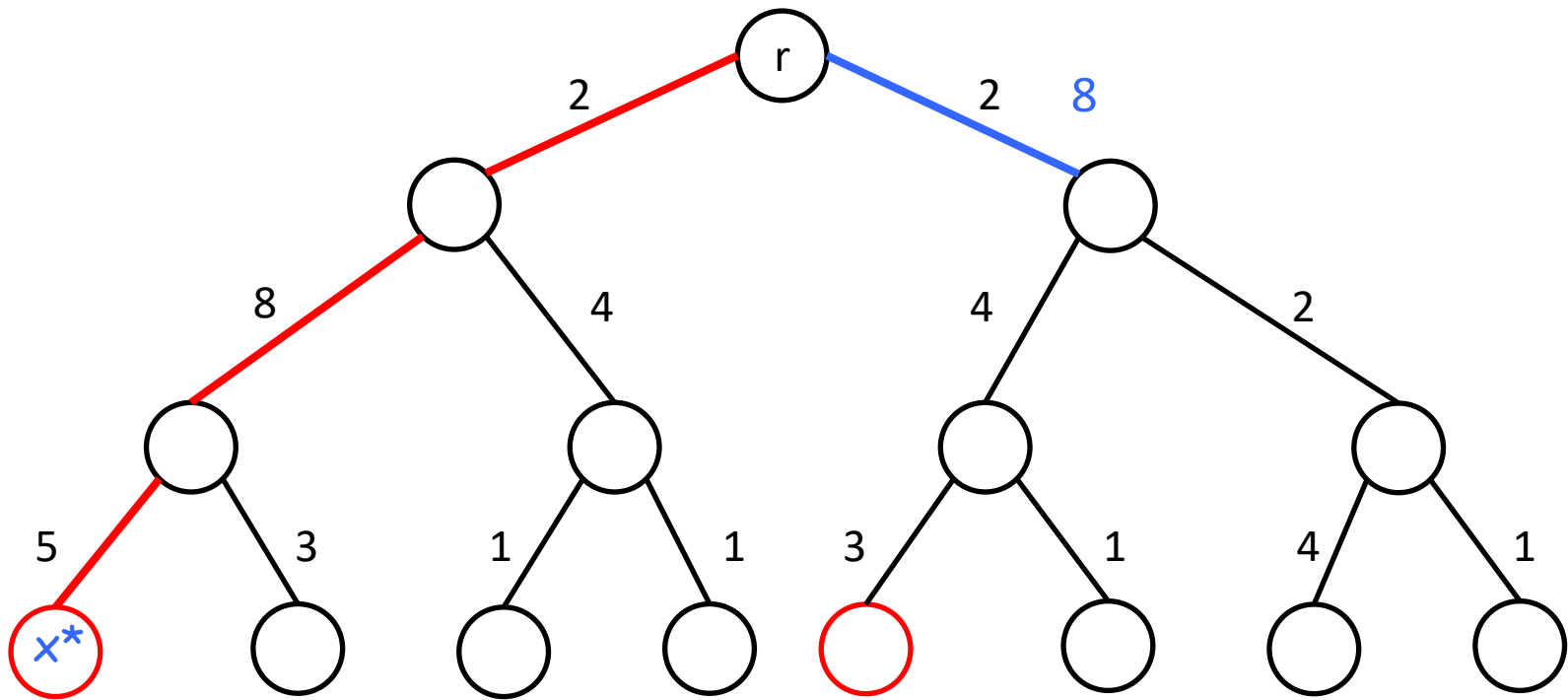
- marca tutti gli archi del cammino  $r-x^*$
- considera gli archi di  $T$  top-down (in ordine ascendente di profondità)
  - se l'arco  $e$  non è marcato
    - alza il peso di  $e$  finché una foglia  $x \in F_e$  non diventa a distanza  $L$
    - marca tutti gli archi lungo il cammino verso  $x$
- restituisci la nuova pesatura



$x^*$ : foglia più lontana a distanza  $L=15$

### algoritmo greedy:

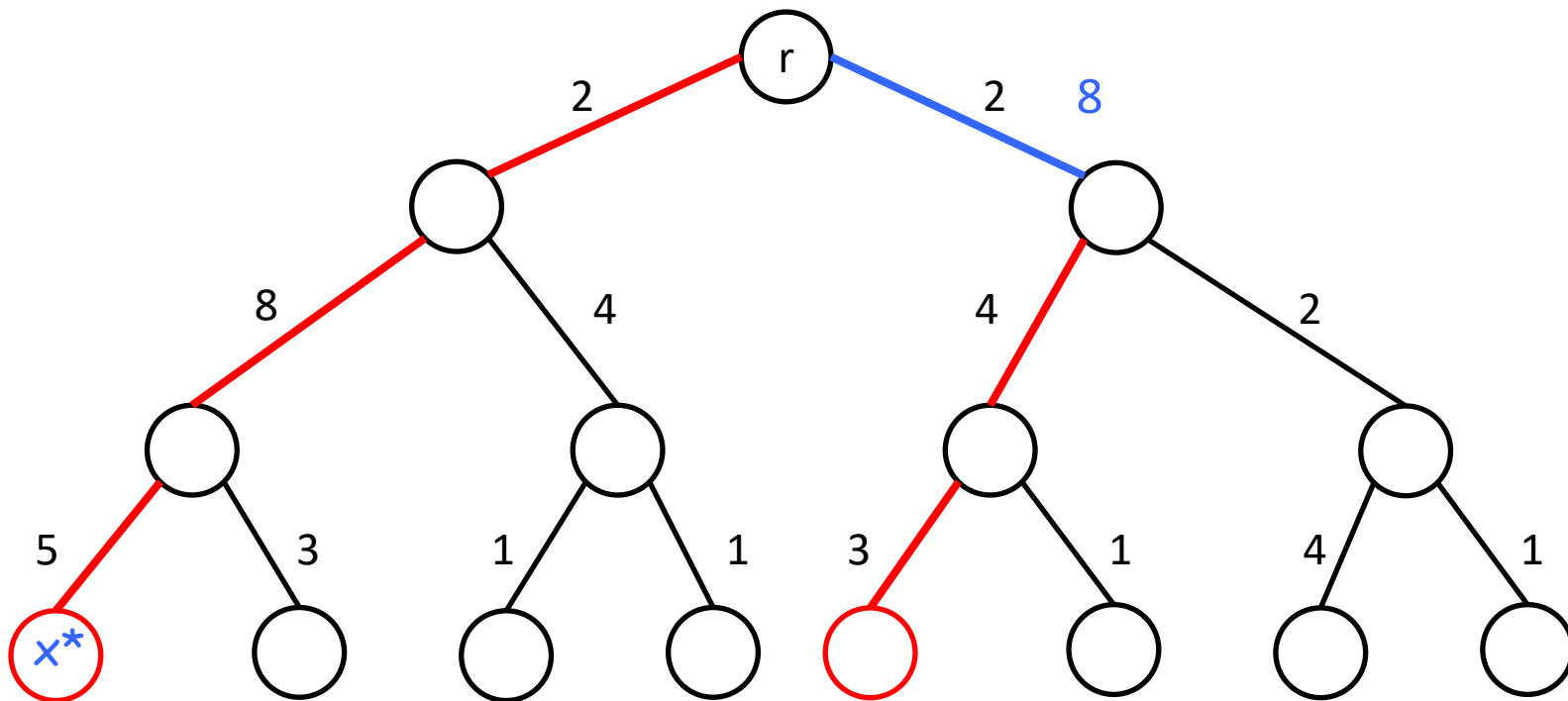
- marca tutti gli archi del cammino  $r-x^*$
- considera gli archi di  $T$  top-down (in ordine ascendente di profondità)
  - se l'arco  $e$  non è marcato
    - alza il peso di  $e$  finché una foglia  $x \in F_e$  non diventa a distanza  $L$
    - marca tutti gli archi lungo il cammino verso  $x$
- restituisci la nuova pesatura



$x^*$ : foglia più lontana a distanza  $L=15$

### algoritmo greedy:

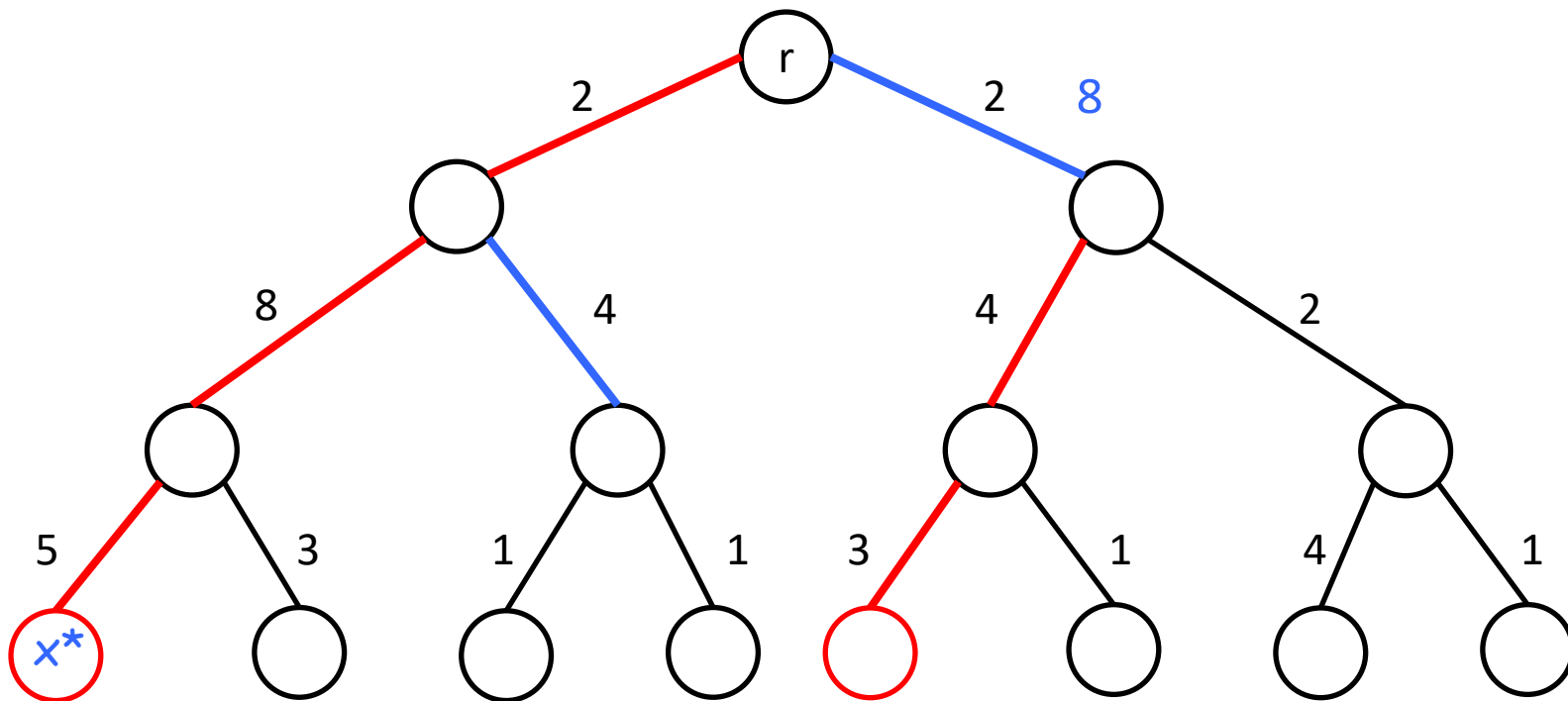
- marca tutti gli archi del cammino  $r-x^*$
- considera gli archi di  $T$  top-down (in ordine ascendente di profondità)
  - se l'arco  $e$  non è marcato
    - alza il peso di  $e$  finché una foglia  $x \in F_e$  non diventa a distanza  $L$
    - marca tutti gli archi lungo il cammino verso  $x$
- restituisci la nuova pesatura



$x^*$ : foglia più lontana a distanza  $L=15$

**algoritmo greedy:**

- marca tutti gli archi del cammino  $r-x^*$
- considera gli archi di  $T$  top-down (in ordine ascendente di profondità)
  - se l'arco  $e$  non è marcato
    - alza il peso di  $e$  finché una foglia  $x \in F_e$  non diventa a distanza  $L$
    - marca tutti gli archi lungo il cammino verso  $x$
- restituisci la nuova pesatura

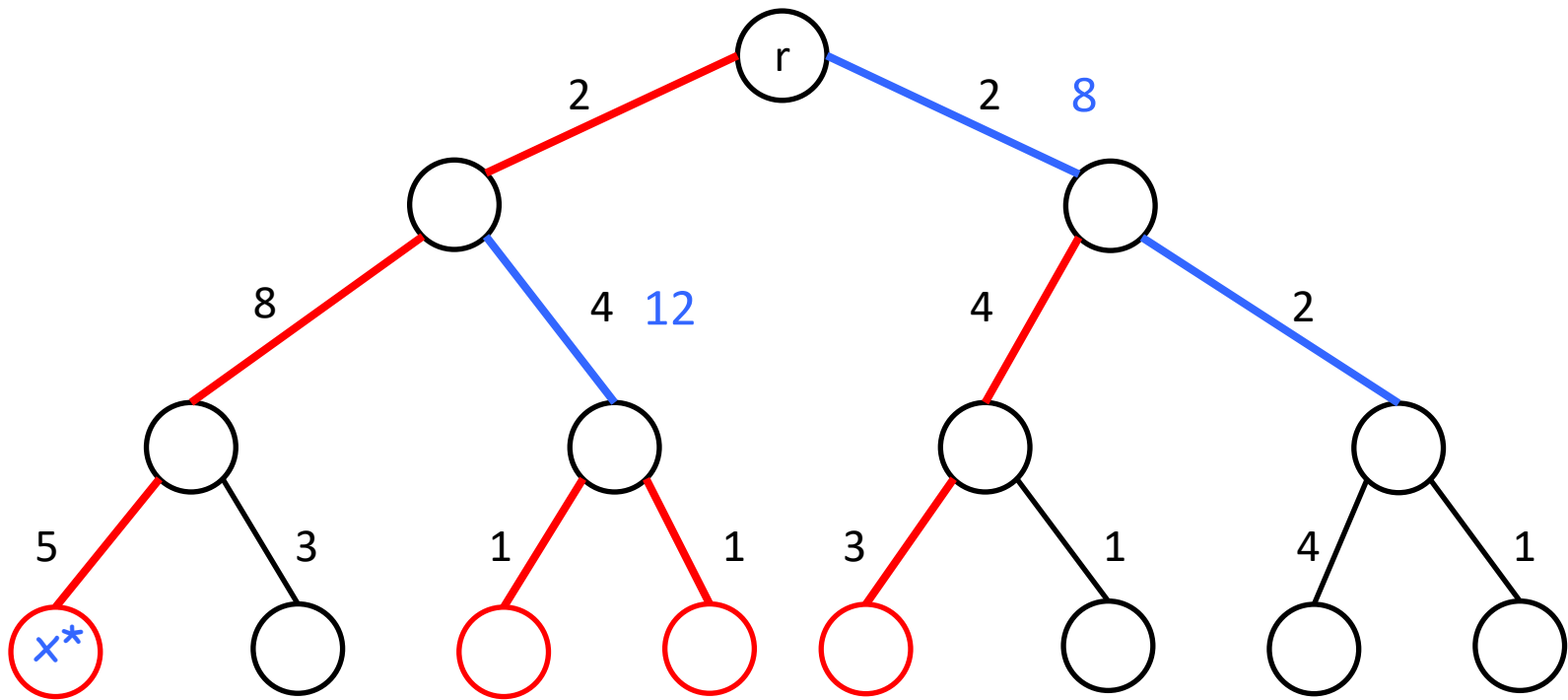


$x^*$ : foglia più lontana a distanza  $L=15$

### algoritmo greedy:

- marca tutti gli archi del cammino  $r-x^*$
- considera gli archi di  $T$  top-down (in ordine ascendente di profondità)
  - se l'arco  $e$  non è marcato
    - alza il peso di  $e$  finché una foglia  $x \in F_e$  non diventa a distanza  $L$
    - marca tutti gli archi lungo il cammino verso  $x$
- restituisci la nuova pesatura

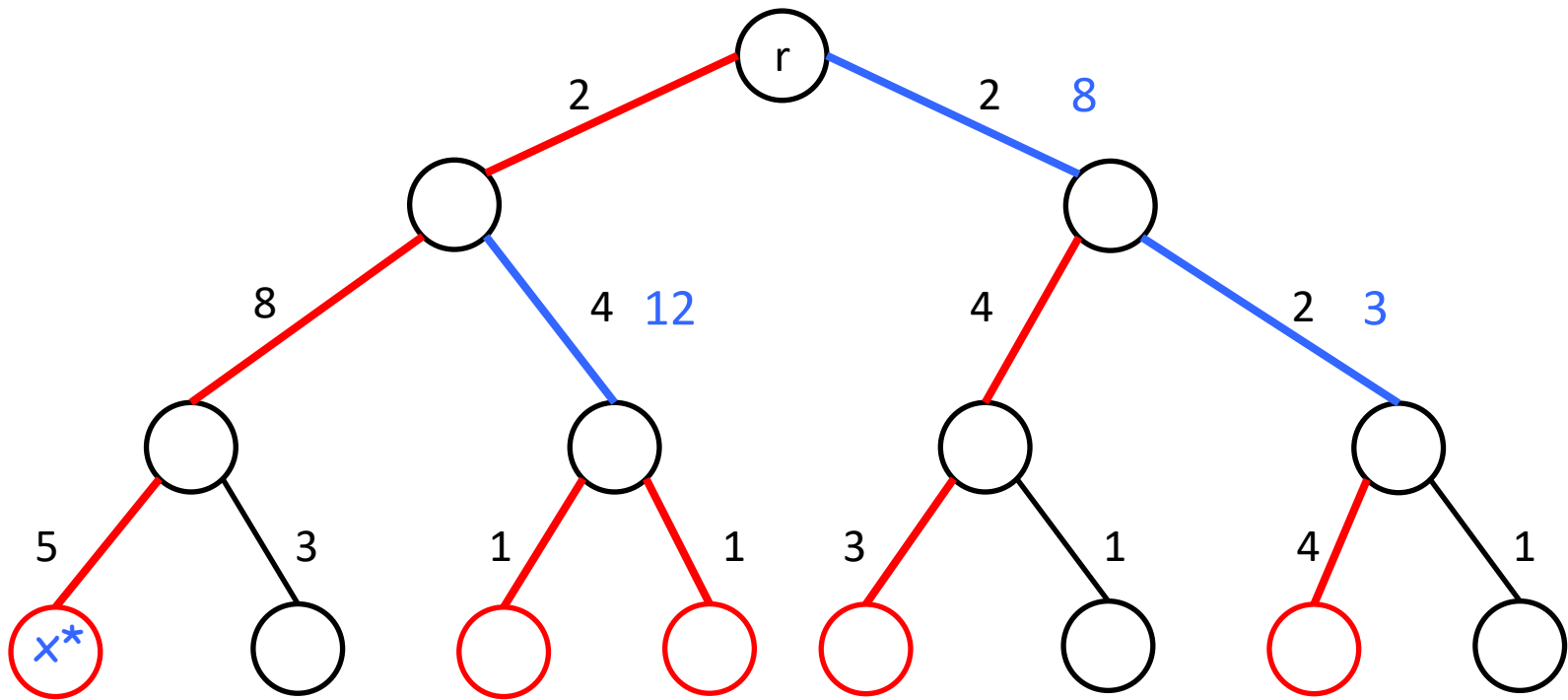




$x^*$ : foglia più lontana a distanza  $L=15$

### algoritmo greedy:

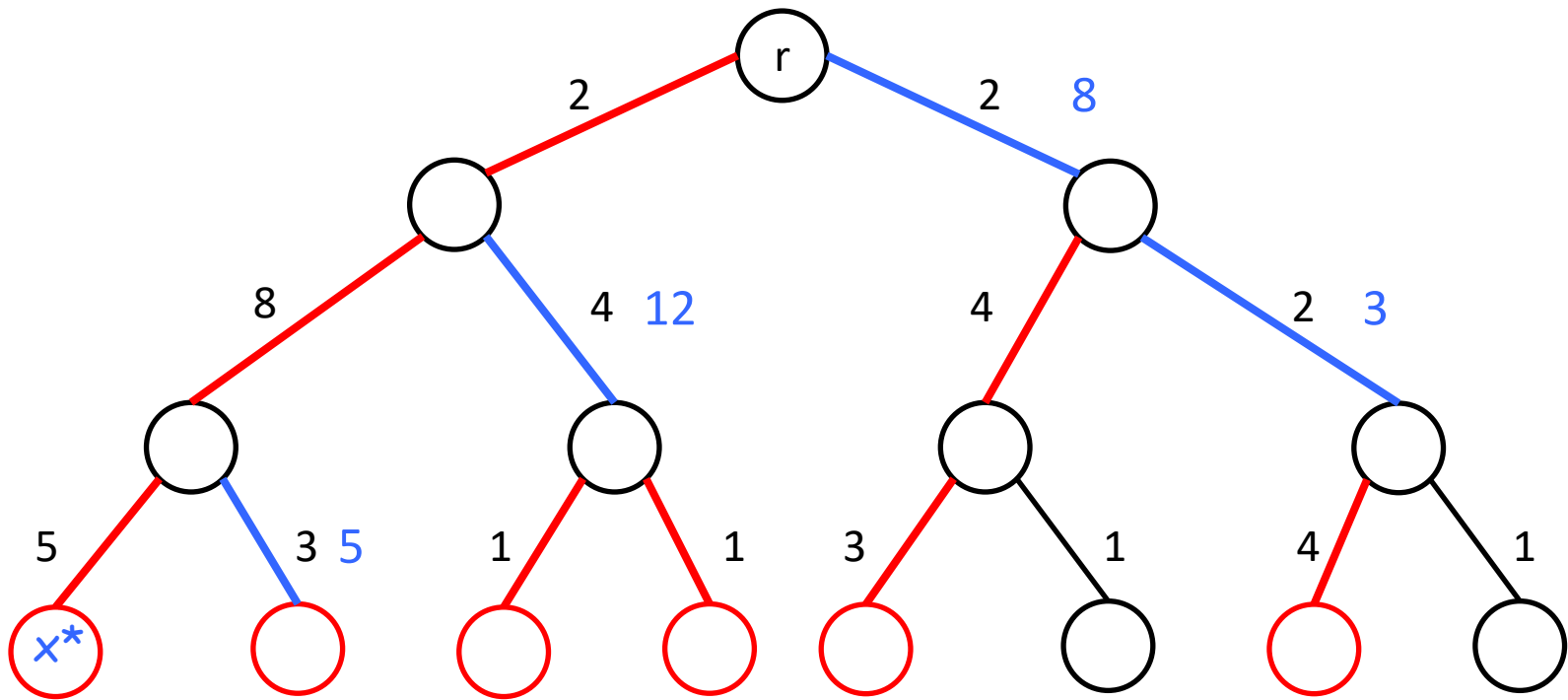
- marca tutti gli archi del cammino  $r-x^*$
- considera gli archi di  $T$  top-down (in ordine ascendente di profondità)
  - se l'arco  $e$  non è marcato
    - alza il peso di  $e$  finché una foglia  $x \in F_e$  non diventa a distanza  $L$
    - marca tutti gli archi lungo il cammino verso  $x$
- restituisci la nuova pesatura



$x^*$ : foglia più lontana a distanza  $L=15$

### algoritmo greedy:

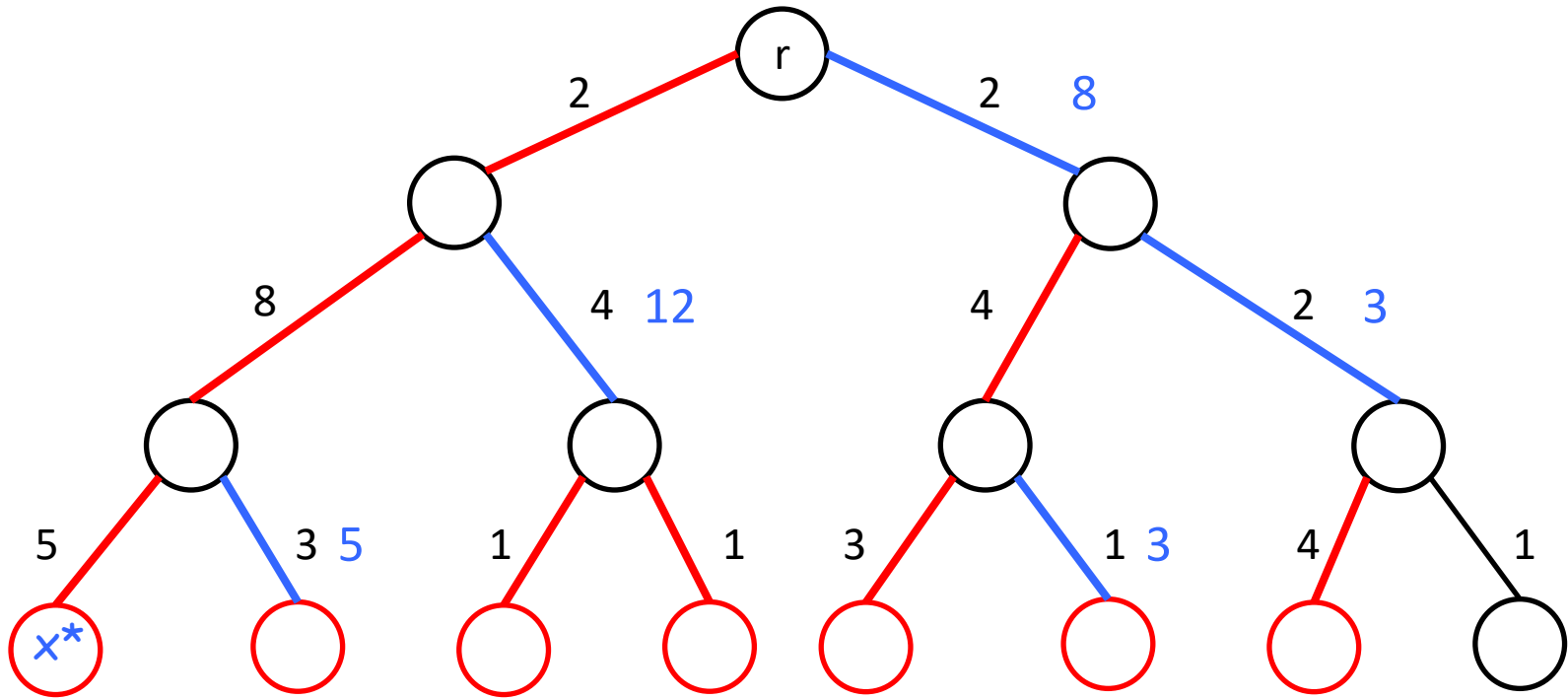
- marca tutti gli archi del cammino  $r-x^*$
- considera gli archi di  $T$  top-down (in ordine ascendente di profondità)
  - se l'arco  $e$  non è marcato
    - alza il peso di  $e$  finché una foglia  $x \in F_e$  non diventa a distanza  $L$
    - marca tutti gli archi lungo il cammino verso  $x$
- restituisci la nuova pesatura



$x^*$ : foglia più lontana a distanza  $L=15$

### algoritmo greedy:

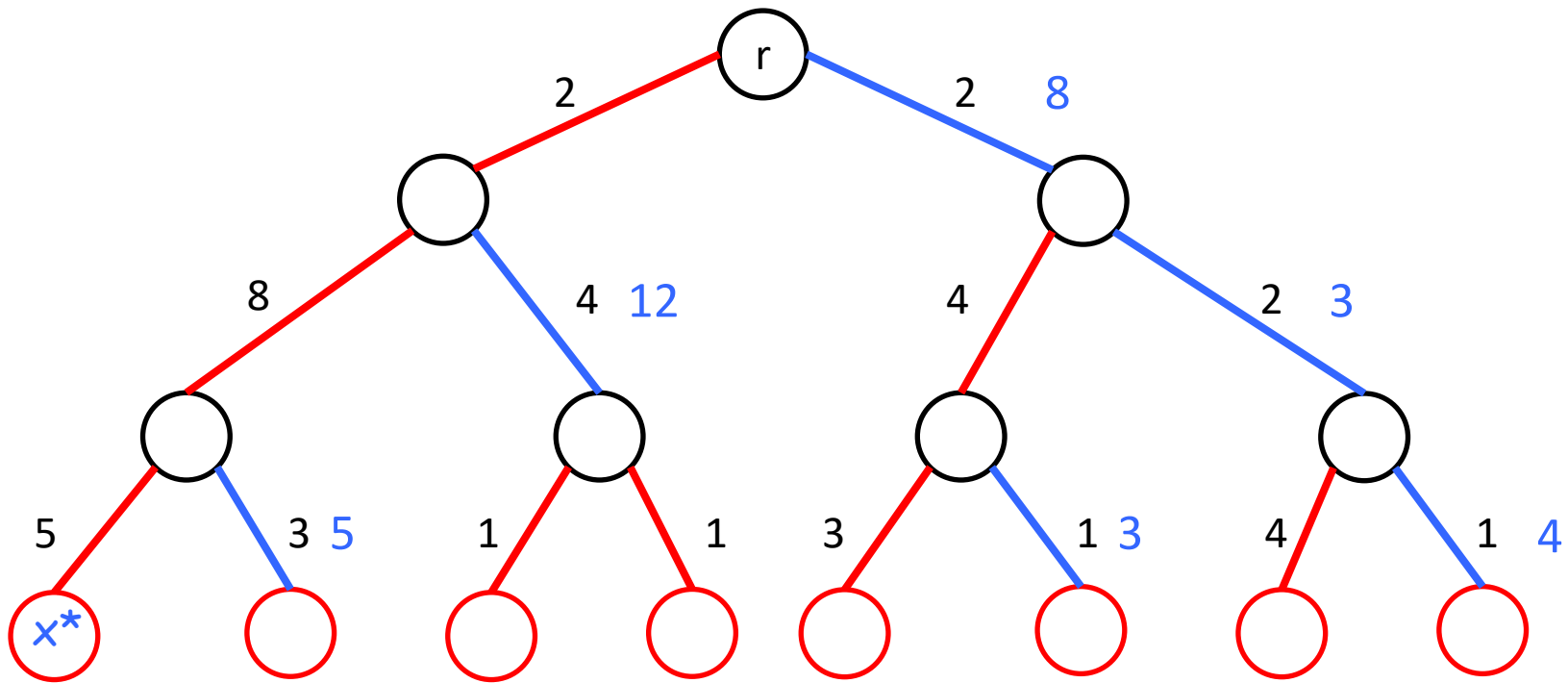
- marca tutti gli archi del cammino  $r-x^*$
- considera gli archi di  $T$  top-down (in ordine ascendente di profondità)
  - se l'arco  $e$  non è marcato
    - alza il peso di  $e$  finché una foglia  $x \in F_e$  non diventa a distanza  $L$
    - marca tutti gli archi lungo il cammino verso  $x$
- restituisci la nuova pesatura



$x^*$ : foglia più lontana a distanza  $L=15$

### algoritmo greedy:

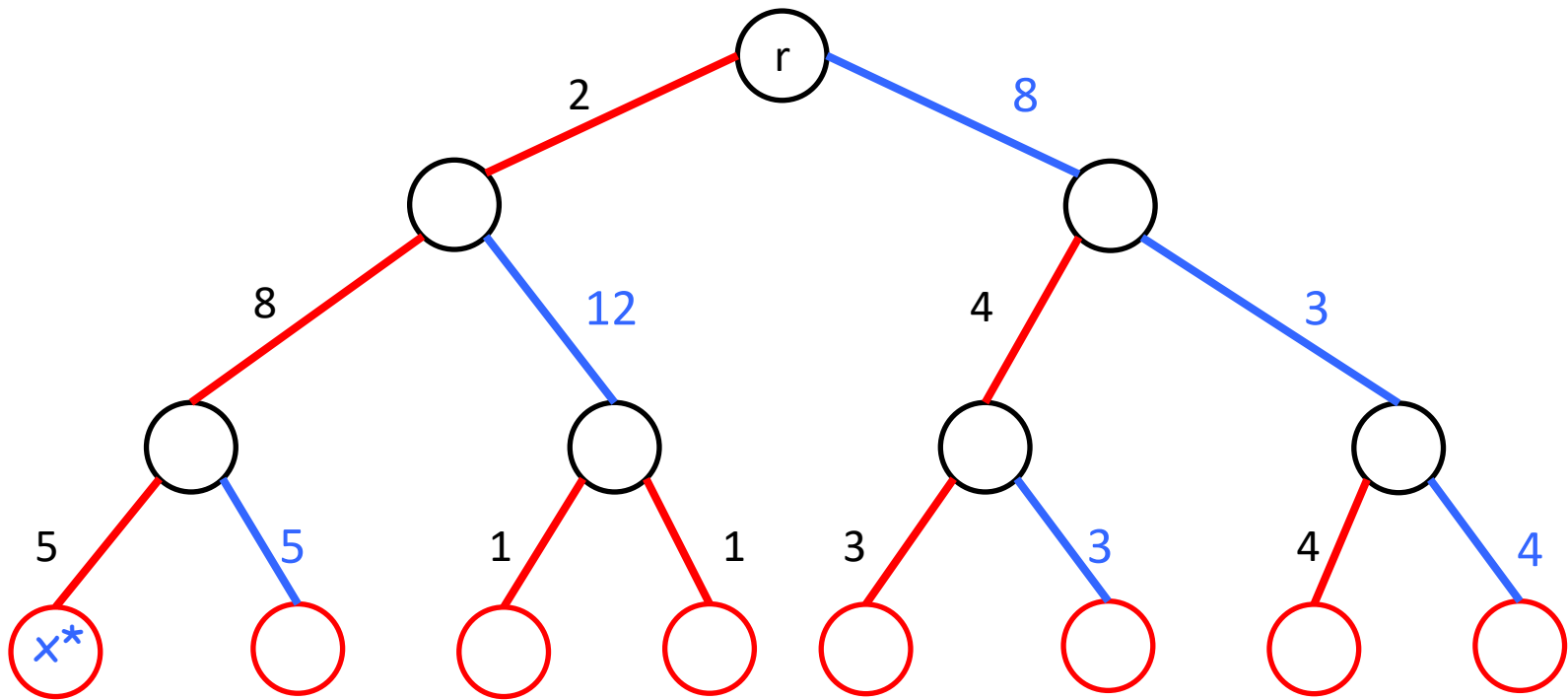
- marca tutti gli archi del cammino  $r-x^*$
- considera gli archi di  $T$  top-down (in ordine ascendente di profondità)
  - se l'arco  $e$  non è marcato
    - alza il peso di  $e$  finché una foglia  $x \in F_e$  non diventa a distanza  $L$
    - marca tutti gli archi lungo il cammino verso  $x$
- restituisci la nuova pesatura



$x^*$ : foglia più lontana a distanza  $L=15$

**algoritmo greedy:**

- marca tutti gli archi del cammino  $r-x^*$
- considera gli archi di  $T$  top-down (in ordine ascendente di profondità)
  - se l'arco  $e$  non è marcato
    - alza il peso di  $e$  finché una foglia  $x \in F_e$  non diventa a distanza  $L$
    - marca tutti gli archi lungo il cammino verso  $x$
- restituisci la nuova pesatura



$x^*$ : foglia più lontana a distanza  $L=15$

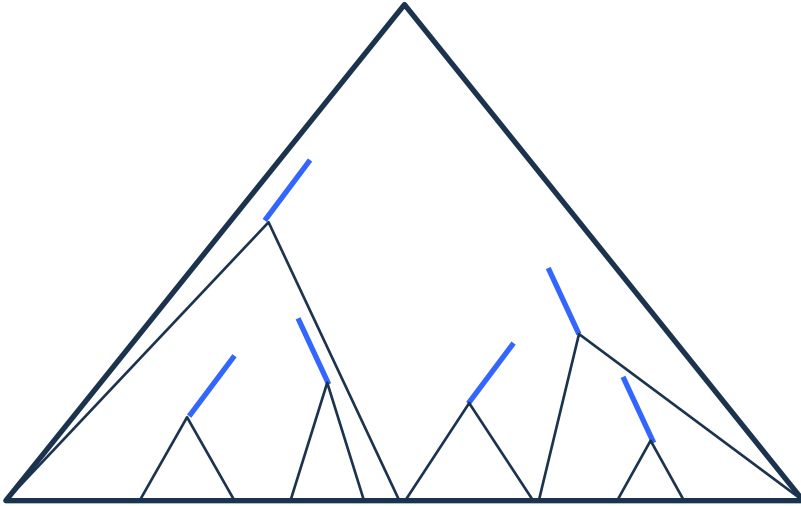
### algoritmo greedy:

- marca tutti gli archi del cammino  $r-x^*$
- considera gli archi di  $T$  top-down (in ordine ascendente di profondità)
  - se l'arco  $e$  non è marcato
    - alza il peso di  $e$  finché una foglia  $x \in F_e$  non diventa a distanza  $L$
    - marca tutti gli archi lungo il cammino verso  $x$
- restituisci la nuova pesatura

dimostrazione di ottimalità

**claim:** una soluzione ottima mette tutte le foglie a distanza  $L$

supponi  $Opt$  mette tutte le foglie a distanza  $L' > L$



$X$ : archi incrementati da  $Opt$

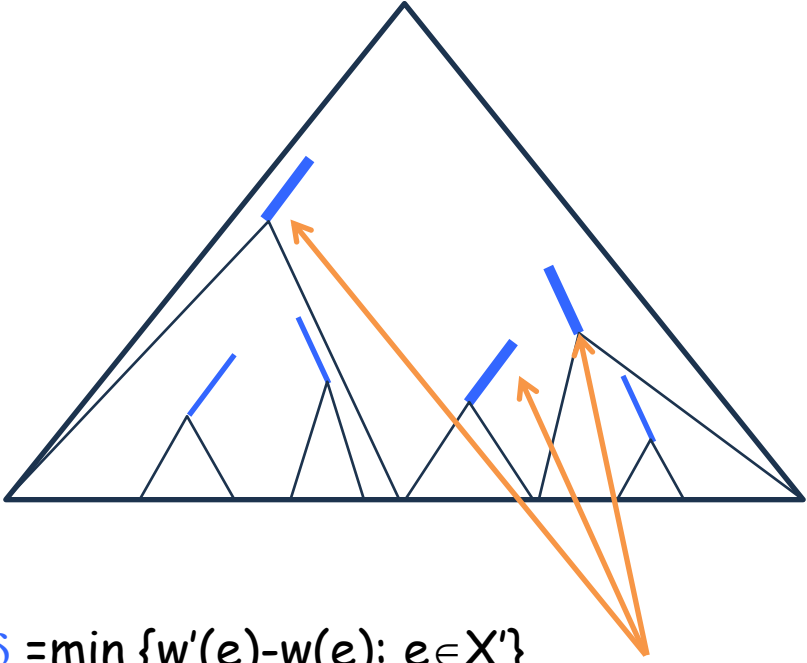
poiché tutte le foglie hanno aumentato la loro distanza:

$$\bigcup_{e \in X} F_e = F$$

$X' \subseteq X$ : tale che ogni foglia è coperta da un solo  $e \in X'$

claim: una soluzione ottima mette tutte le foglie a distanza L

supponi Opt mette tutte le foglie a distanza L' > L



X: archi incrementati da Opt

poiché tutte le foglie hanno aumentato la loro distanza:

$$\cup_{e \in X} F_e = F$$

X' ⊆ X: tale che ogni foglia è coperta da un solo e ∈ X'

$$\delta = \min \{w'(e) - w(e) : e \in X'\}$$

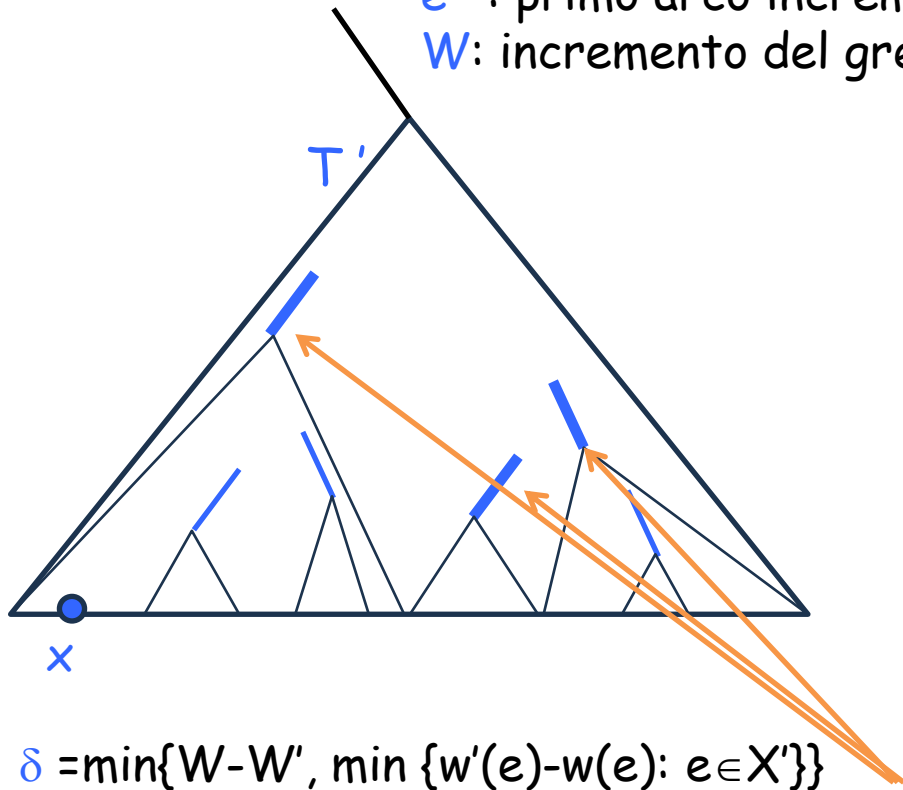
decremento di δ e ottengo una soluzione ammissibile strettamente migliore

allora Opt non era ottima: assurdo!

idea: faccio vedere che il greedy non sbaglia mai

$e^*$  : primo arco incrementato dal greedy

$W$ : incremento del greedy che porta  $x$  a distanza  $L$



assumi Opt incrementa  $e^*$  di  $W' < W$

$X$ : archi incrementati da Opt in  $T'$

poiché tutte le foglie di  $T'$  devono aumentare la loro distanza:

$$\cup_{e \in X} F_e = \text{foglie di } T'$$

$X' \subseteq X$ : tale che ogni foglia di  $T'$  è coperta da un solo  $e \in X'$

nota:  $|X'| \geq 2$

$$\delta = \min\{W - W', \min\{w'(e) - w(e) : e \in X'\}\}$$

allora Opt non era ottima: assurdo!

decremento di  $\delta$  e incremento  $e^*$  di  $\delta$  ottengo una soluzione ammissibile strettamente migliore

Quindi l'ottimo deve incrementare  $e^*$  come il greedy: stesse argomentazioni per i prossimi archi.