Esercitazione
19 marzo 2023

Algoritmi greedy

problema 1

Esercizio svolto #3 (pag. 187)

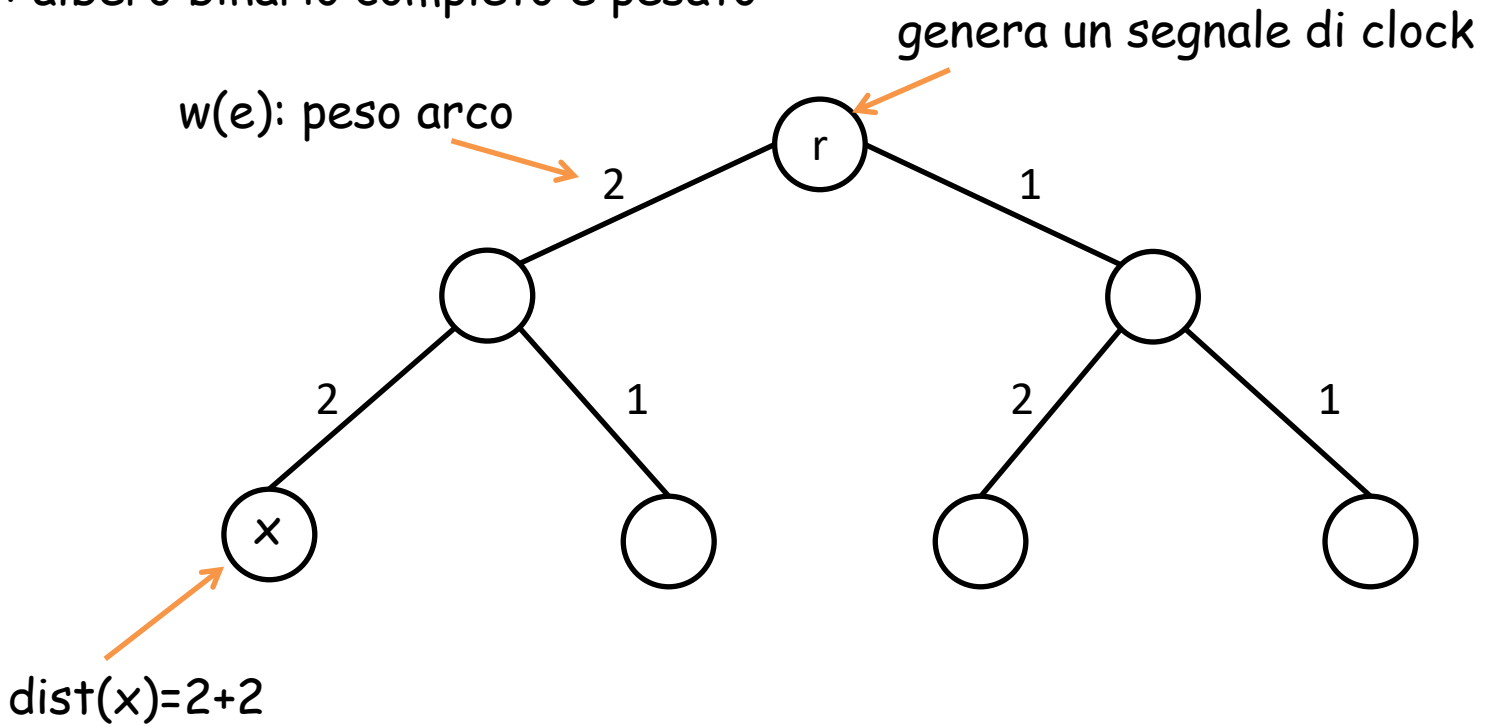
Sia $G = (V, E)$ un grafo con pesi positivi distinti sugli archi ed $e \in E$ un arco di G. Progettare un algoritmo lineare in grado di determinare se esiste un MST di G che contiene l'arco e.

problema 2

Esercizio #24 (pag. 200)

sincronizzazione di circuiti

T: albero binario completo e pesato



tempo a cui arriva il segnale

goal: sincronizzare le foglie: metterle tutte alla stessa distanza

come: posso incrementare i pesi degli archi

misura (da minimizzare): peso totale dell'albero risultante (min somma incrementi)

input:

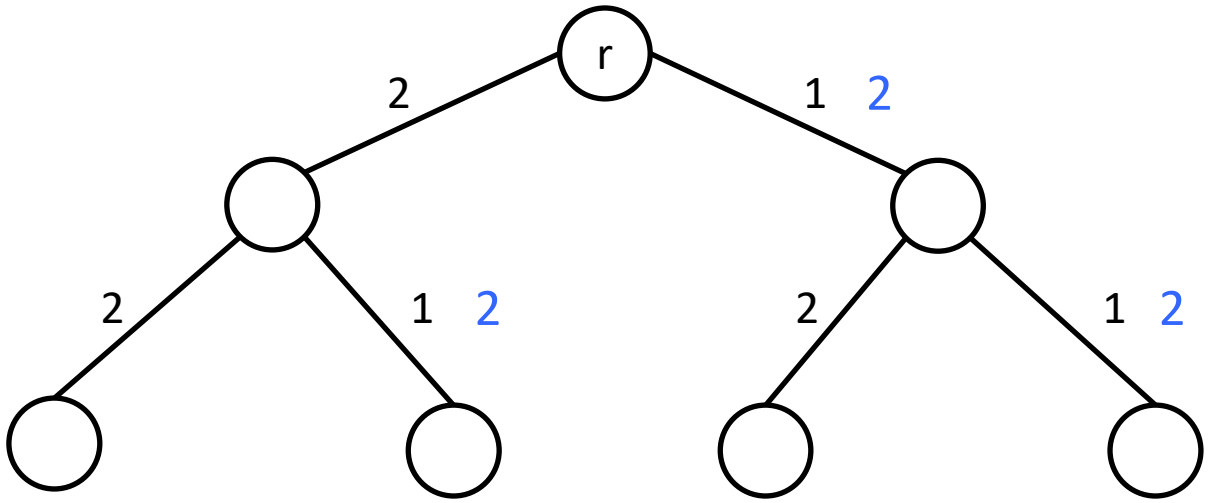
albero binario completo e pesato T

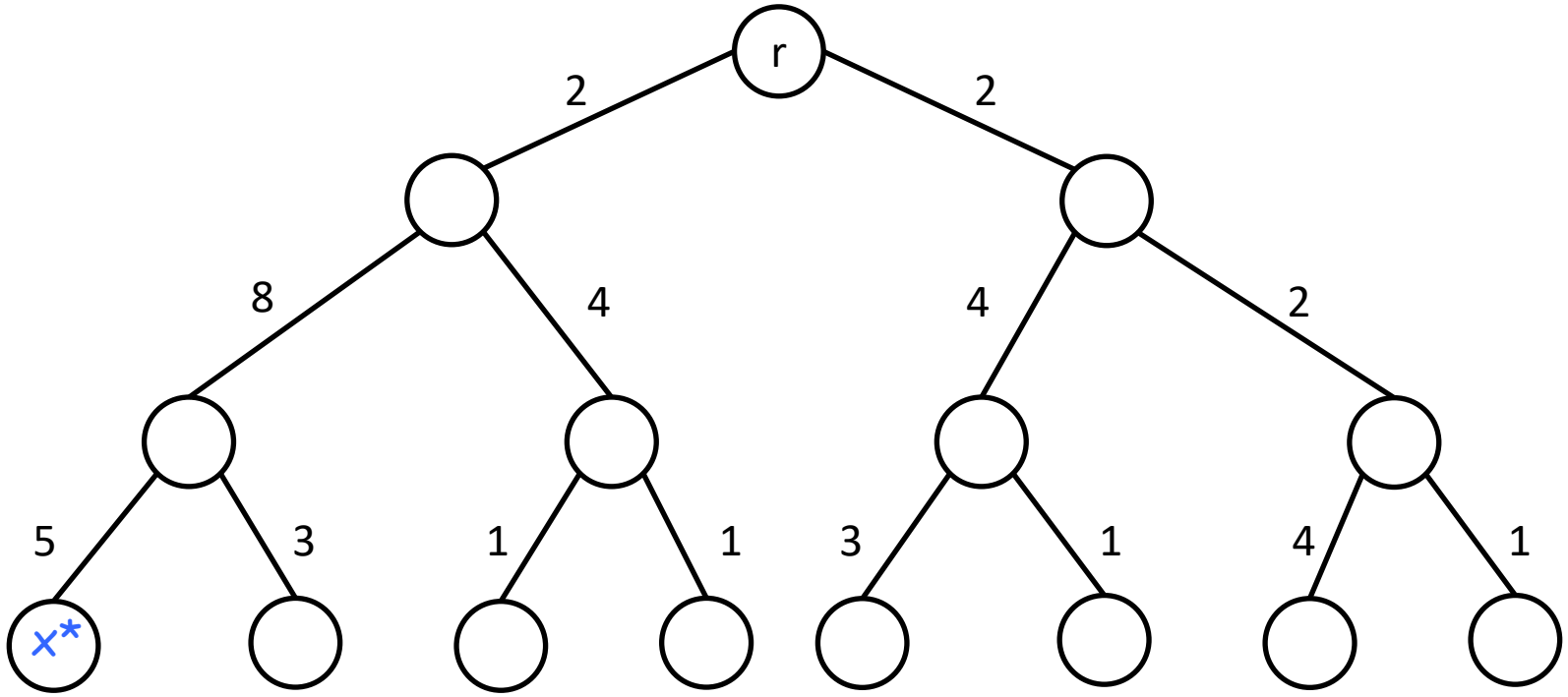
soluzione ammissibile:

nuova pesatura w' per T con $w'(e) \geq w(e)$ tale che tutte le foglie rispetto a w' hanno la stessa distanza dalla radice

misura (da minimizzare):

$w'(T)=\sum_e w'(e)$





x^*: foglia più lontana a distanza $L=15$

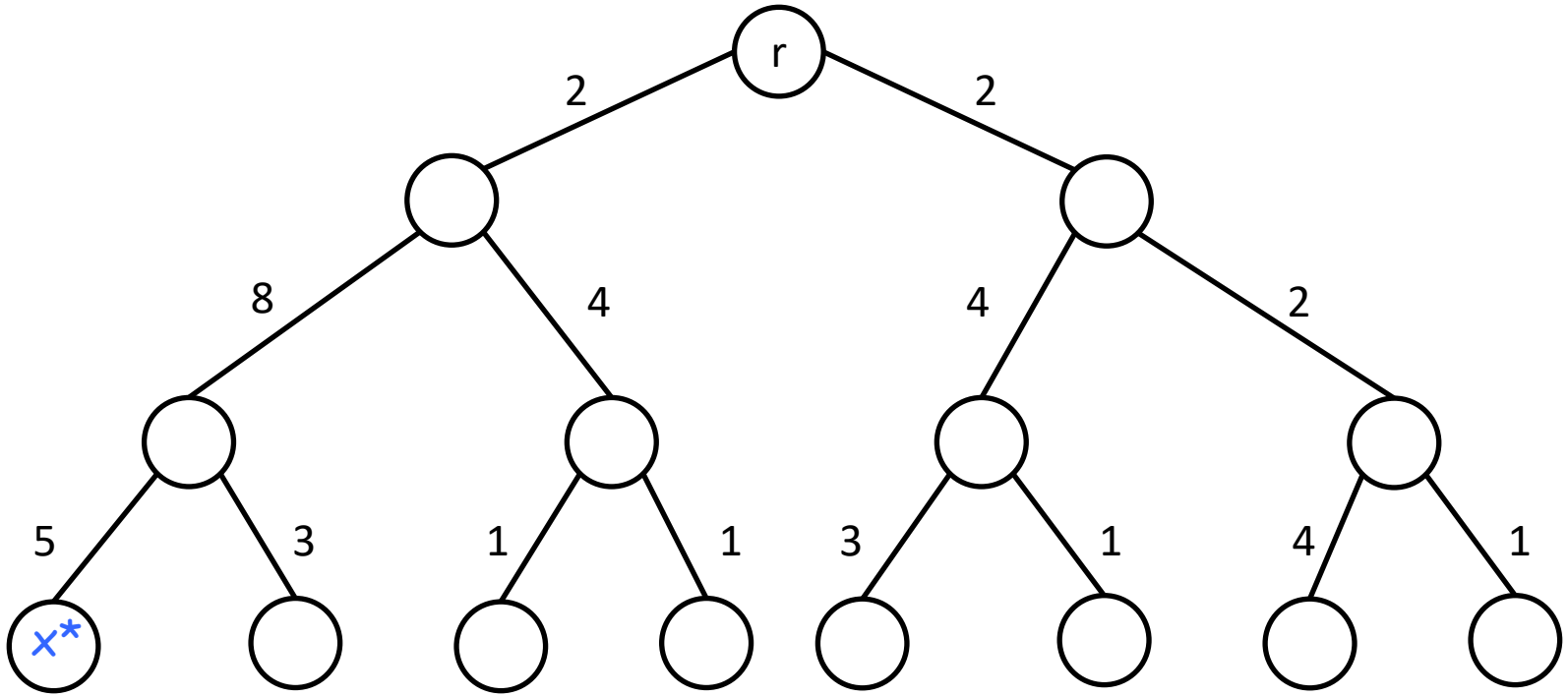
idea: mettere tutte le foglie a distanza $L=15$

intuizione: conviene aumentare gli archi "alti"

definizione: arco e copre una foglia x se il cammino dalla radice verso x passa per e

F: insieme delle foglie
F_e: insieme delle foglie coperte da e

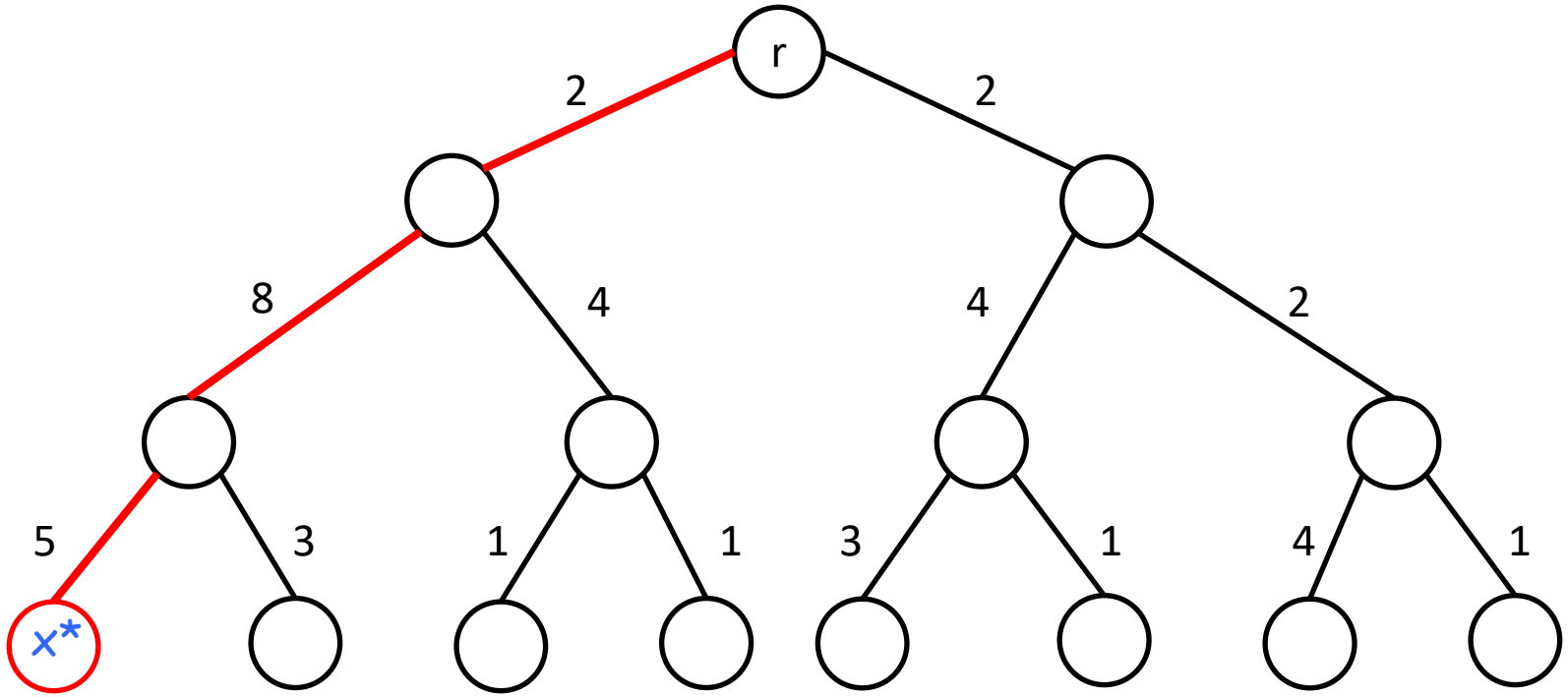
per ogni sottoinsieme di archi X
$\{F_e\}_{e \in X}$ famiglia laminare di insiemi:
per ogni e, e' in X
- $F_e \subseteq F_{e'}$ oppure $F_e \cap F_{e'} = \emptyset$



x^*: foglia più lontana a distanza $L=15$

algoritmo greedy:

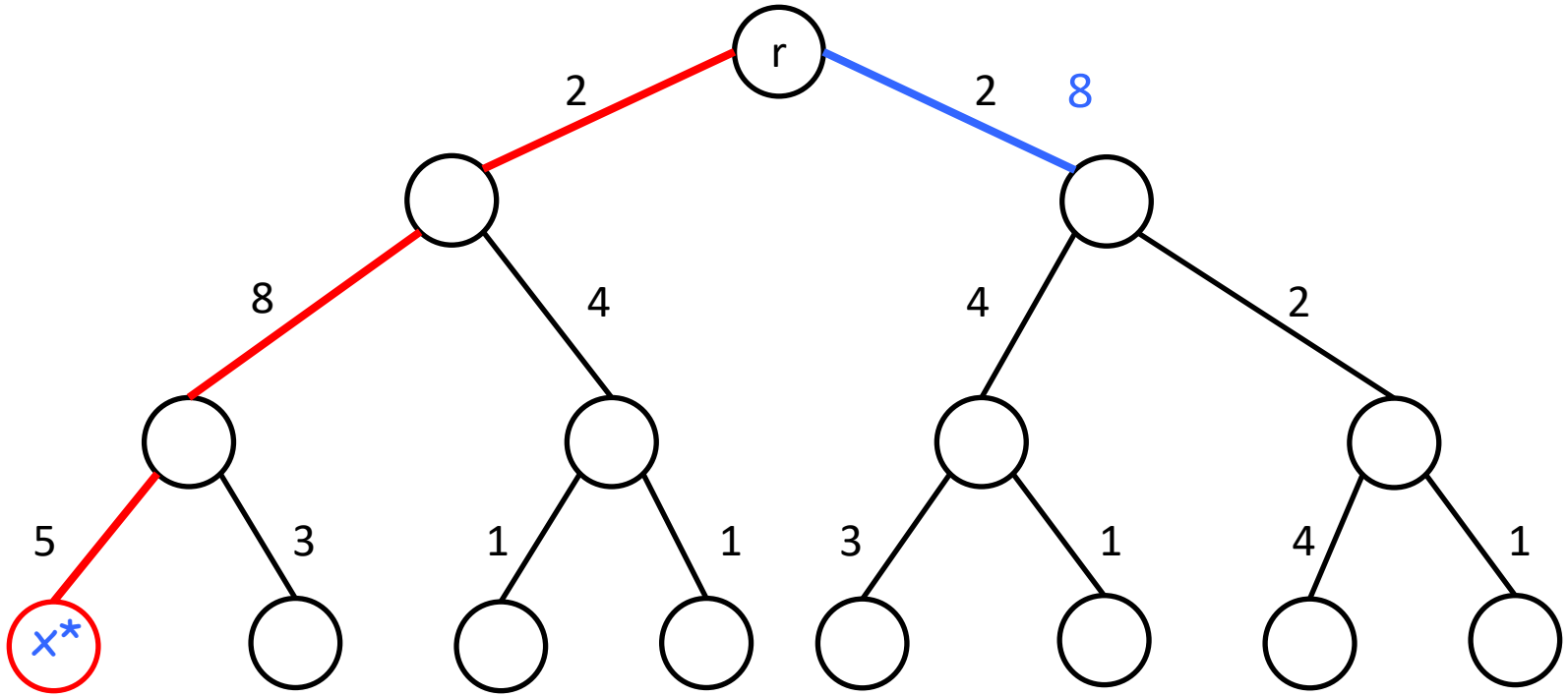
- marca tutti gli archi del cammino r-x^*
- considera gli archi di T top-down (in ordine ascendente di profondità)
  - se l'arco e non è marcato
    - alza il peso di e finché una foglia $x \in F_e$ non diventa a distanza L
    - marca tutti gli archi lungo il cammino verso x
- restituisci la nuova pesatura



x^*: foglia più lontana a distanza $L=15$

algoritmo greedy:

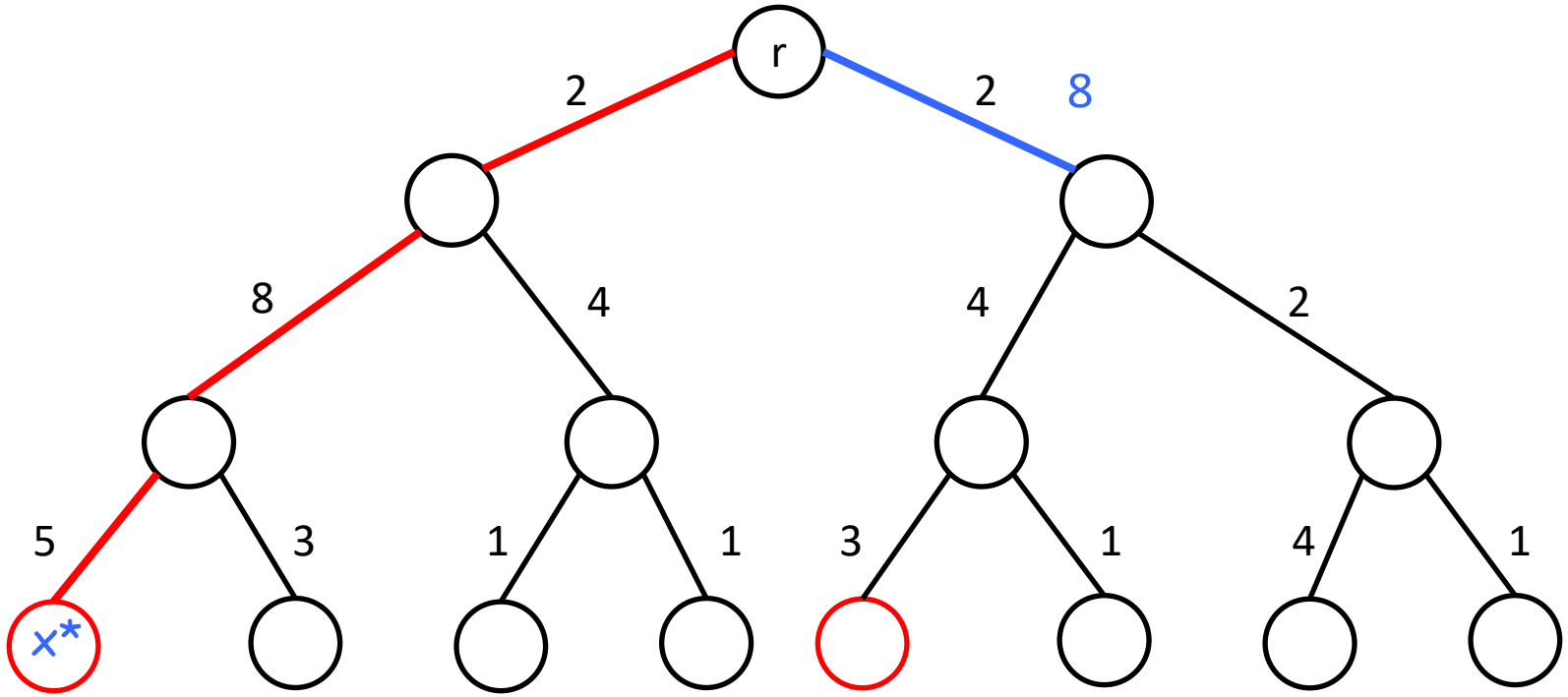
- marca tutti gli archi del cammino r-x^*
- considera gli archi di T top-down (in ordine ascendente di profondità)
  - se l'arco e non è marcato
    - alza il peso di e finché una foglia $x \in F_e$ non diventa a distanza L
    - marca tutti gli archi lungo il cammino verso x
- restituisci la nuova pesatura



x^*: foglia più lontana a distanza L=15

algoritmo greedy:

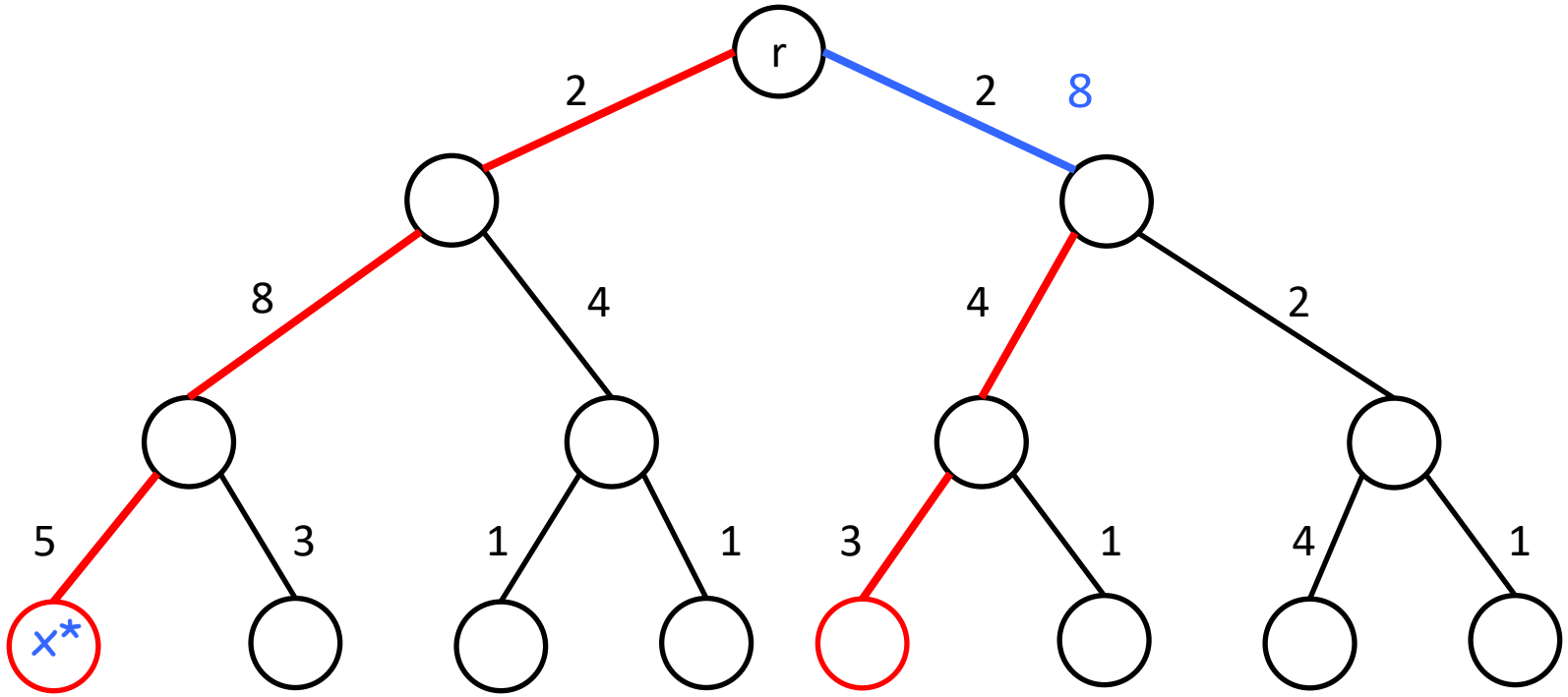
- marca tutti gli archi del cammino r-x^*
- considera gli archi di T top-down (in ordine ascendente di profondità)
  - se l'arco e non è marcato
    - alza il peso di e finché una foglia $x \in F_e$ non diventa a distanza L
    - marca tutti gli archi lungo il cammino verso x
- restituisci la nuova pesatura



x*: foglia più lontana a distanza L=15

algoritmo greedy:

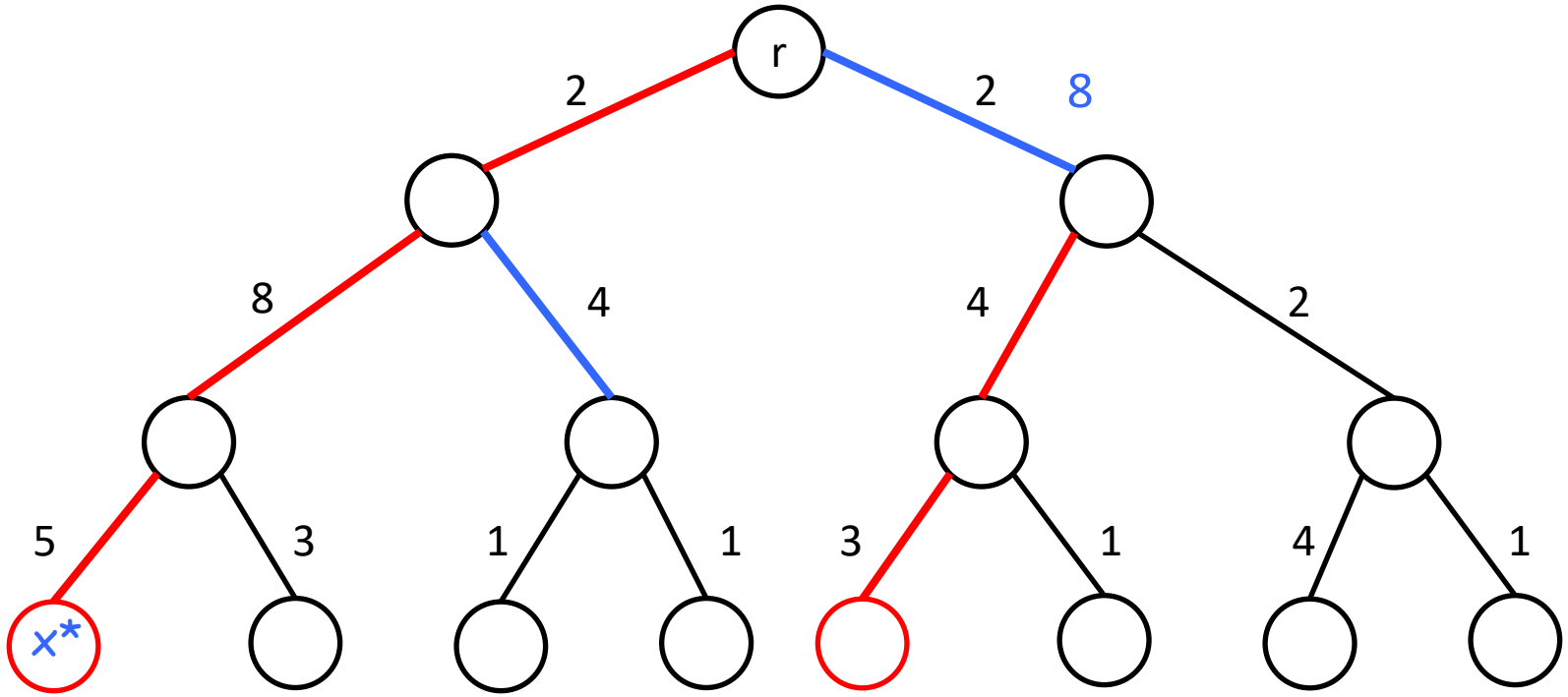
- marca tutti gli archi del cammino r-x*
- considera gli archi di T top-down (in ordine ascendente di profondità)
  - se l'arco e non è marcato
    - alza il peso di e finché una foglia $x \in F_e$ non diventa a distanza L
    - marca tutti gli archi lungo il cammino verso x
- restituisci la nuova pesatura



x^*: foglia più lontana a distanza L=15

algoritmo greedy:

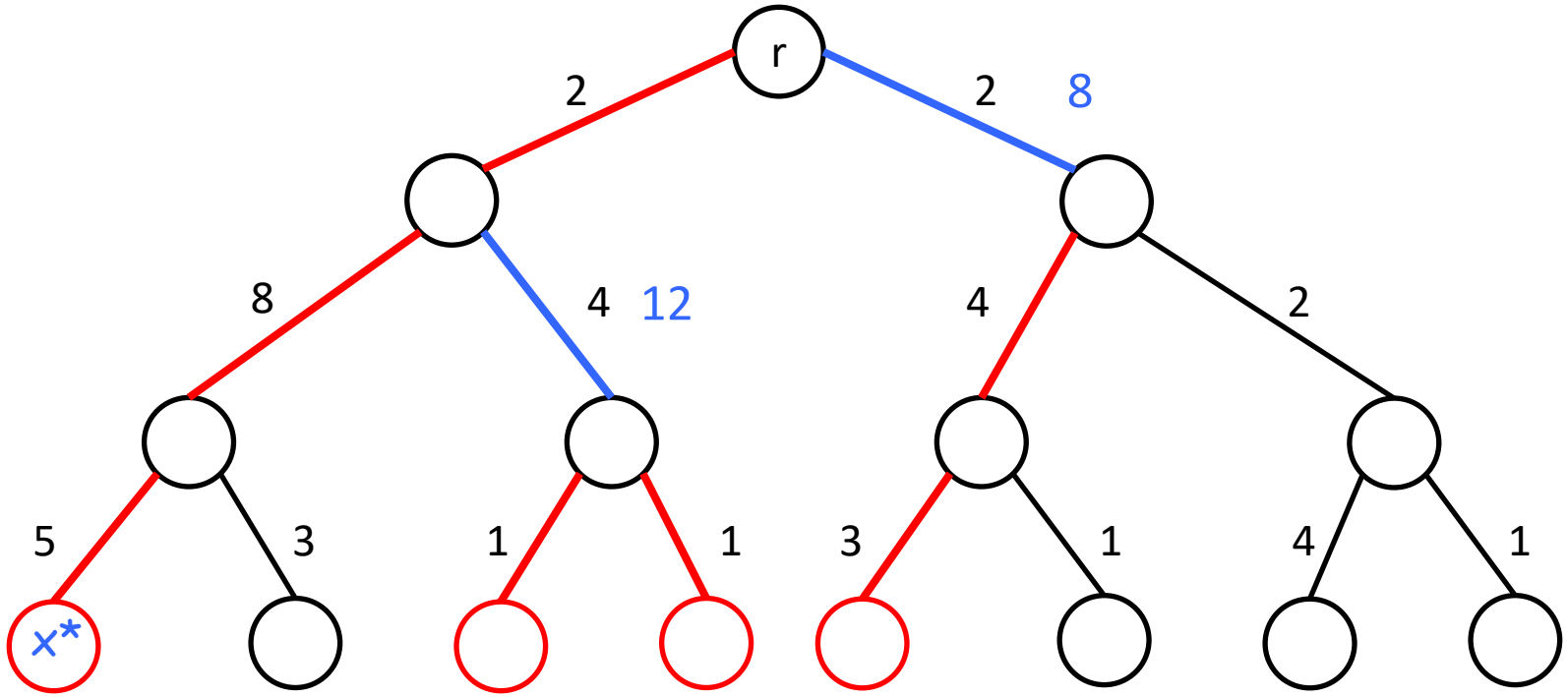
- marca tutti gli archi del cammino r-x^*
- considera gli archi di T top-down (in ordine ascendente di profondità)
  - se l'arco e non è marcato
    - alza il peso di e finché una foglia $x \in F_e$ non diventa a distanza L
    - marca tutti gli archi lungo il cammino verso x
- restituisci la nuova pesatura



x^*: foglia più lontana a distanza L=15

algoritmo greedy:

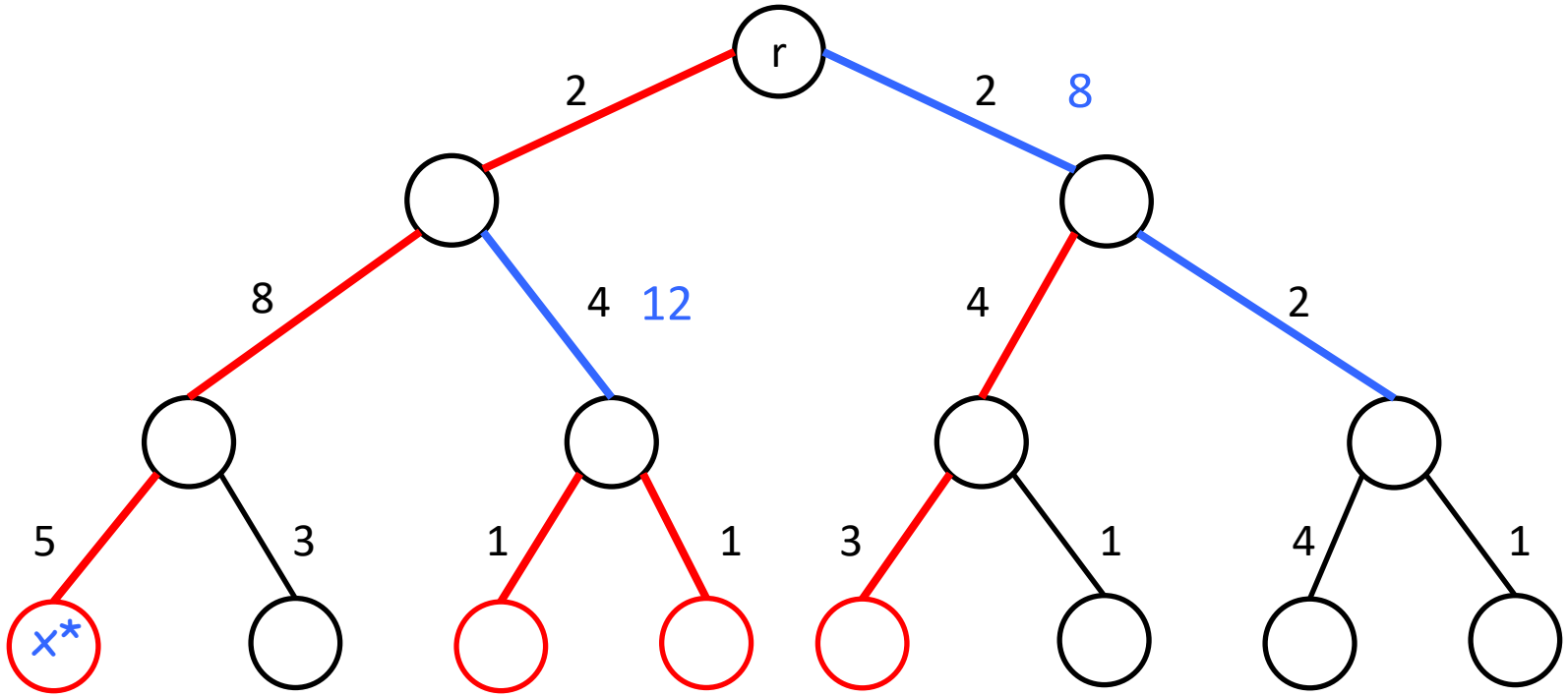
- marca tutti gli archi del cammino r-x^*
- considera gli archi di T top-down (in ordine ascendente di profondità)
  - se l'arco e non è marcato
    - alza il peso di e finché una foglia $x \in F_e$ non diventa a distanza L
    - marca tutti gli archi lungo il cammino verso x
- restituisci la nuova pesatura



x*: foglia più lontana a distanza L=15

algoritmo greedy:

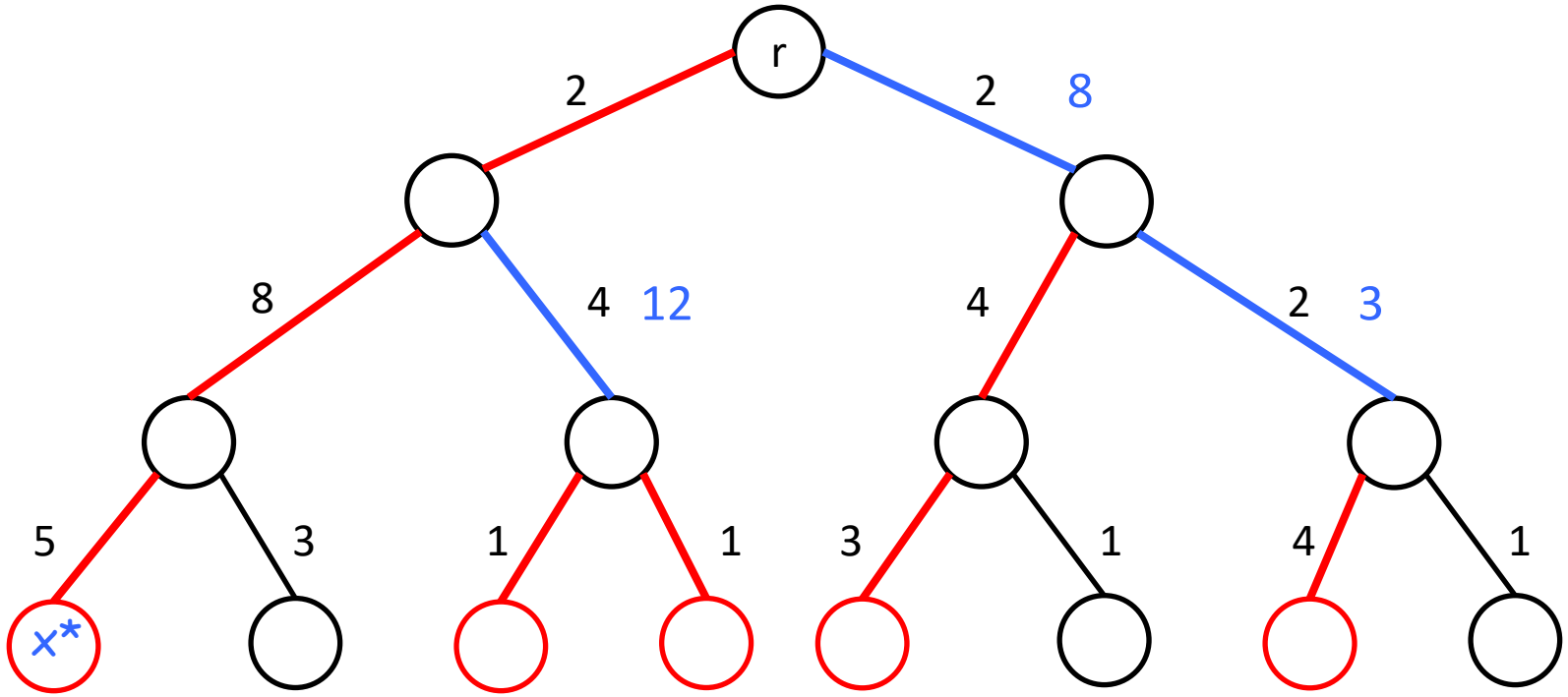
- marca tutti gli archi del cammino r-x*
- considera gli archi di T top-down (in ordine ascendente di profondità)
  - se l'arco e non è marcato
    - alza il peso di e finché una foglia $x \in F_e$ non diventa a distanza L
    - marca tutti gli archi lungo il cammino verso x
- restituisci la nuova pesatura



x*: foglia più lontana a distanza L=15

algoritmo greedy:

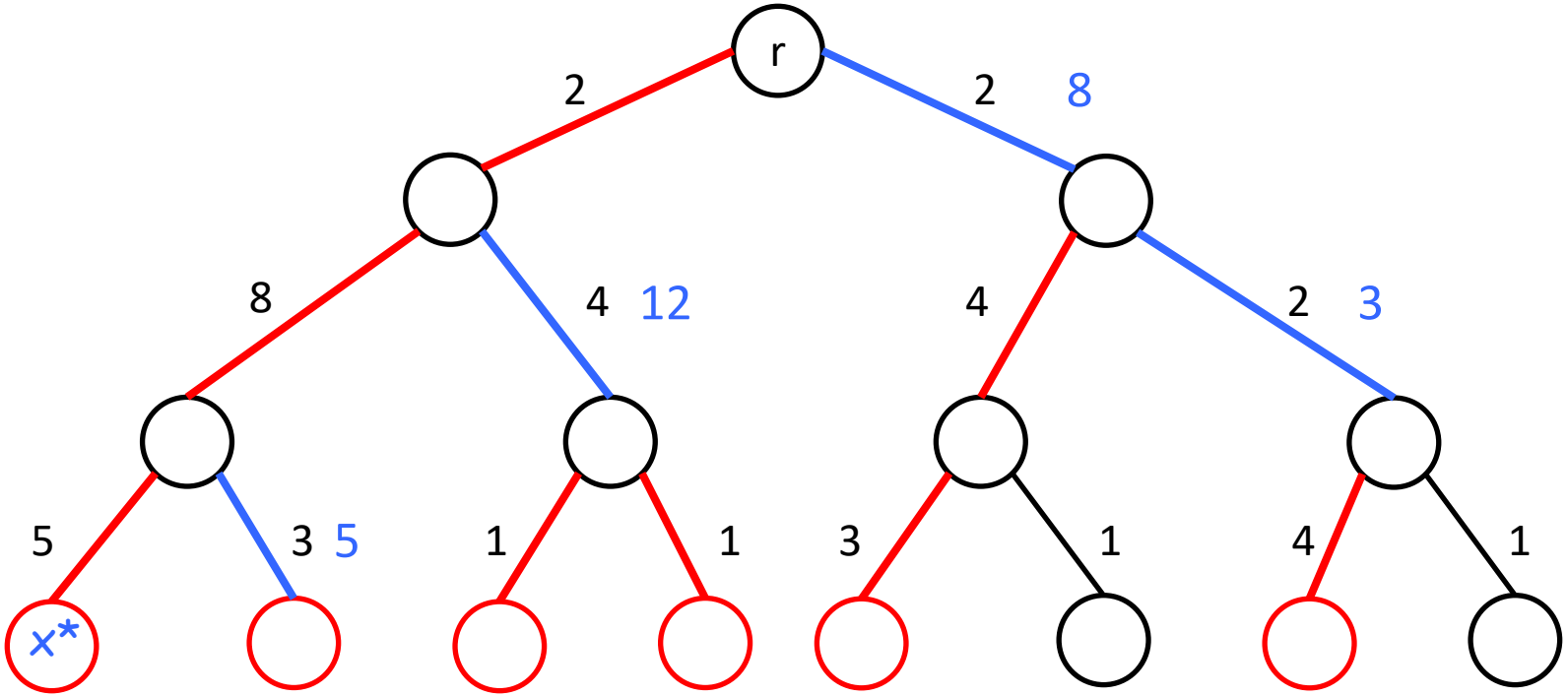
- marca tutti gli archi del cammino r-x*
- considera gli archi di T top-down (in ordine ascendente di profondità)
  - se l'arco e non è marcato
    - alza il peso di e finché una foglia $x \in F_e$ non diventa a distanza L
    - marca tutti gli archi lungo il cammino verso x
- restituisci la nuova pesatura



x*: foglia più lontana a distanza L=15

algoritmo greedy:

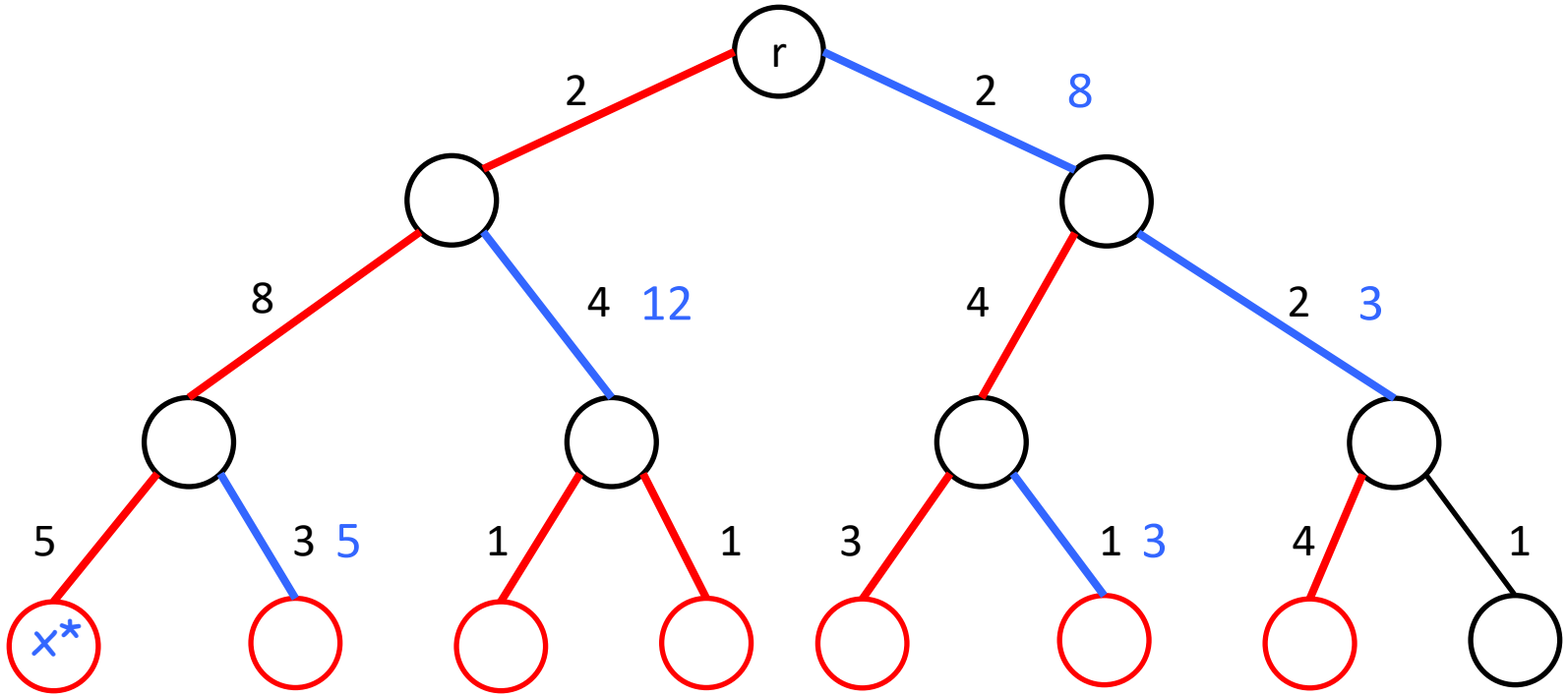
- marca tutti gli archi del cammino r-x*
- considera gli archi di T top-down (in ordine ascendente di profondità)
  - se l'arco e non è marcato
    - alza il peso di e finché una foglia $x \in F_e$ non diventa a distanza L
    - marca tutti gli archi lungo il cammino verso x
- restituisci la nuova pesatura



x*: foglia più lontana a distanza L=15

algoritmo greedy:

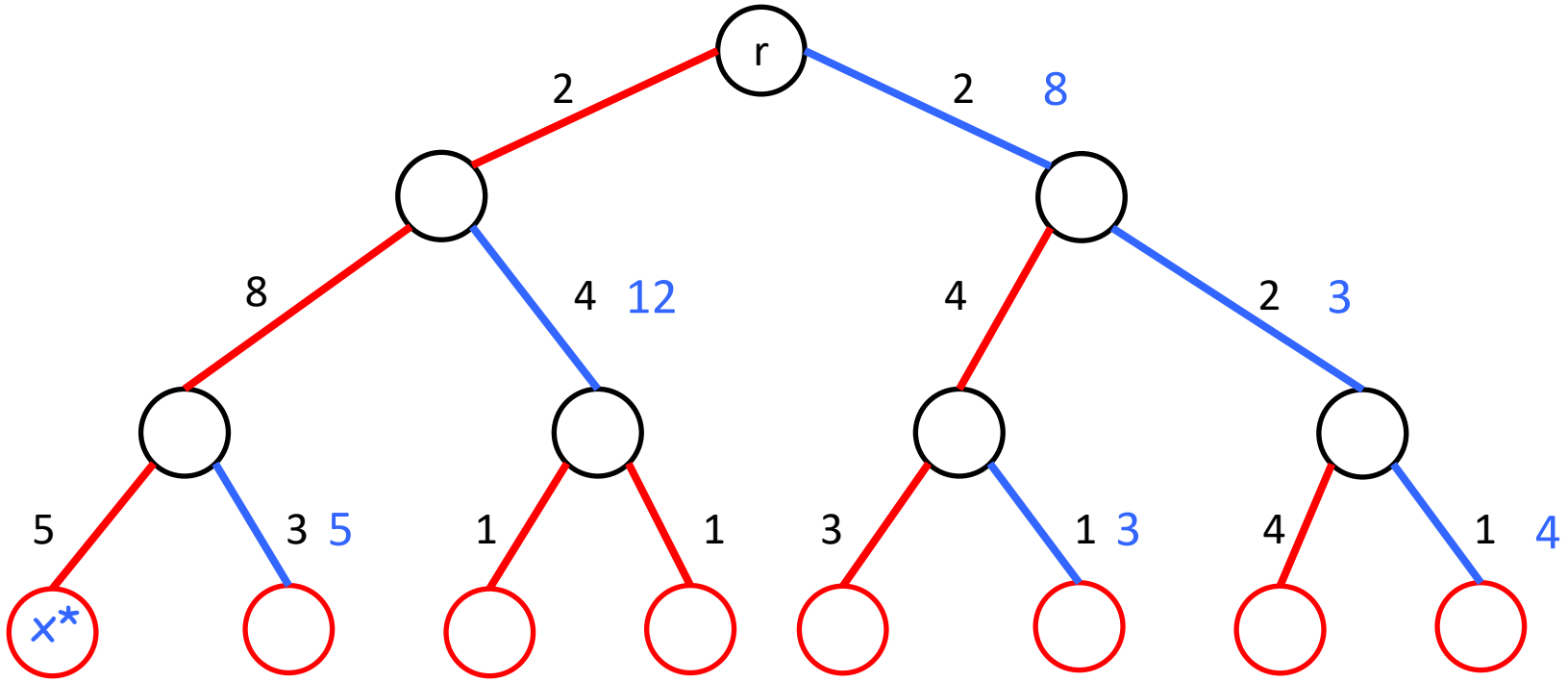
- marca tutti gli archi del cammino r-x*
- considera gli archi di T top-down (in ordine ascendente di profondità)
  - se l'arco e non è marcato
    - alza il peso di e finché una foglia $x \in F_e$ non diventa a distanza L
    - marca tutti gli archi lungo il cammino verso x
- restituisci la nuova pesatura



x*: foglia più lontana a distanza L=15

algoritmo greedy:

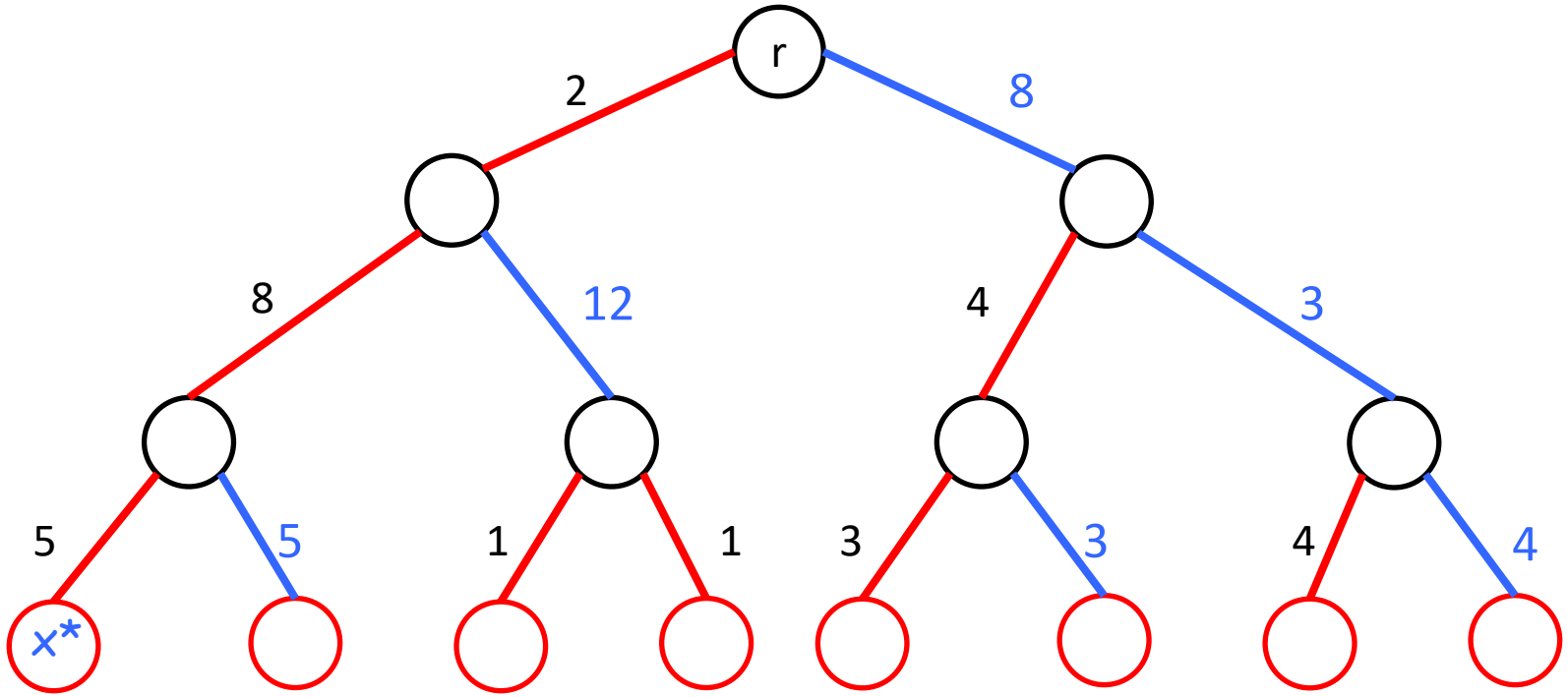
- marca tutti gli archi del cammino r-x*
- considera gli archi di T top-down (in ordine ascendente di profondità)
  - se l'arco e non è marcato
    - alza il peso di e finché una foglia $x \in F_e$ non diventa a distanza L
    - marca tutti gli archi lungo il cammino verso x
- restituisci la nuova pesatura



x*: foglia più lontana a distanza L=15

algoritmo greedy:

- marca tutti gli archi del cammino r-x*
- considera gli archi di T top-down (in ordine ascendente di profondità)
  - se l'arco e non è marcato
    - alza il peso di e finché una foglia $x \in F_e$ non diventa a distanza L
    - marca tutti gli archi lungo il cammino verso x
- restituisci la nuova pesatura



x*: foglia più lontana a distanza L=15

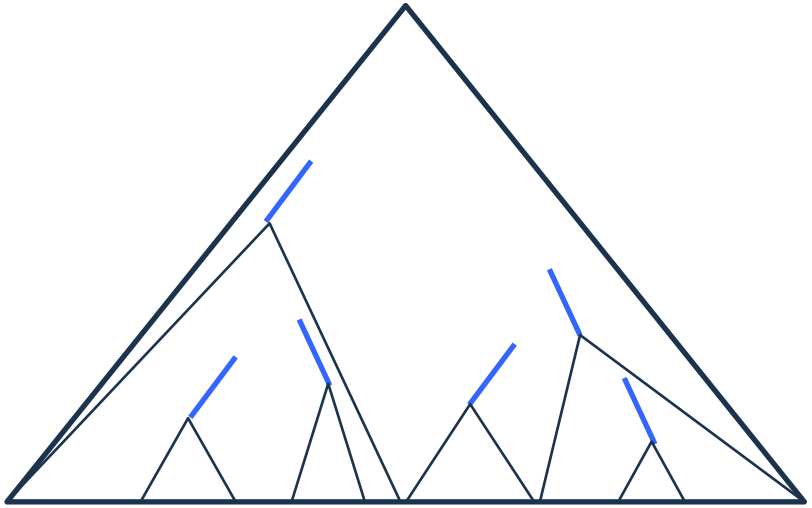
algoritmo greedy:

- marca tutti gli archi del cammino r-x*
- considera gli archi di T top-down (in ordine ascendente di profondità)
  - se l'arco e non è marcato
    - alza il peso di e finché una foglia $x \in F_e$ non diventa a distanza L
    - marca tutti gli archi lungo il cammino verso x
- restituisci la nuova pesatura

dimostrazione di ottimalità

claim: una soluzione ottima mette tutte le foglie a distanza L

supponi Opt mette tutte le foglie a distanza L'>L



X: archi incrementati da Opt

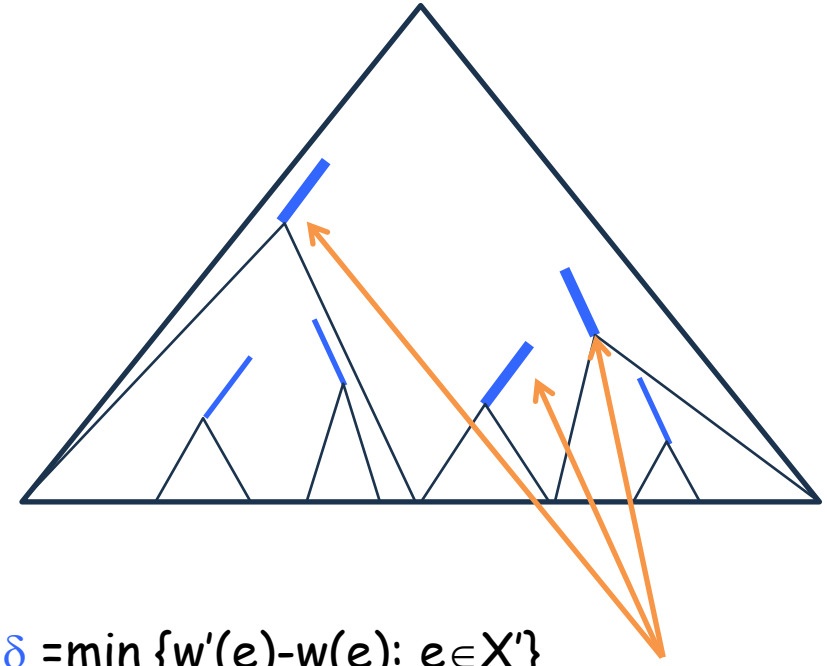
poiché tutte le foglie hanno aumentato la loro distanza:

$\bigcup_{e \in X} F_e = F$

$X' \subseteq X$: tale che ogni foglia è coperta da un solo $e \in X'$

claim: una soluzione ottima mette tutte le foglie a distanza L

supponi Opt mette tutte le foglie a distanza L'>L



X: archi incrementati da Opt

poiché tutte le foglie hanno aumentato la loro distanza:

$\bigcup_{e \in X} F_e = F$

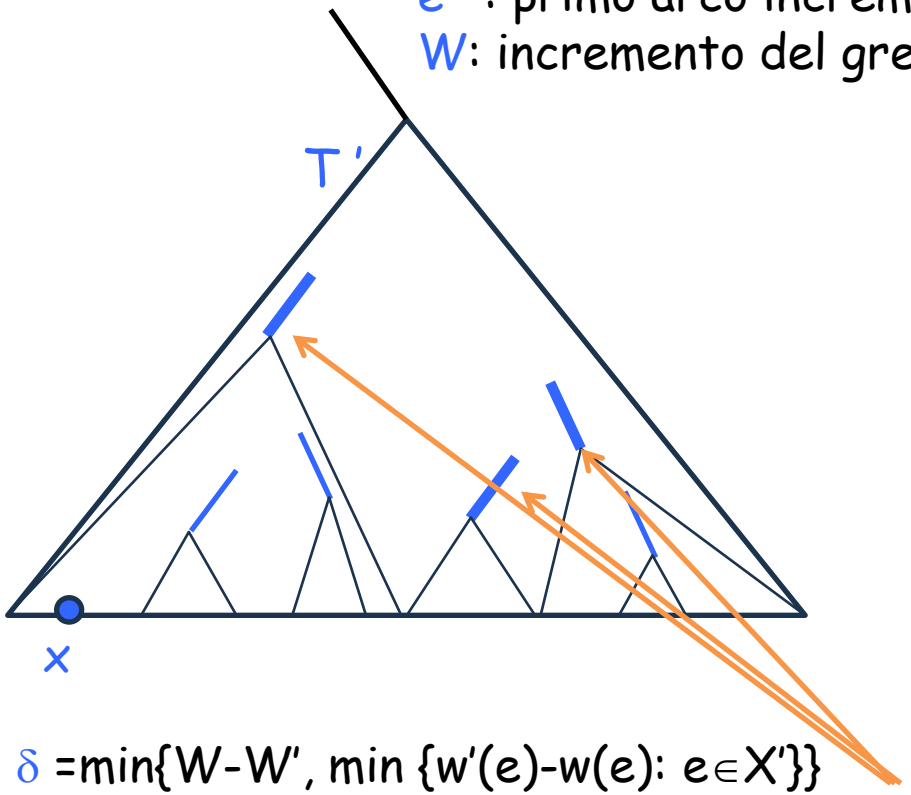
$X' \subseteq X$: tale che ogni foglia è coperta da un solo $e \in X'$

$\delta = \min \{w'(e)-w(e): e \in X'\}$

decremento di δ e ottengo una soluzione ammissibile strettamente migliore

allora Opt non era ottima: assurdo!

idea: faccio vedere che il greedy non sbaglia mai



e^* : primo arco incrementato dal greedy
W: incremento del greedy che porta x a distanza L

assumi Opt incrementa e^* di $W'<W$

X: archi incrementati da Opt in T'

poiché tutte le foglie di T 'devono aumentare la loro distanza:

$\cup_{e\in X} F_e$ =foglie di T '

$X'\subseteq X$: tale che ogni foglia di T ' è coperta da un solo $e\in X'$

nota: $|X'|\geq 2$

δ =min{W-W', min {w'(e)-w(e): $e\in X'$}}

decremento di δ e incremento e^* di δ
ottengo una soluzione ammissibile strettamente migliore

allora Opt non era ottima: assurdo!

Quindi l'ottimo deve incrementare e^* come il greedy: stesse argomentazioni per i prossimi archi.