Esercitazione 6 novembre 2025

Problema

Dimostrare o confutare la seguente affermazione:
Siano $f(n)$ e $g(n)$ due funzioni sempre non negative. Allora vale:

$f(n)=O(g(n))$ implica $2^{f(n)}=O(2^{g(n)})$

Soluzione:

La relazione è falsa in generale. La seguente coppia di funzioni rappresenta un controesempio:

$f(n)=n \qquad g(n)=n/2$

infatti vale:

$n=O(n/2)$
ma
$2^n \neq O(2^{n/2}) \qquad [2^n = \omega(2^{n/2})]$

Problema

Progettare un algoritmo (efficiente) che, dato un array ordinato $A[1:n]$ di n interi e un intero x, trova (se esistono) due indici i e j, $i<j$, tale che $A[i]+A[j]=x$.

A								
	2	5	9	14	20	21	25	40
	1	2	3	4	5	6	7	8

$x=26$ ⇒ $i=2$ $j=6$

$x=23$ ⇒ $i=3$ $j=4$

$x=20$ ⇒ $i=-1$ $j=-1$ (non esistono $i<j$ con $A[i]+A[j]=20$)

idea: provo tutte le coppie di indici i,j

```
Banale(A,x)
for i=1 to n-1 do
   for j=i+1 to n do
      if (A[i]+A[j]=x)  then return (i,j)
 return (-1,-1)
```

correttezza?

ovvia.

complessità?

$\Theta(n^2)$

si può fare meglio?

idea:
per ogni valore dell'indice i, cerco l'opportuno j usando la ricerca binaria

```
MenoBanale(A,x)
for i=1 to n-1 do
   j=RicercaBinaria(A,x-A[i],i+1,n)
   if (j ≠-1)  then return (i,j)
 return (-1,-1)
```

correttezza?

ovvia.

complessità?

$O(n \log n)$

si può fare meglio?

idea:
scansionare l'array "parallelmente" da sinistra e da destra.

Lineare(A,x)

i=1; j=n;

while i<j **do**

  if A[i]+A[j]=x **then return** (i,j);

  if A[i]+A[j]<x **then** i++ **else** j--

return (-1,-1)

complessità?

O(n)

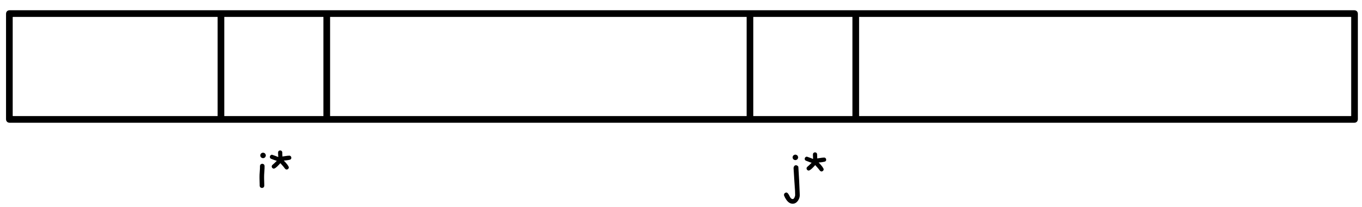
correttezza?

Correttezza

Osservazione:
Se non esistono due elementi di A che sommano a x l'algoritmo Lineare risponde sicuramente bene, ovvero restituisce (-1,-1)

E se esistono due elementi che sommano a x?

Siano i* e j* tale che A[i*]+A[j*]=x



Per come si muovono gli indici, ad un certo punto succede una di queste due cose:

1) i=i* e j>j*

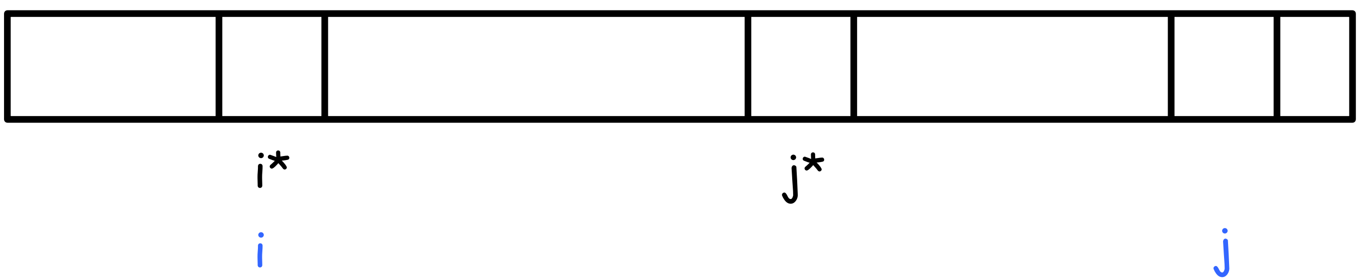
2) i<i* e j=j*

Correttezza

Osservazione:
Se non esistono due elementi di A che sommano a x l'algoritmo Lineare risponde sicuramente bene, ovvero restituisce (-1,-1)

E se esistono due elementi che sommano a x?

Siano i* e j* tale che A[i*]+A[j*]=x



A è ordinato, quindi A[i]+A[j]≥x ⟹ algoritmo decrementa j

Per come si muovono gli indici, ad un certo punto succede una di queste due cose:

1) i=i* e j>j*

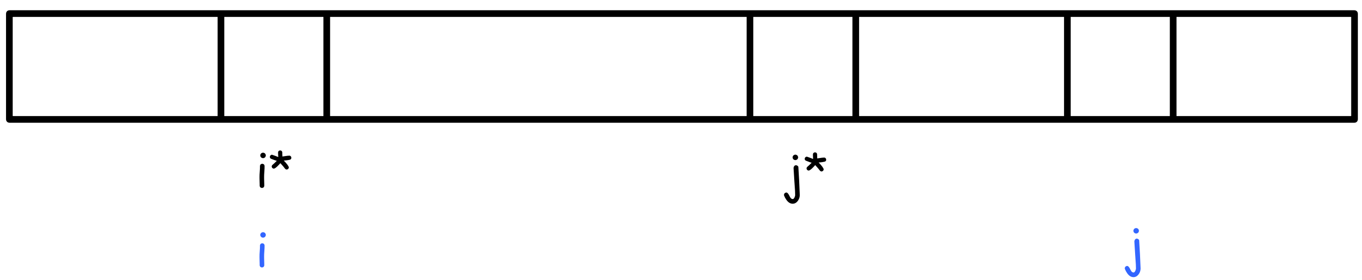
2) i<i* e j=j*

Correttezza

Osservazione:
Se non esistono due elementi di A che sommano a x l'algoritmo Lineare risponde sicuramente bene, ovvero restituisce (-1,-1)

E se esistono due elementi che sommano a x?

Siano i* e j* tale che A[i*]+A[j*]=x



A è ordinato, quindi $A[i]+A[j] \geq x$ ⟹ algoritmo decrementa j

Per come si muovono gli indici, ad un certo punto succede una di queste due cose:

1) i=i* e j>j*

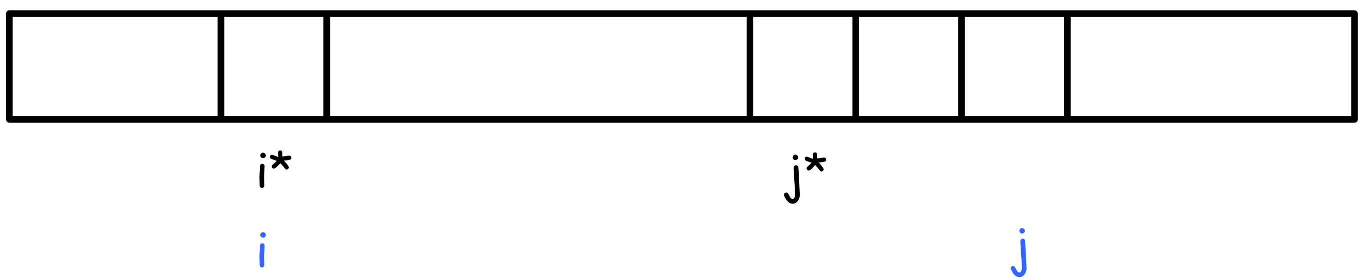
2) i<i* e j=j*

Correttezza

Osservazione:
Se non esistono due elementi di A che sommano a x l'algoritmo Lineare risponde sicuramente bene, ovvero restituisce (-1,-1)

E se esistono due elementi che sommano a x?

Siano i* e j* tale che A[i*]+A[j*]=x



A è ordinato, quindi $A[i]+A[j] \geq x$ $\Rightarrow$ algoritmo decrementa j

Per come si muovono gli indici, ad un certo punto succede una di queste due cose:

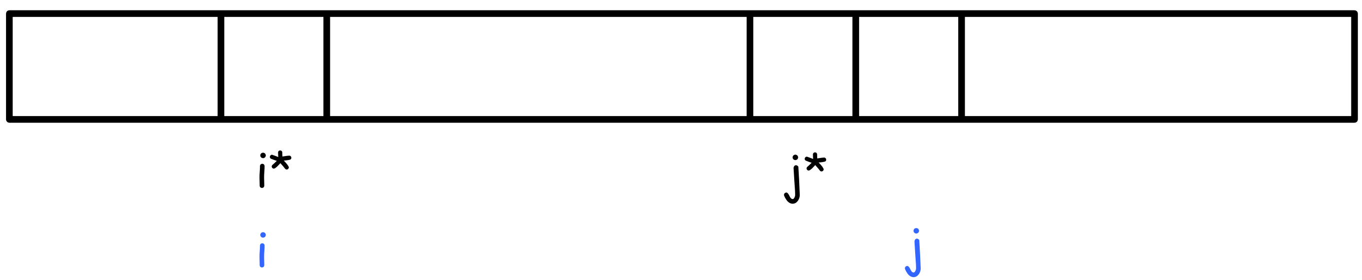
1) i=i* e j>j*

2) i<i* e j=j*

Osservazione:
Se non esistono due elementi di A che sommano a x l'algoritmo Lineare risponde sicuramente bene, ovvero restituisce (-1,-1)

E se esistono due elementi che sommano a x?

Siano i* e j* tale che A[i*]+A[j*]=x



A è ordinato, quindi A[i]+A[j]≥x $\Rightarrow$ algoritmo decrementa j

Per come si muovono gli indici, ad un certo punto succede una di queste due cose:

1) i=i* e j>j*

2) i<i* e j=j*

Correttezza

Osservazione:
Se non esistono due elementi di A che sommano a x l'algoritmo Lineare risponde sicuramente bene, ovvero restituisce (-1,-1)

E se esistono due elementi che sommano a x?

Siano i* e j* tale che A[i*]+A[j*]=x

algoritmo ha trovato (i*,j*)!

A è ordinato, quindi A[i]+A[j]≥x $\Longrightarrow$ algoritmo decrementa j

Per come si muovono gli indici, ad un certo punto succede una di queste due cose:

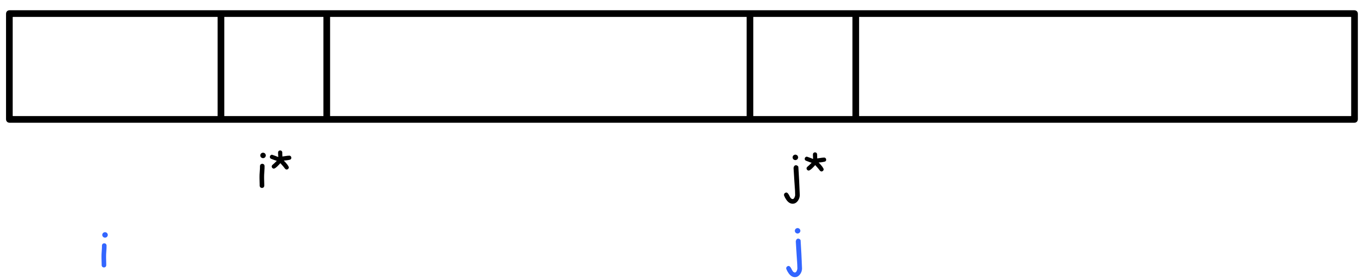
1) i=i* e j>j*

2) i<i* e j=j*

Osservazione:
Se non esistono due elementi di A che sommano a x l'algoritmo Lineare risponde sicuramente bene, ovvero restituisce (-1,-1)

E se esistono due elementi che sommano a x?

Siano i* e j* tale che A[i*]+A[j*]=x



caso 2 analogo

Per come si muovono gli indici, ad un certo punto succede una di queste due cose:

1) i=i* e j>j*

2) i<i* e j=j*

...prossima settimana farà lezione...

dottor maestro Alessandro Straziota