Esercitazione 2 novembre 2023

Problema

Dimostrare o confutare la seguente affermazione:
Siano f(n) e g(n) due funzioni sempre non negative. Allora vale:

$f(n)=O(g(n))$ implica $2^{f(n)}=O(2^{g(n)})$

Soluzione:

La relazione è falsa in generale. La seguente coppia di funzioni rappresenta un controesempio:

$f(n)=n \qquad g(n)=n/2$

infatti vale:

$n=O(n/2)$

ma

$2^n \neq O(2^{n/2}) \qquad [2^n=\omega(2^{n/2})]$

Problema

Progettare un algoritmo (efficiente) che, dato un array ordinato A[1:n] di n interi e un intero x, trova (se esistono) due indici i e j, i<j, tale che A[i]+A[j]=x.

A	2	5	9	14	20	21	25	40
	1	2	3	4	5	6	7	8

$x=26$ ⇒ $i=2$ $j=6$

$x=23$ ⇒ $i=3$ $j=4$

$x=20$ ⇒ $i=-1$ $j=-1$ (non esistono i <j con A[i]+A[j]=20)

idea: provo tutte le coppie di indici i,j

Banale(A,x)

for i=1 to n-1 do

  for j=i+1 to n do

    if (A[i]+A[j]=x) **then return** (i,j)

return (-1,-1)

correttezza?

ovvia.

complessità?

$\Theta(n^2)$

si può fare meglio?

idea:

per ogni valore dell'indice i, cerco l'opportuno j usando la ricerca binaria

```
MenoBanale(A,x)
for i=1 to n-1 do
   j=RicercaBinaria(A,x-A[i],i+1,n)
   if (j ≠-1)  then return (i,j)
 return (-1,-1)
```

correttezza?

ovvia.

complessità?

$O(n \log n)$

si può fare meglio?

idea:
scansionare l'array "parallelmente" da sinistra e da destra.

```
Lineare(A,x)
i=1; j=n;
while i<j do
   if A[i]+A[j]=x then return (i,j);
   if A[i]+A[j]<x then i++ else j--
return (-1,-1)
```

complessità?

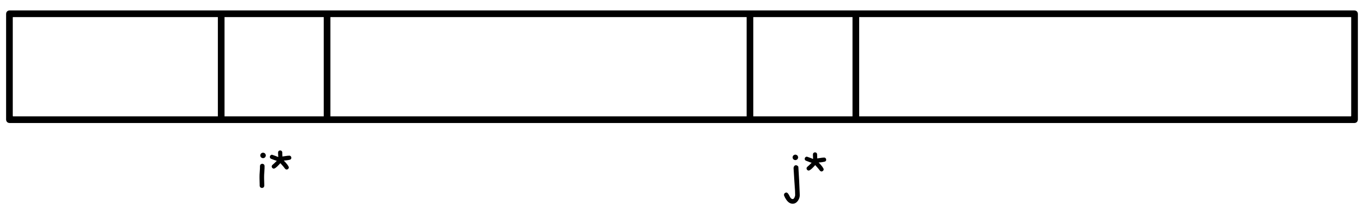
$O(n)$

correttezza?

Osservazione:
Se non esistono due elementi di A che sommano a x l'algoritmo Lineare risponde sicuramente bene, ovvero restituisce (-1,-1)

E se esistono due elementi che sommano a x?

Siano i^* e j^* tale che $A[i^*]+A[j^*]=x$



Per come si muovono gli indici, ad un certo punto succede una di queste due cose:

1) $i=i^*$ e $j>j^*$

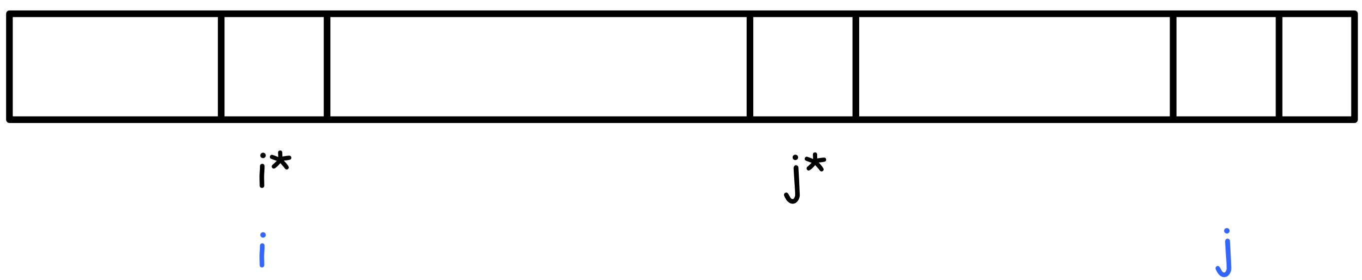
2) $i<i^*$ e $j=j^*$

Correttezza

Osservazione:
Se non esistono due elementi di A che sommano a x l'algoritmo Lineare risponde sicuramente bene, ovvero restituisce (-1,-1)

E se esistono due elementi che sommano a x?

Siano i* e j* tale che A[i*]+A[j*]=x



A è ordinato, quindi A[i]+A[j]≥x ⟹ algoritmo decrementa j

Per come si muovono gli indici, ad un certo punto succede una di queste due cose:

1) i=i* e j>j*

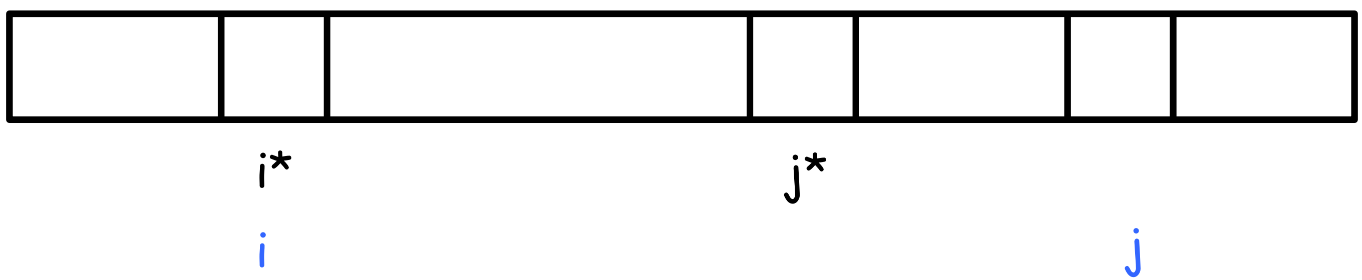
2) i<i* e j=j*

Correttezza

Osservazione:
Se non esistono due elementi di A che sommano a x l'algoritmo Lineare risponde sicuramente bene, ovvero restituisce (-1,-1)

E se esistono due elementi che sommano a x?

Siano i* e j* tale che A[i*]+A[j*]=x



A è ordinato, quindi $A[i]+A[j] \geq x$ $\Rightarrow$ algoritmo decrementa j

Per come si muovono gli indici, ad un certo punto succede una di queste due cose:

1) i=i* e j>j*

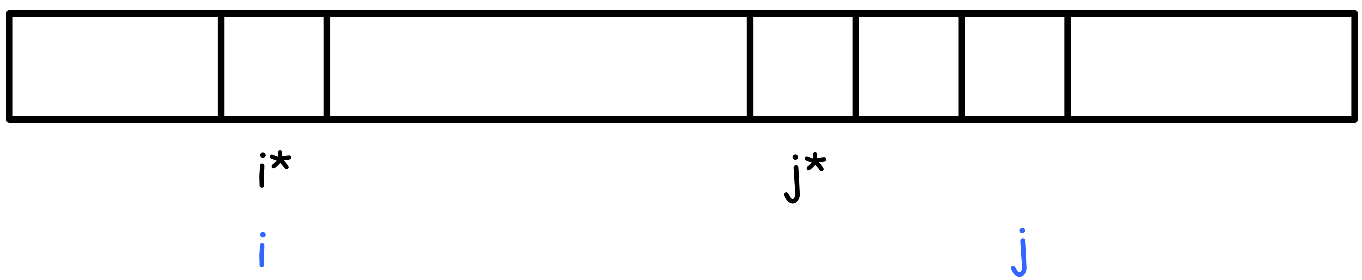
2) i<i* e j=j*

Correttezza

Osservazione:
Se non esistono due elementi di A che sommano a x l'algoritmo Lineare risponde sicuramente bene, ovvero restituisce (-1,-1)

E se esistono due elementi che sommano a x?

Siano i^* e j^* tale che $A[i^*]+A[j^*]=x$



A è ordinato, quindi $A[i]+A[j] \geq x$ $\Rightarrow$ algoritmo decrementa j

Per come si muovono gli indici, ad un certo punto succede una di queste due cose:

1) $i=i^*$ e $j>j^*$

2) $i<i^*$ e $j=j^*$

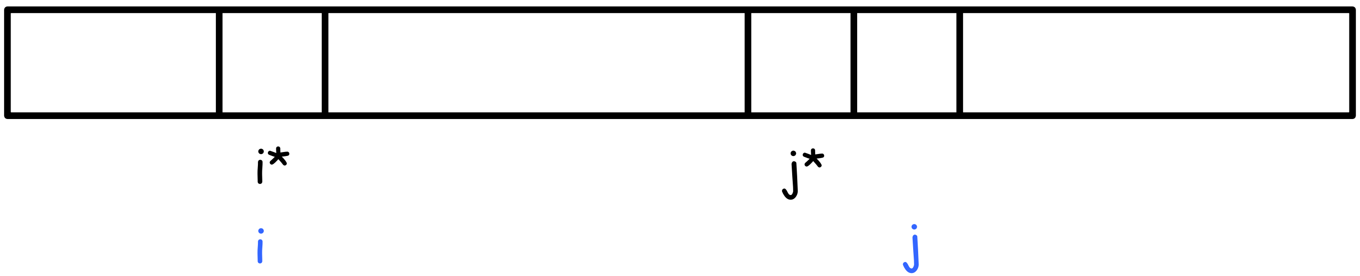
Correttezza

Osservazione:

Se non esistono due elementi di A che sommano a x l'algoritmo Lineare risponde sicuramente bene, ovvero restituisce (-1,-1)

E se esistono due elementi che sommano a x?

Siano i* e j* tale che A[i*]+A[j*]=x



A è ordinato, quindi A[i]+A[j]≥x ⟹ algoritmo decrementa j

Per come si muovono gli indici, ad un certo punto succede una di queste due cose:

1) i=i* e j>j*

2) i<i* e j=j*

Correttezza

Osservazione:
Se non esistono due elementi di A che sommano a x l'algoritmo Lineare risponde sicuramente bene, ovvero restituisce (-1,-1)

E se esistono due elementi che sommano a x?

Siano i* e j* tale che A[i*]+A[j*]=x

algoritmo ha trovato (i*,j*)!

A è ordinato, quindi $A[i]+A[j] \geq x$ $\Rightarrow$ algoritmo decrementa j

Per come si muovono gli indici, ad un certo punto succede una di queste due cose:

1) i=i* e j>j*

2) i<i* e j=j*

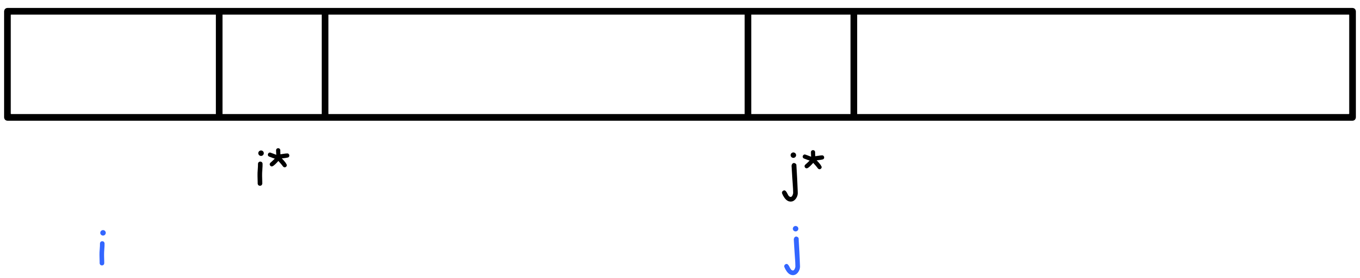
Correttezza

Osservazione:

Se non esistono due elementi di A che sommano a x l'algoritmo Lineare risponde sicuramente bene, ovvero restituisce (-1,-1)

E se esistono due elementi che sommano a x?

Siano i* e j* tale che A[i*]+A[j*]=x



caso 2 analogo

Per come si muovono gli indici, ad un certo punto succede una di queste due cose:

1) i=i* e j>j*

2) i<i* e j=j*