

Esercitazione 8 novembre 2021

Problema

Dimostrare o confutare la seguente affermazione:
Siano $f(n)$ e $g(n)$ due funzioni sempre non negative. Allora vale:

$$f(n)=O(g(n)) \quad \text{implica} \quad 2^{f(n)}=O(2^{g(n)})$$

Soluzione:

La relazione è falsa in generale. La seguente coppia di funzioni rappresenta un controesempio:

$$f(n)=n \quad g(n)=n/2$$

infatti vale:

$$n=O(n/2)$$

ma

$$2^n \neq O(2^{n/2}) \quad [2^n = \omega(2^{n/2})]$$

Problema

Progettare un algoritmo (efficiente) che, dato un array ordinato $A[1:n]$ di n interi e un intero x , trova (se esistono) due indici i e j , $i < j$, tale che $A[i] + A[j] = x$.

A	2	5	9	14	20	21	25	40
	1	2	3	4	5	6	7	8

$x=26 \Rightarrow i=2 \ j=6$

$x=23 \Rightarrow i=3 \ j=4$

$x=20 \Rightarrow i=-1 \ j=-1$ (non esistono $i < j$ con $A[i] + A[j] = 20$)

idea: provo tutte le coppie di indici i, j

Banale(A, x)

for $i=1$ to $n-1$ **do**

for $j=i+1$ to n **do**

if ($A[i]+A[j]=x$) **then return** (i, j)

return $(-1, -1)$

correttezza?

ovvia.

complessità?

$\Theta(n^2)$

si può fare meglio?

idea:

per ogni valore dell'indice i , cerco l'opportuno j usando la ricerca binaria

MenoBanale(A, x)

for $i=1$ to $n-1$ **do**

$j = \text{RicercaBinaria}(A, x - A[i], i+1, n)$

if ($j \neq -1$) **then return** (i, j)

return ($-1, -1$)

correttezza?

ovvia.

complessità?

$O(n \log n)$

si può fare meglio?

idea:

scansionare l'array "parallelamente" da sinistra e da destra.

Lineare(A,x)

i=1; j=n;

while i<j **do**

if A[i]+A[j]=x **then return** (i,j);

if A[i]+A[j]<x **then** i++ **else** j--

return (-1,-1)

complessità?

$O(n)$

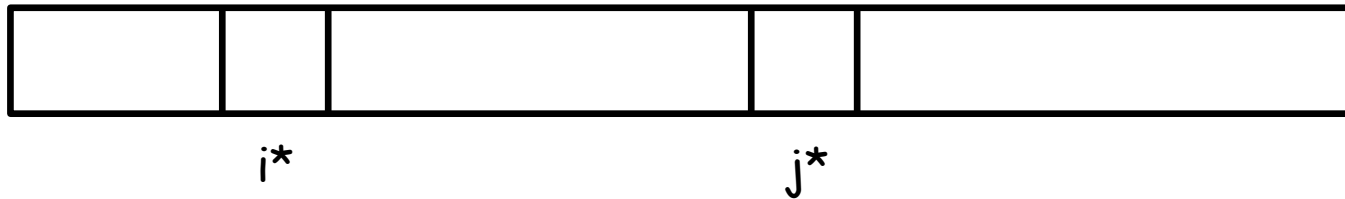
correttezza?

Osservazione:

Se non esistono due elementi di A che sommano a x l'algoritmo Lineare risponde sicuramente bene, ovvero restituisce $(-1,-1)$

E se esistono due elementi che sommano a x ?

Siano i^* e j^* tale che $A[i^*] + A[j^*] = x$



Per come si muovono gli indici, ad un certo punto succede una di queste due cose:

- 1) $i = i^*$ e $j > j^*$
- 2) $i < i^*$ e $j = j^*$

Osservazione:

Se non esistono due elementi di A che sommano a x l'algoritmo Lineare risponde sicuramente bene, ovvero restituisce $(-1, -1)$

E se esistono due elementi che sommano a x ?

Siano i^* e j^* tale che $A[i^*] + A[j^*] = x$



A è ordinato, quindi $A[i] + A[j] \geq x \Rightarrow$ algoritmo decrementa j

Per come si muovono gli indici, ad un certo punto succede una di queste due cose:

1) $i = i^*$ e $j > j^*$

2) $i < i^*$ e $j = j^*$

Osservazione:

Se non esistono due elementi di A che sommano a x l'algoritmo Lineare risponde sicuramente bene, ovvero restituisce $(-1,-1)$

E se esistono due elementi che sommano a x ?

Siano i^* e j^* tale che $A[i^*] + A[j^*] = x$



A è ordinato, quindi $A[i] + A[j] \geq x \Rightarrow$ algoritmo decrementa j

Per come si muovono gli indici, ad un certo punto succede una di queste due cose:

1) $i = i^*$ e $j > j^*$

2) $i < i^*$ e $j = j^*$

Osservazione:

Se non esistono due elementi di A che sommano a x l'algoritmo Lineare risponde sicuramente bene, ovvero restituisce $(-1,-1)$

E se esistono due elementi che sommano a x ?

Siano i^* e j^* tale che $A[i^*] + A[j^*] = x$



A è ordinato, quindi $A[i] + A[j] \geq x \quad \Rightarrow \quad$ algoritmo decrementa j

Per come si muovono gli indici, ad un certo punto succede una di queste due cose:

1) $i = i^*$ e $j > j^*$

2) $i < i^*$ e $j = j^*$

Osservazione:

Se non esistono due elementi di A che sommano a x l'algoritmo Lineare risponde sicuramente bene, ovvero restituisce $(-1,-1)$

E se esistono due elementi che sommano a x ?

Siano i^* e j^* tale che $A[i^*] + A[j^*] = x$



A è ordinato, quindi $A[i] + A[j] \geq x \quad \Rightarrow \quad$ algoritmo decrementa j

Per come si muovono gli indici, ad un certo punto succede una di queste due cose:

1) $i = i^*$ e $j > j^*$

2) $i < i^*$ e $j = j^*$

Osservazione:

Se non esistono due elementi di A che sommano a x l'algoritmo Lineare risponde sicuramente bene, ovvero restituisce $(-1, -1)$

E se esistono due elementi che sommano a x ?

Siano i^* e j^* tale che $A[i^*] + A[j^*] = x$



algoritmo ha trovato $(i^*, j^*)!$

A è ordinato, quindi $A[i] + A[j] \geq x \quad \Rightarrow \quad$ algoritmo decrementa j

Per come si muovono gli indici, ad un certo punto succede una di queste due cose:

1) $i = i^*$ e $j > j^*$

2) $i < i^*$ e $j = j^*$

Osservazione:

Se non esistono due elementi di A che sommano a x l'algoritmo Lineare risponde sicuramente bene, ovvero restituisce $(-1,-1)$

E se esistono due elementi che sommano a x ?

Siano i^* e j^* tale che $A[i^*] + A[j^*] = x$



caso 2 analogo

Per come si muovono gli indici, ad un certo punto succede una di queste due cose:

1) $i = i^*$ e $j > j^*$

2) $i < i^*$ e $j = j^*$