# Algoritmi e Strutture Dati

Capitolo 6
Alberi di ricerca

# Dizionari

- Gli alberi di ricerca sono usati per realizzare in modo efficiente il tipo di dato dizionario

**tipo** `Dizionario`:
**dati**: un insieme $S$ di coppie $(elem, chiave)$
**operazioni**:

`insert`$(elem\ e, chiave\ k)$
aggiunge a $S$ una nuova coppia $(e, k)$

`delete`$(elem\ e)$
cancella da $S$ l'elemento $e$

`search`$(chiave\ k) \rightarrow elem$
se la chiave $k$ è presente in $S$ restituisce un elemento $e$ ad essa associato, e `null` altrimenti

# Come implementare efficientemente un dizionario?

E' possibile garantire che tutte le operazioni su un dizionario di n elementi abbiano tempo O(log n).

**Due idee:**

Definire un albero (binario) tale che ogni operazione richiede tempo O(altezza albero)

} **alberi binari di riceca**

fare in modo che l'altezza dell'albero sia sempre O(log n)

} **alberi AVL**

# Alberi binari di ricerca (BST = binary search tree)

# Definizione

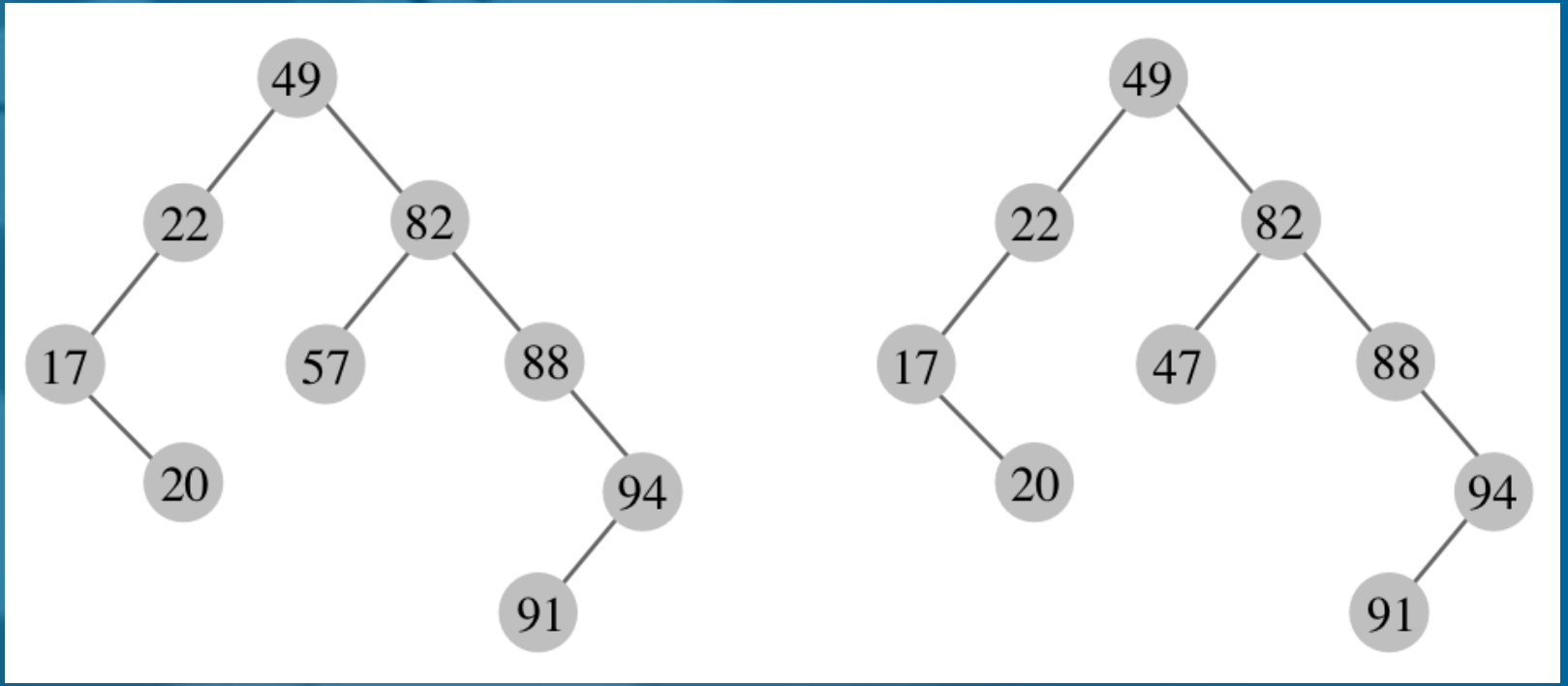
Albero binario che soddisfa le seguenti proprietà

- ogni nodo *v* contiene un elemento elem(v) cui è associata una chiave chiave(v) presa da un dominio totalmente ordinato.

Per ogni nodo v vale che:

- le chiavi nel sottoalbero sinistro di v sono ≤ chiave(*v*)
- le chiavi nel sottoalbero destro di v sono > chiave(*v*)

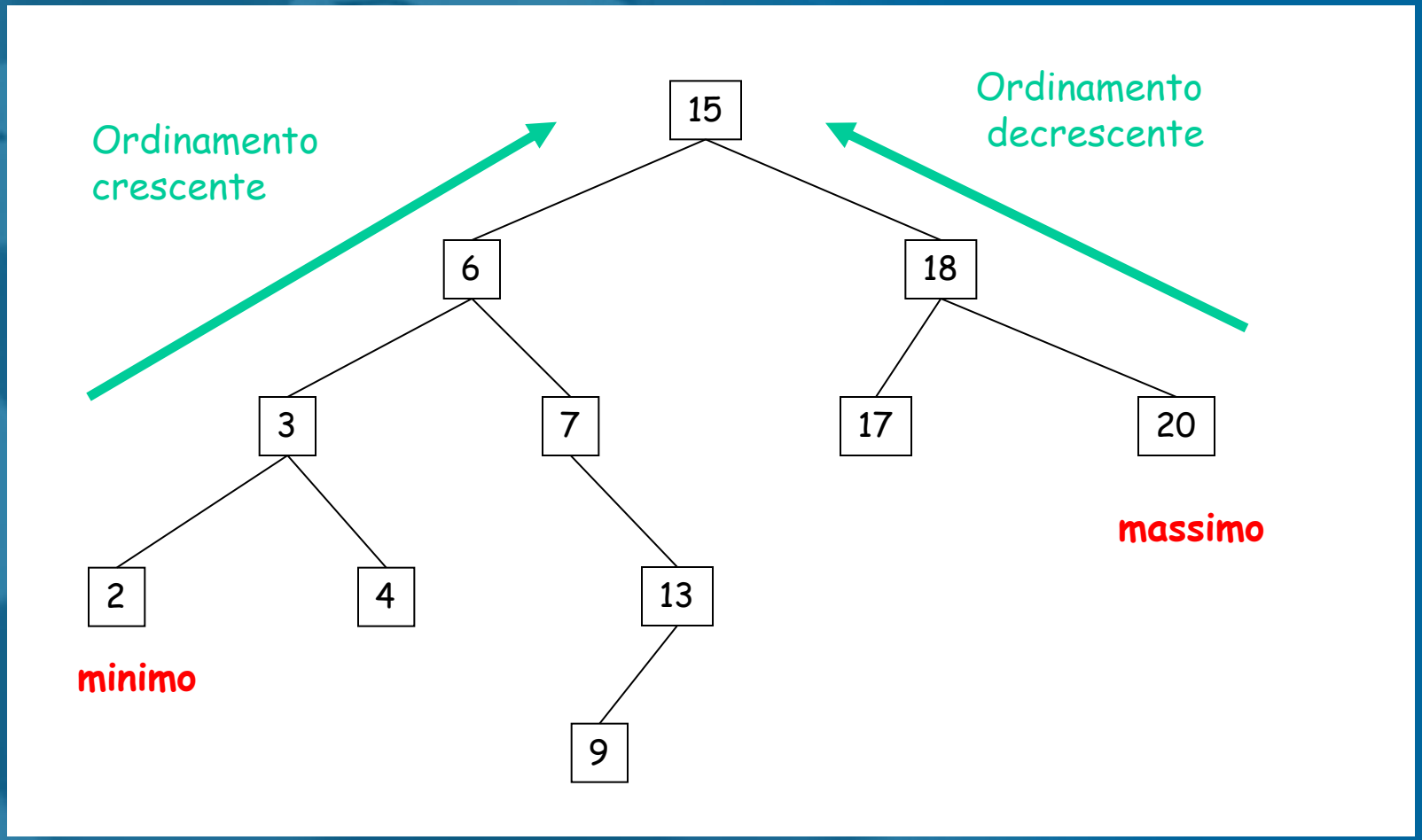
# Esempi



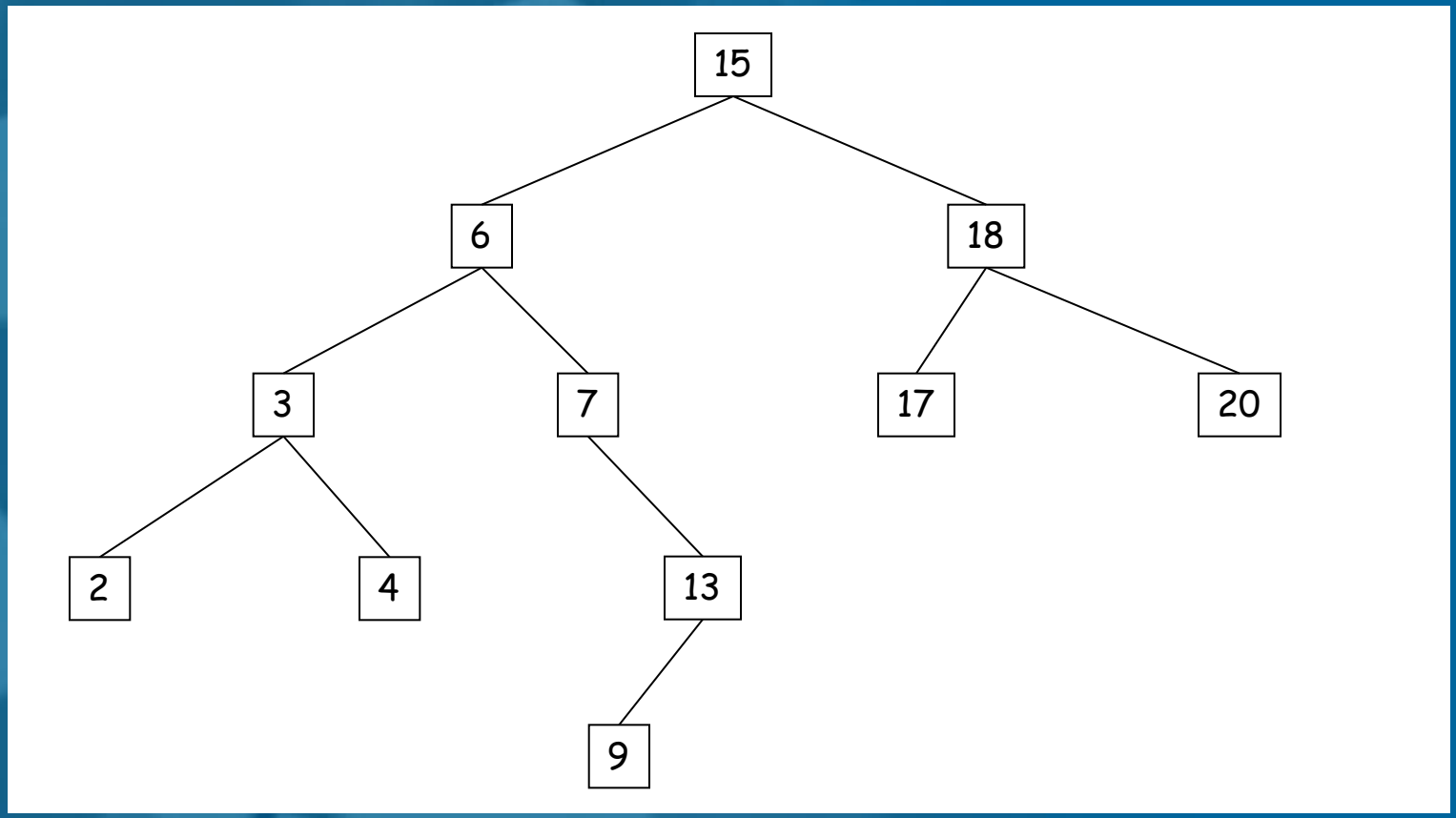

Albero binario di ricerca

Albero binario non di ricerca

# …ancora un esempio…



# …che succede se visitiamo un BST in ordine simmetrico?




2 3 4 6 7 9 13 15 17 18 20

visito i nodi in ordine crescente di chiave!

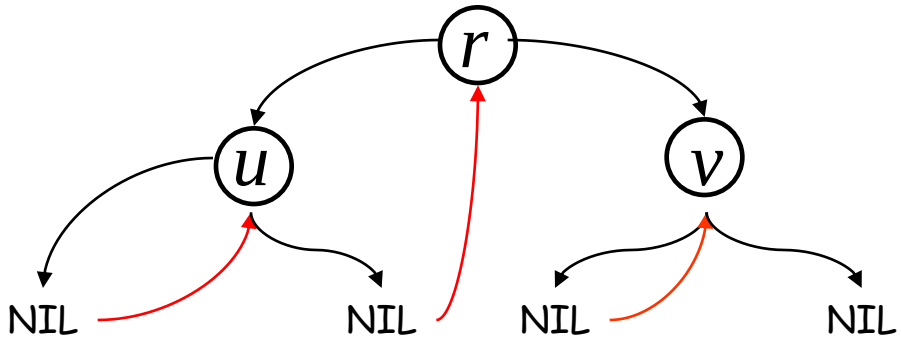
## Verifica di correttezza –

Indichiamo con h l'altezza dell'albero.

Vogliamo mostrare che la visita in ordine simmetrico restituisce la sequenza ordinata

Per induzione sull'altezza dell'ABR: h=1

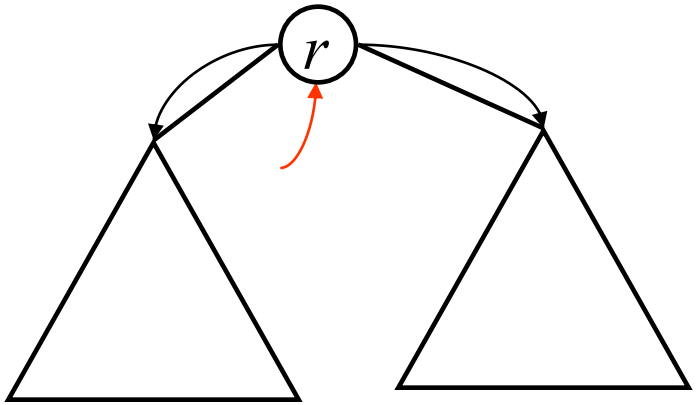
(mostriamolo senza perdita di generalità quando l'albero è completo.)




$$\text{chiave}(u) \leq \text{chiave}(r) \leq \text{chiave}(v)$$

# Verifica correttezza (continua …)

h = generico (ipotizzo che la procedura sia corretta per h-1)




Albero di altezza ≤ h-1. Tutti i suoi elementi sono minori o uguali della radice

Albero di altezza ≤ h-1. Tutti i suoi elementi sono maggiori o uguali della radice

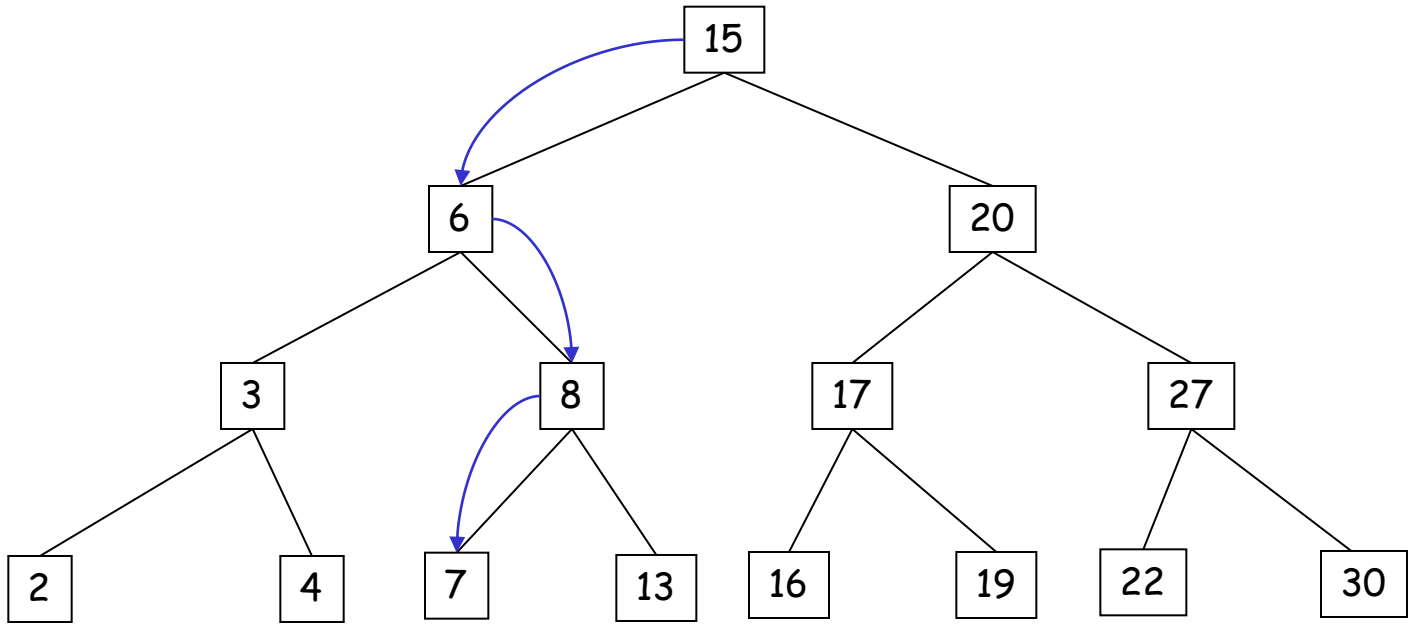
# …implementare le operazioni del dizionario (search, insert e delete) su un BST

# search(chiave k) -> elem

Traccia un cammino nell'albero partendo dalla radice: su ogni nodo, usa la proprietà di ricerca per decidere se proseguire nel sottoalbero sinistro o destro

```
    algoritmo search(chiave k) → elem
1.      v ← radice di T
2.      while ( v ≠ null ) do
3.          if ( k = chiave(v) ) then return elem(v)
4.          else if ( k < chiave(v) ) then v ← figlio sinistro di v
5.          else v ← figlio destro di v
6.      return null
```

# search(7)

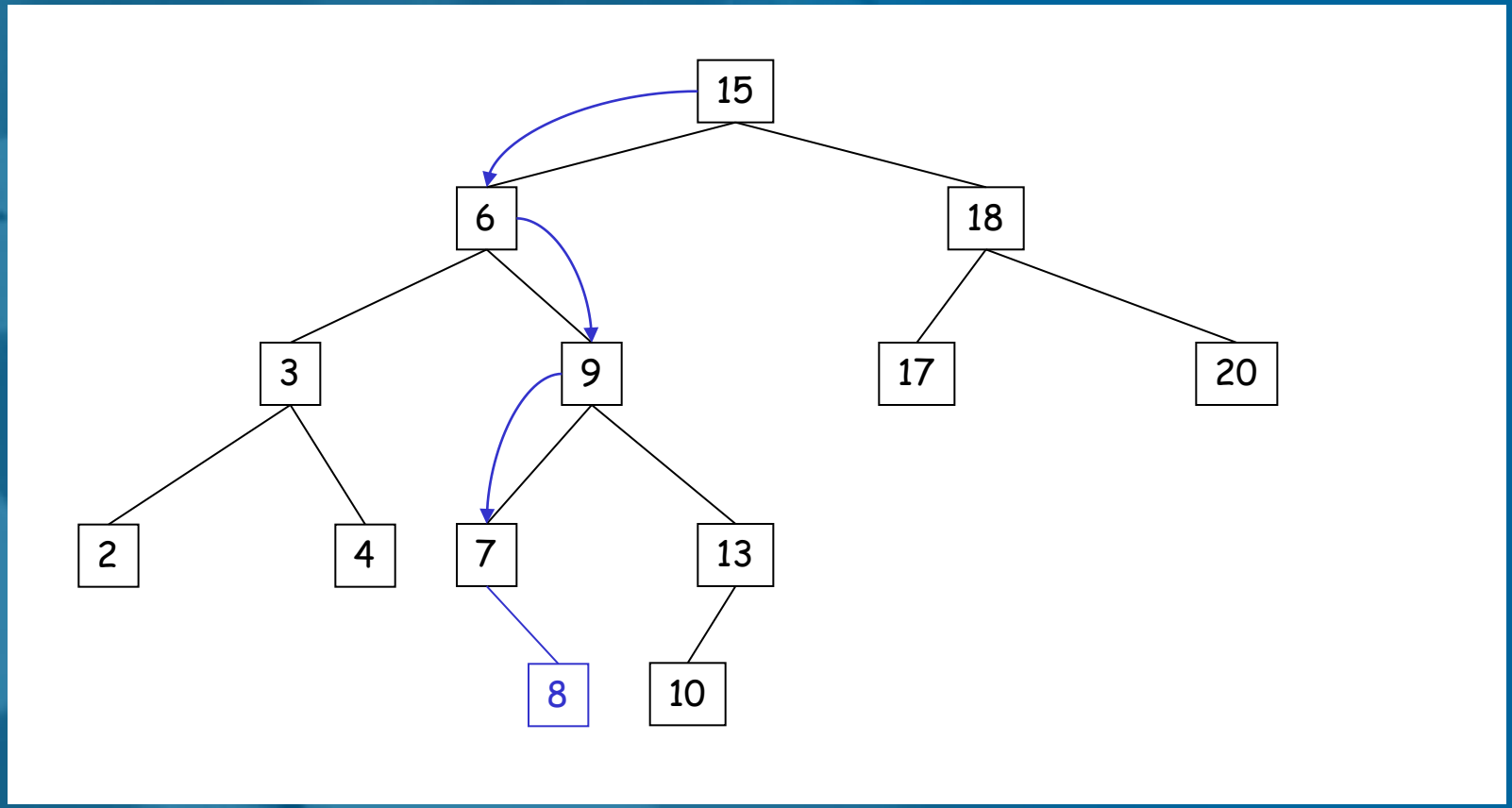


# insert(elem e, chiave k)

**Idea**: aggiunge la nuova chiave come nodo foglia;
per capire dove mettere la foglia simula una ricerca con la chiave da inserire

1. Crea un nuovo nodo u con elem=e e chiave=k
2. Cerca la chiave k nell'albero, identificando così il nodo v che diventerà padre di u
3. Appendi u come figlio sinistro/destro di v in modo che sia mantenuta la proprietà di ricerca

# insert(e,8)




Se seguo questo schema l'elemento *e* viene posizionato nella posizione giusta. Infatti, per costruzione, ogni antenato di *e* si ritrova *e* nel giusto sottoalbero.

**…qualche operazione ausiliaria prima di implementare l'operazione di delete:**

…massimo, minimo,

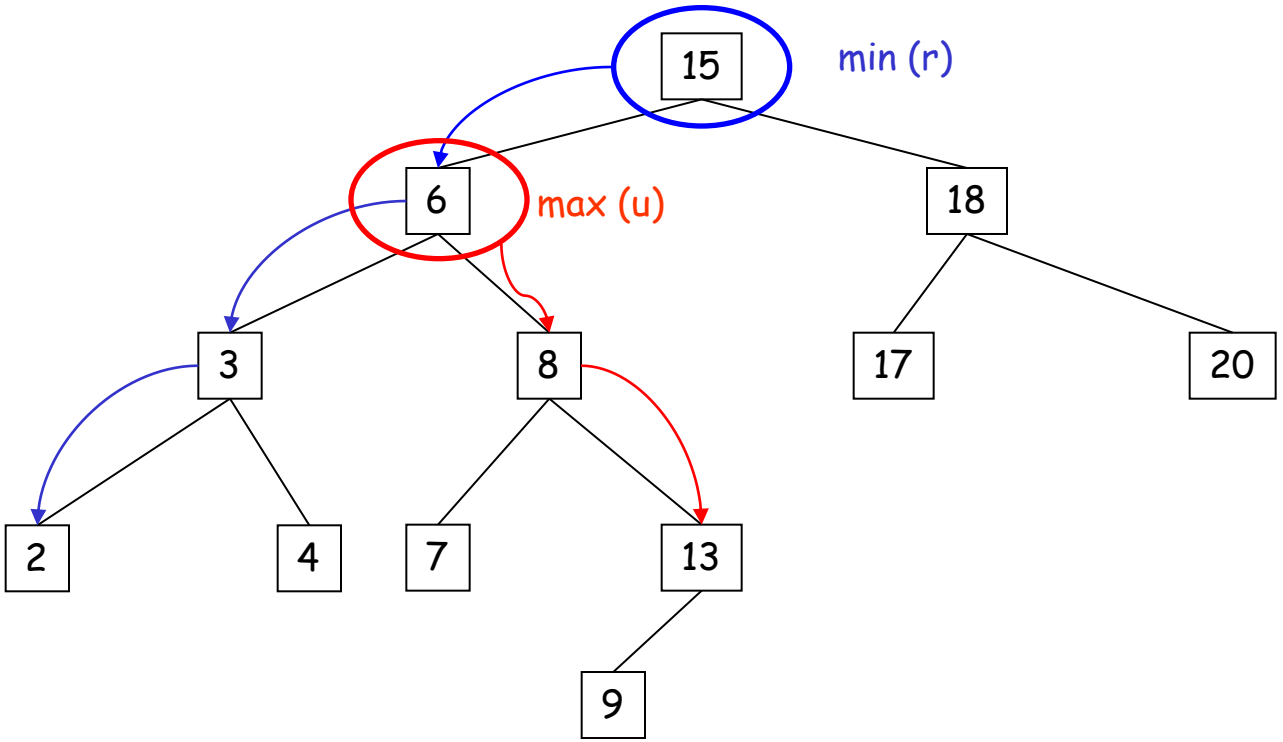
predecessore e successore

# Ricerca del massimo

**algoritmo** `max`$(nodo\ u) \rightarrow nodo$

```
1.    v ← u
2.    while ( figlio destro di v ≠ null ) do
3.        v ← figlio destro di v
4.    return v
```

Nota: è possibile definire una procedura `min`(nodo *u*) in maniera del tutto analoga



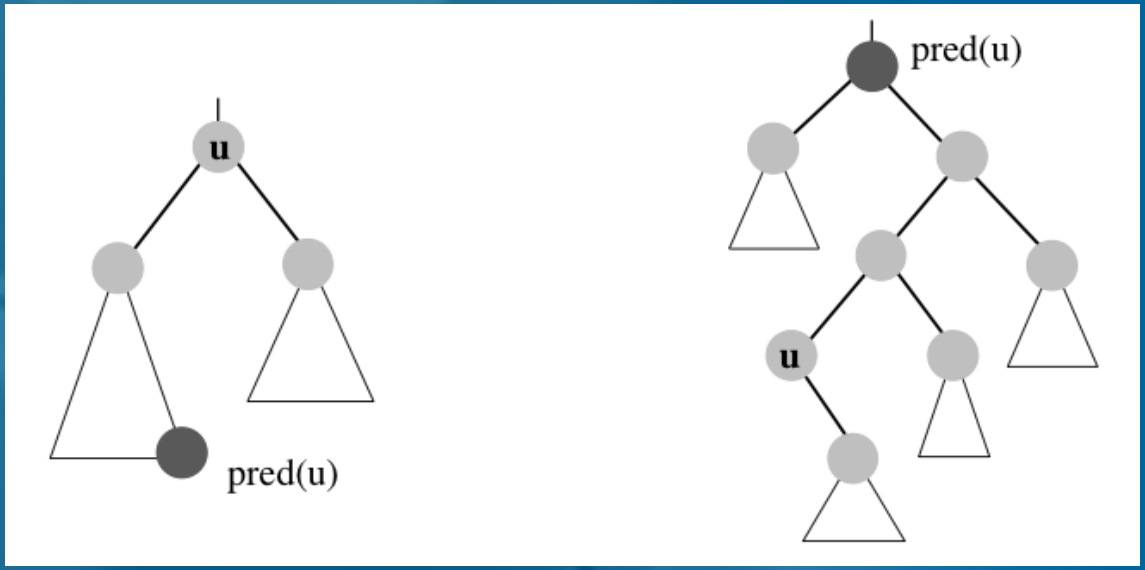
# predecessore e successore

- il predecessore di un nodo *u* in un BST è il nodo *v* nell'albero avente massima chiave ≤ chiave(*u*)
- il successore di un nodo *u* in un BST è il nodo *v* nell'albero avente minima chiave ≥ chiave(*u*)
- Come trovo il predecessore/successore di un nodo in un BST?

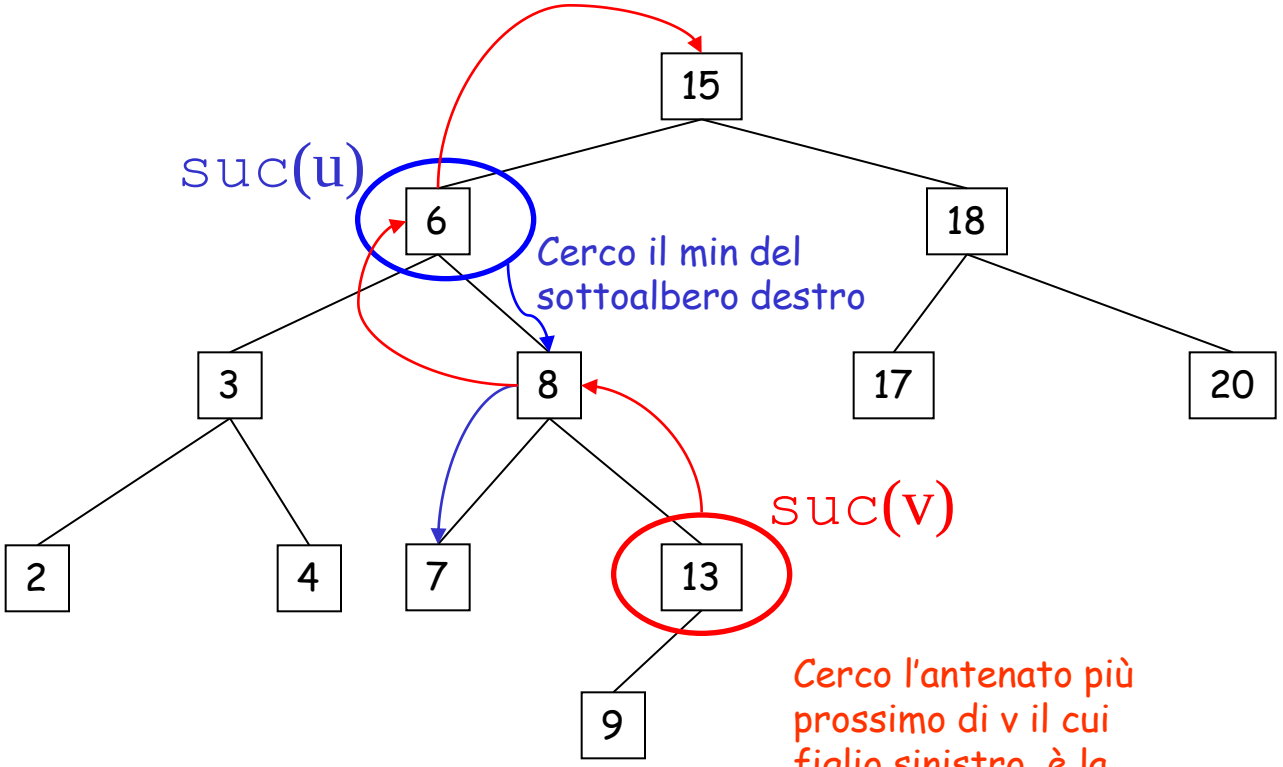
# Ricerca del predecessore

**algoritmo** `pred`$(nodo\ u) \rightarrow nodo$

1. **if** ( $u$ ha figlio sinistro $sin(u)$ ) **then**
2. **return** `max`$(sin(u))$
3. **while** ( $parent(u) \neq null$ e $u$ è figlio sinistro di suo padre ) **do**
4. $u \leftarrow parent(u)$
5. **return** $parent(u)$



# Nota: la ricerca del **successore** di un nodo è simmetrica

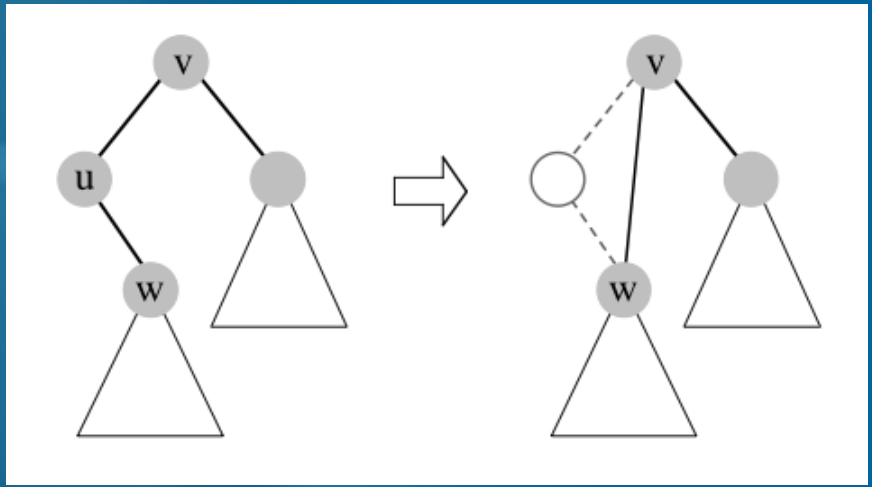


# delete(elem e)

Sia u il nodo contenente l'elemento e da cancellare:

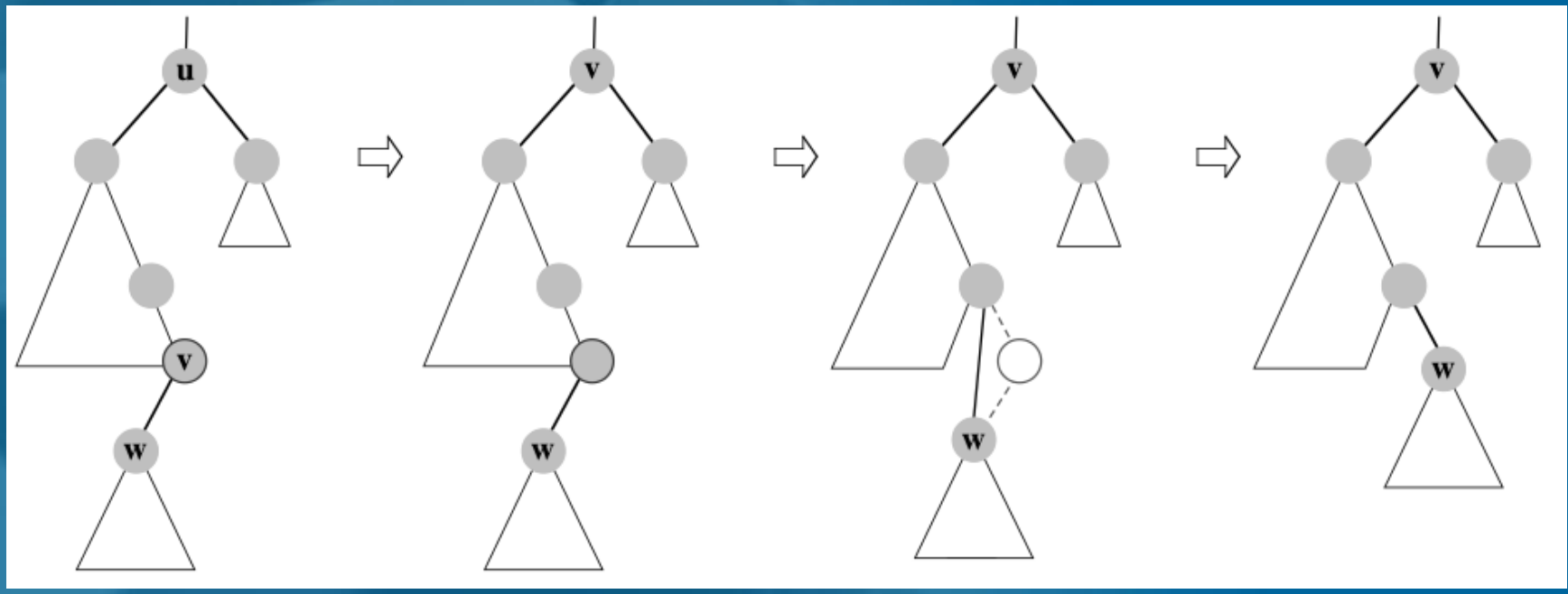
1) u è una foglia: rimuovila

2) u ha un solo figlio:

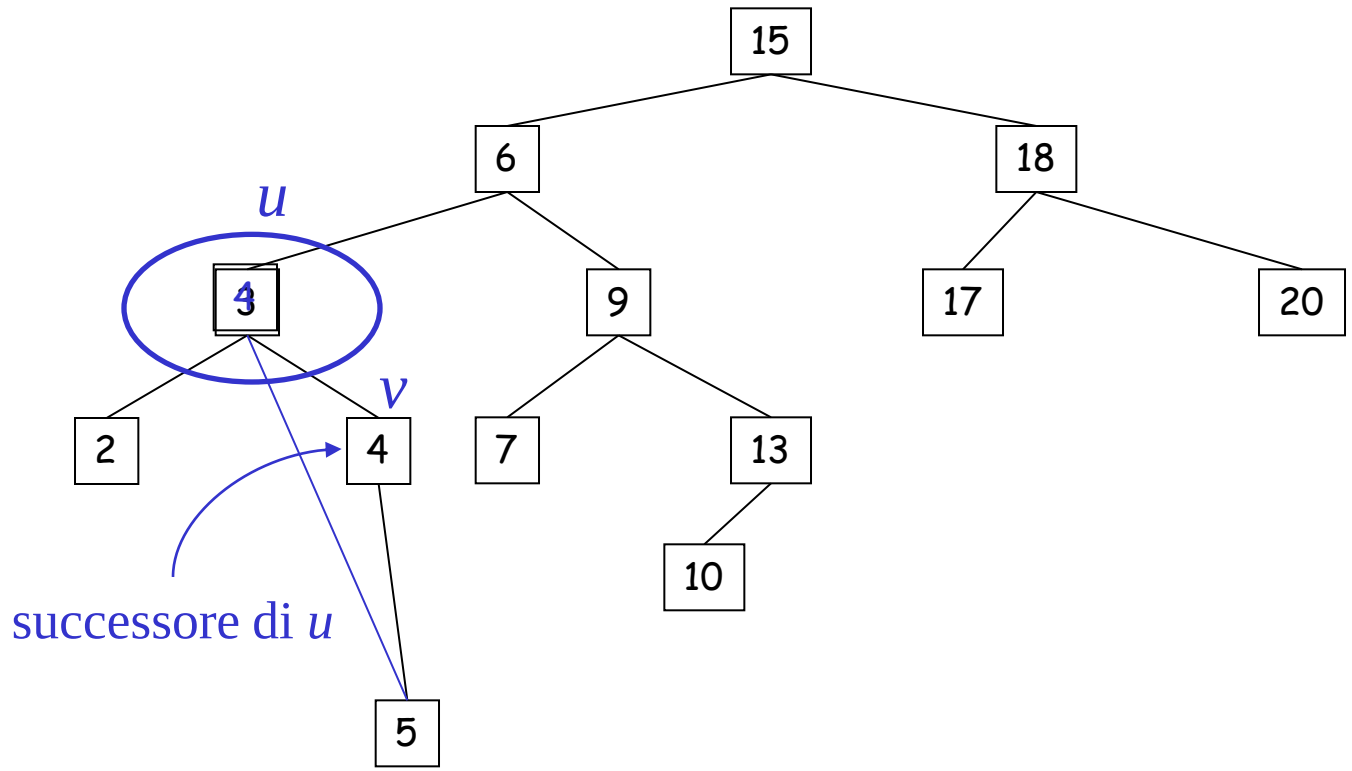


# delete(elem e)

3) u ha due figli: sostituiscilo con il predecessore (o successore) (v) e rimuovi fisicamente il predecessore (o successore) (che ha un solo figlio)



# delete ($u$)

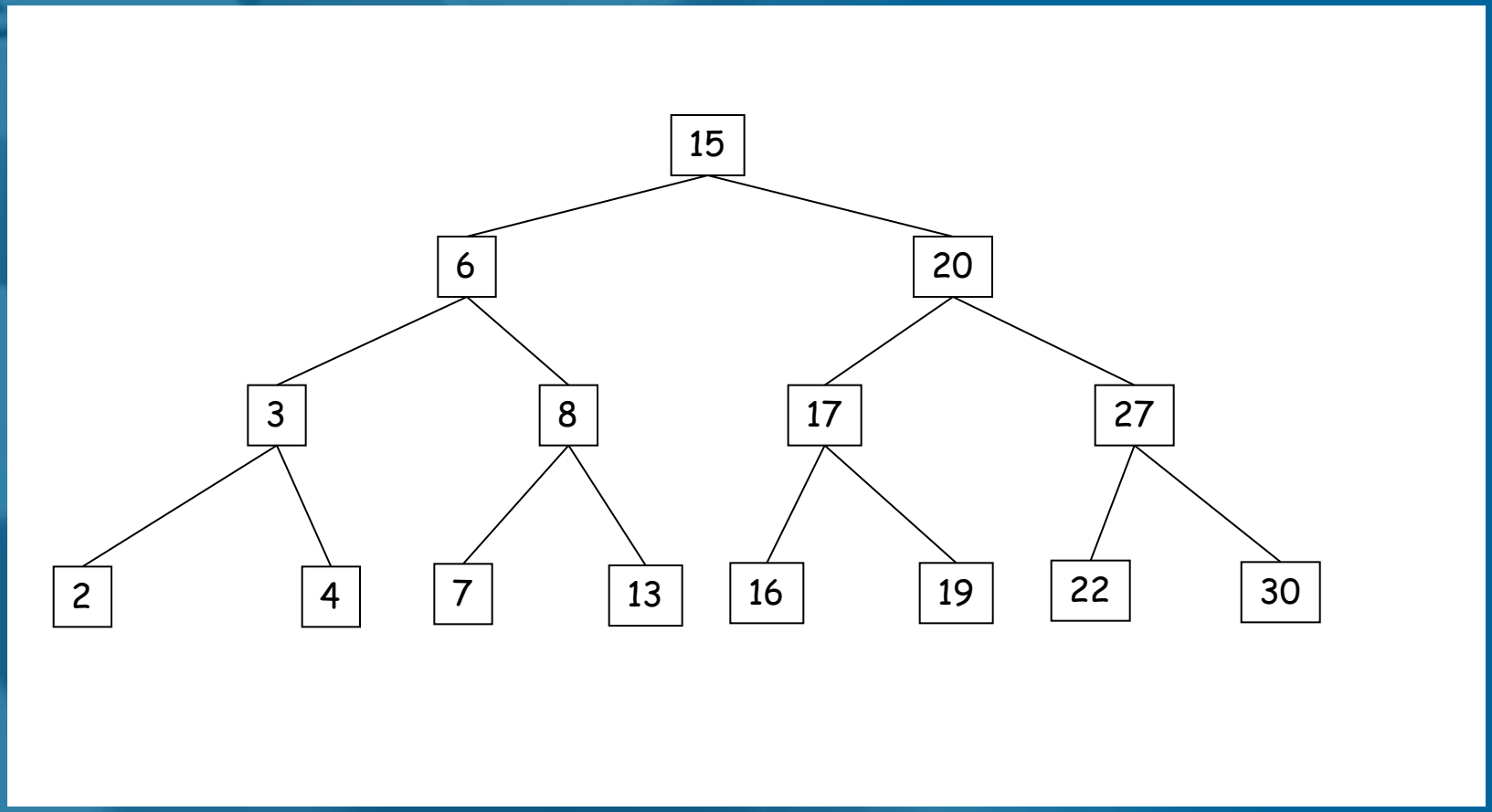


# Costo delle operazioni

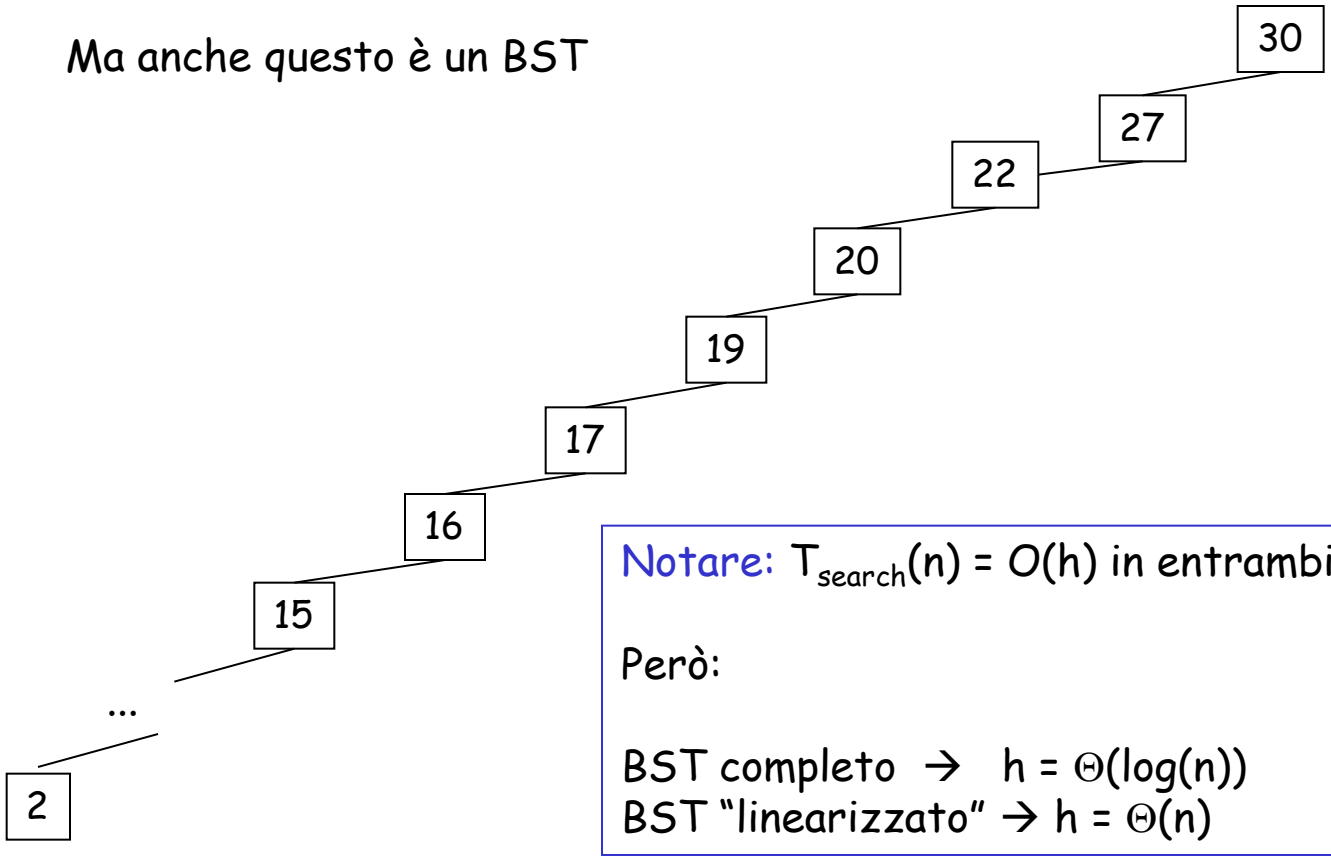
- Tutte le operazioni hanno costo O(h) dove h è l'altezza dell'albero
- O(n) nel caso peggiore (alberi molto sbilanciati e profondi)

# …un albero binario di ricerca bilanciato…

## h=O(log n)



Ma anche questo è un BST




Notare: $T_{search}(n) = O(h)$ in entrambi i casi

Però:

BST completo → $h = \Theta(\log(n))$
BST "linearizzato" → $h = \Theta(n)$

# Come implementare efficientemente un dizionario?

E' possibile garantire che tutte le operazioni su un dizionario di n elementi abbiano tempo O(log n).

**Due idee:**

Definire un albero (binario) tale che ogni operazione richiede tempo O(altezza albero)

} **alberi binari di riceca**

fare in modo che l'altezza dell'albero sia sempre O(log n)

} **alberi AVL**

# Alberi AVL
# (Adel'son-Vel'skii e Landis, 1962)

# Definizioni

Fattore di bilanciamento $\beta(v)$ di un nodo v = altezza del sottoalbero sinistro di v - altezza del sottoalbero destro di v

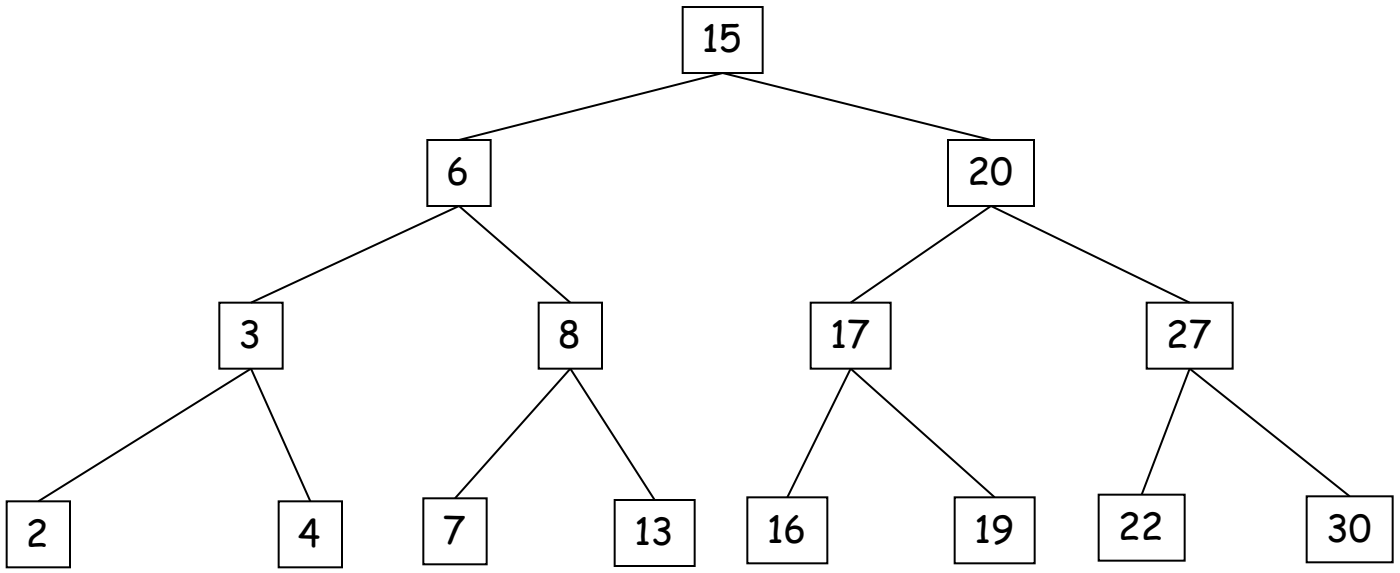
Un albero si dice bilanciato in altezza se ogni nodo v ha fattore di bilanciamento in valore assoluto $\leq 1$

Alberi AVL = alberi binari di ricerca bilanciati in altezza

Generlemente $\beta(v)$ mantenuto come informazione addizionale nel record relativo a $v$

# …qualche esempio…

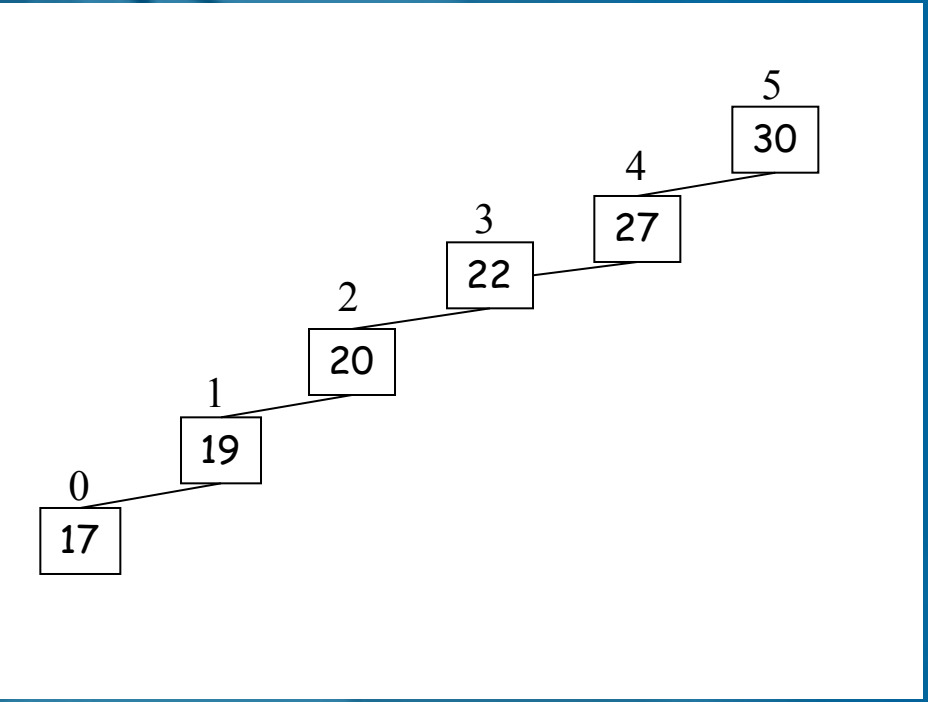
è il seguente albero AVL?




Sì: tutti i nodi hanno fattore di bilanciamento = 0

# …qualche esempio…

è il seguente albero AVL?

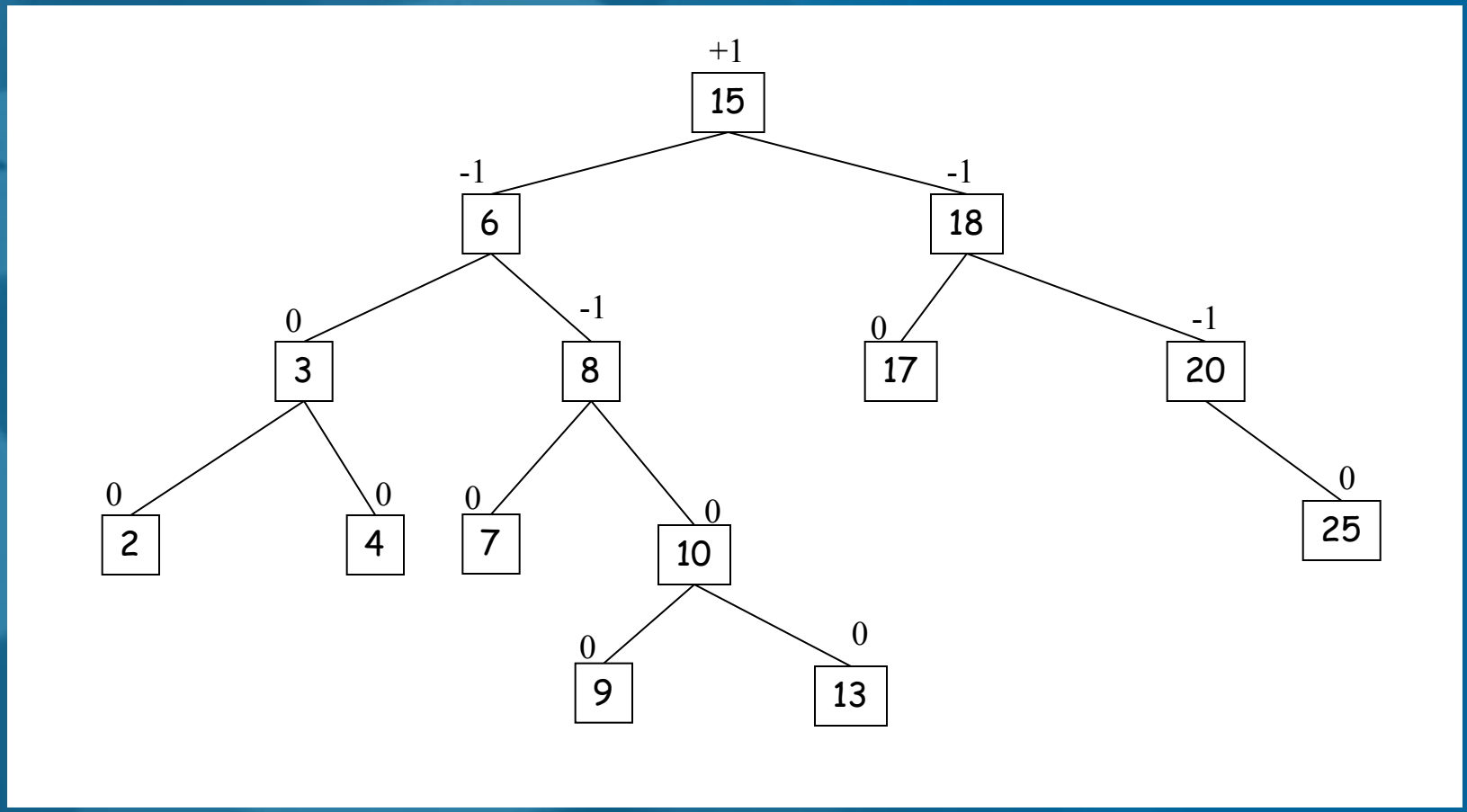



Convenzione: altezza di un albero vuoto= -1

NO! Non vale la proprietà sui fattori di bilanciamento!

# è il seguente albero AVL?

…qualche esempio…




Sì: proprietà sui fattori di bilanciamento rispettata

# Altezza di alberi AVL

Si può dimostrare che un albero AVL con n nodi ha altezza O(log n)

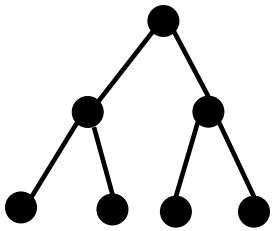
Idea della dimostrazione: considerare, tra tutti gli AVL di altezza h, quelli con il minimo numero di nodi $n_h$ (alberi di Fibonacci): sono i più sbilanciati!

minimizzare # nodi fissata l'altezza ≡ massimizzare altezza fissato #nodi

Intuizione: se gli alberi di Fibonacci hanno altezza O(log n), allora gli alberi AVL hanno altezza O(log n)

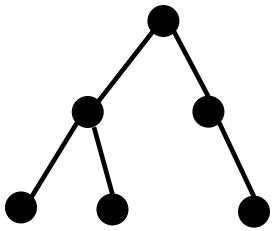
# Un esempio: come è fatto un albero di Fibonacci di altezza 2?

così?



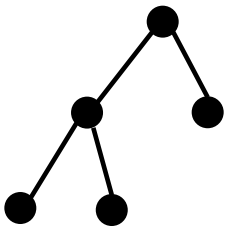
no: troppi nodi!

così?



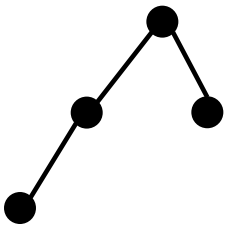
no: troppi nodi!

così?



no: troppi nodi!

così?



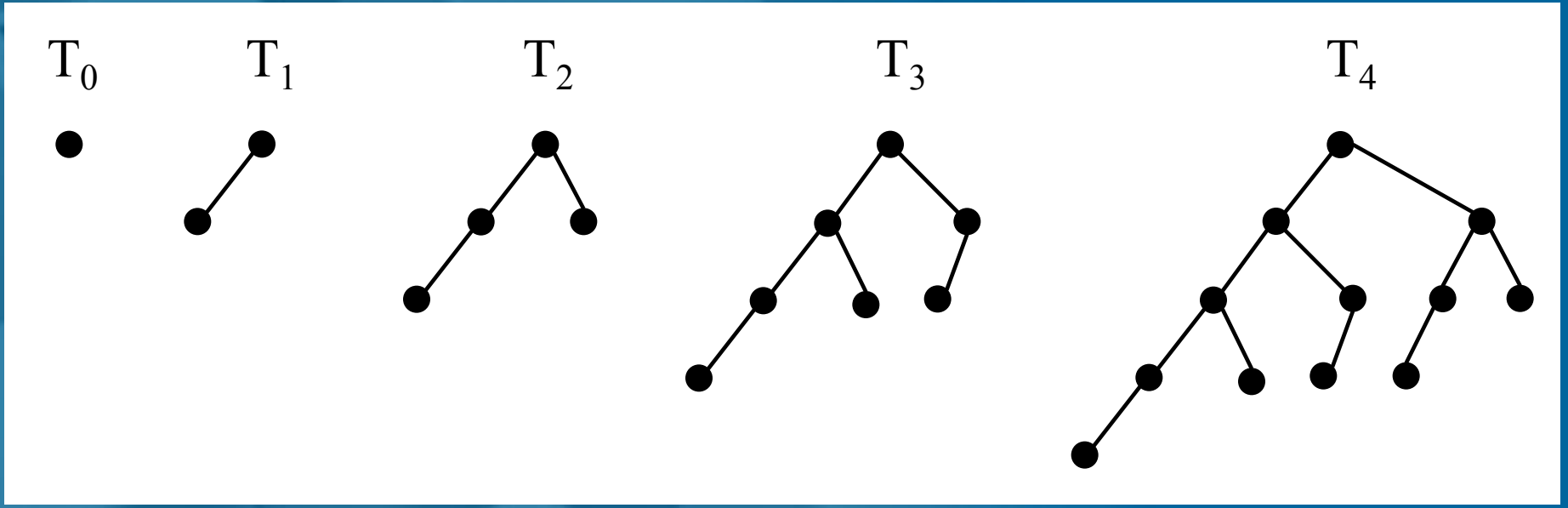
sì!

Infatti: se togliamo ancora un nodo, o diventa sbilanciato, o cambia la sua altezza

Nota: ogni nodo (non foglia) ha fattore di bilanciamento pari (in valore assoluto) a 1

# …Alberi di Fibonacci per piccoli valori di altezza…

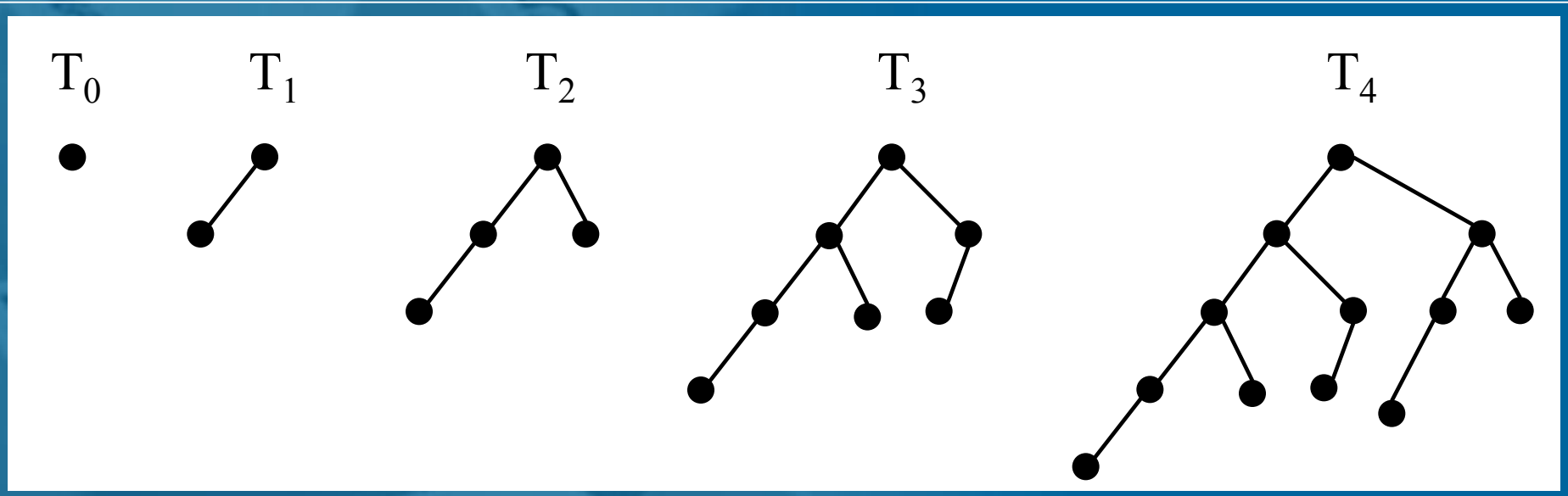
$T_i$: albero di Fibonacci di altezza i
(albero AVL di altezza i con il minimo numero di nodi)



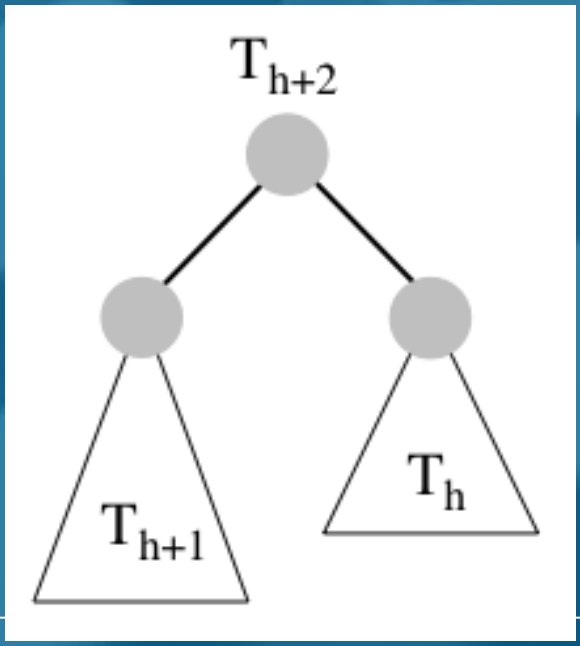

Nota che: se a $T_i$ tolgo un nodo, o diventa sbilanciato, o cambia la sua altezza

Inoltre: ogni nodo (non foglia) ha fattore di bilanciamento pari (in valore assoluto) a 1

intravedete uno schema per generare l'i-esimo albero di Fibonacci a partire dai precedenti?




## Lo schema




**Lemma**

Sia $n_h$ il numero di nodi di $T_h$.

Risulta $n_h = 1 + n_{h-1} + n_{h-2} = F_{h+3} - 1$

**dim**

per induzione su h

## Corollario

Un albero AVL con n nodi ha altezza $h=O(\log n)$

dim

$n_h = F_{h+3} - 1 = \Theta(\phi^h)$

$h=\Theta(\log n_h)=O(\log n)$

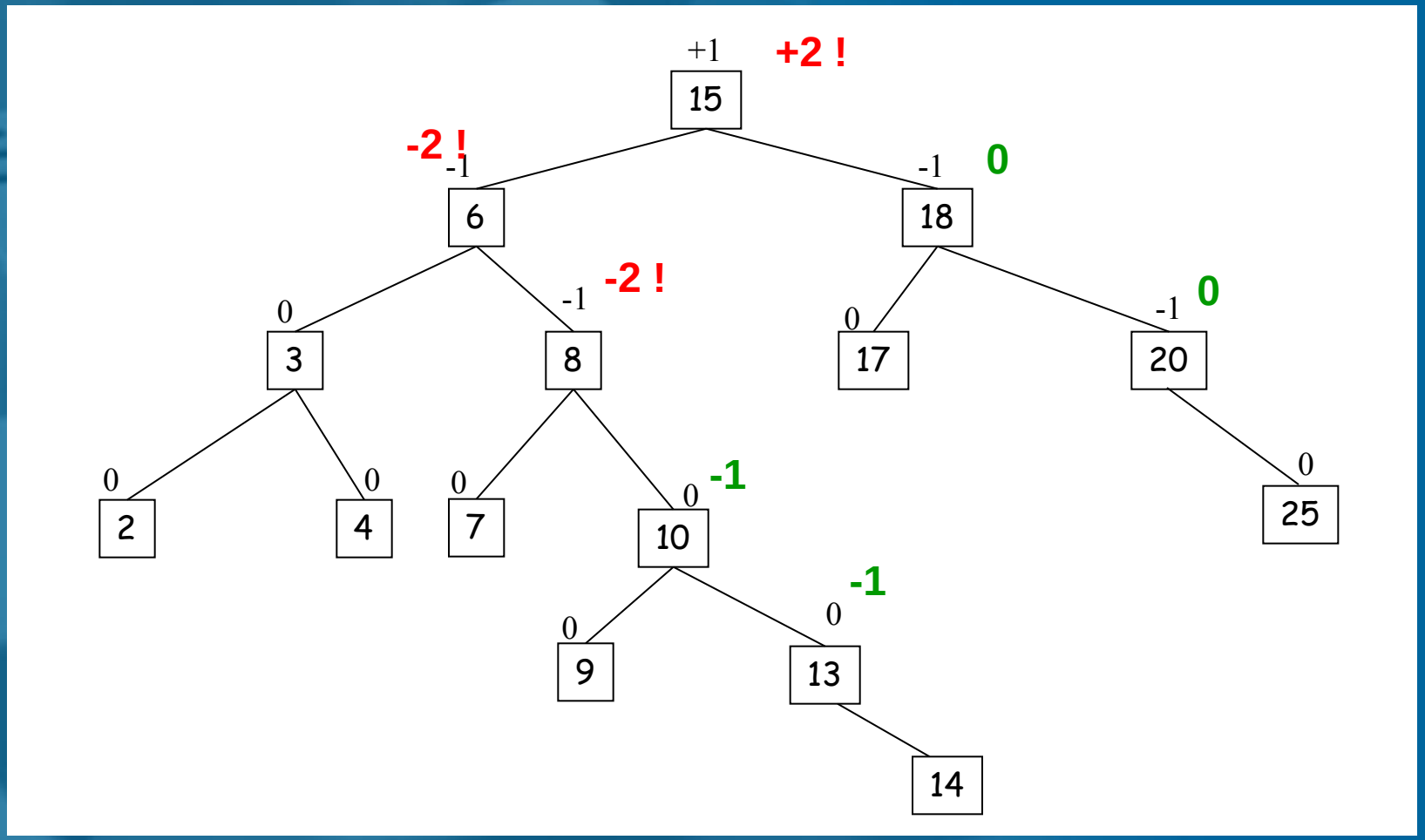
corollario segue da $n_h \leq n$

Ricorda che vale:

$F_k = \Theta(\phi^k)$

$\phi = 1.618\ldots$ sezione aurea

# Posso usare un albero AVL per implementare un dizionario?




come implemento Insert(14)?

…e delete(25)?

Domanda:
di quanto e quali fattori di bilanciamento cambiano a fronte di un inserimento/cancellazione?

Se parto da un albero AVL e inserisco/cancello un nodo:

- (quali) cambiano solo i fattori di bilanciamento dei nodi lungo il cammino radice-nodo inserito/cancellato

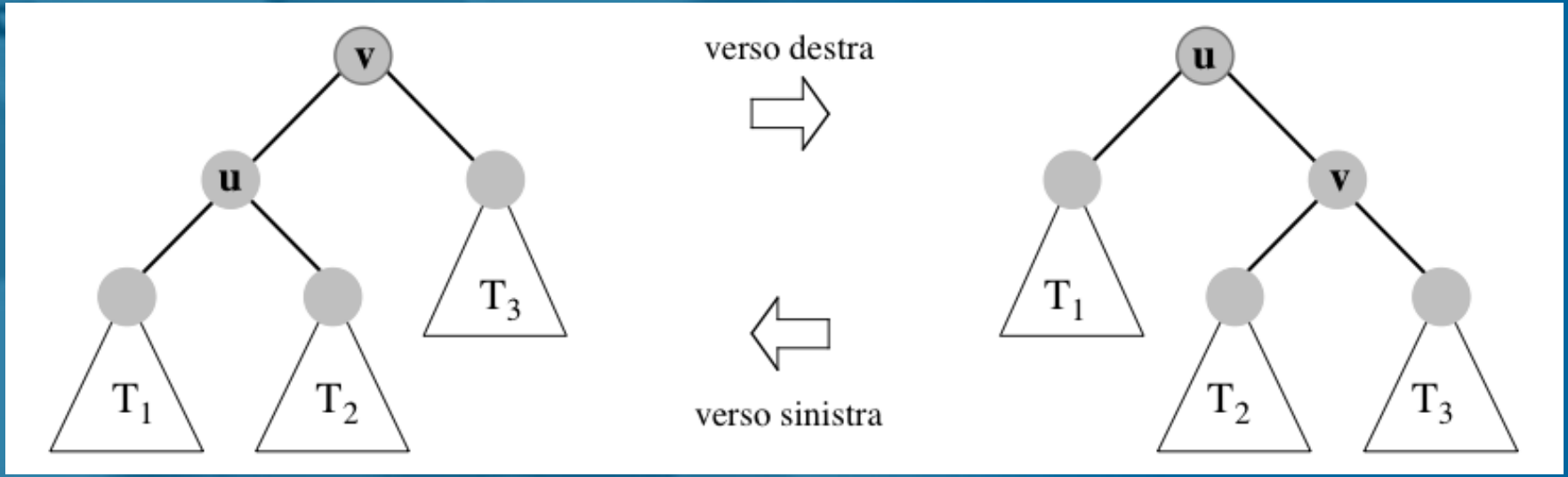
- (quanto) i fattori di bilanciamento cambiano di +/- 1

# Implementazione delle operazioni

- L'operazione search procede come in un BST
- Ma inserimenti e cancellazioni potrebbero sbilanciare l'albero

$\Rightarrow$ Manteniamo il bilanciamento tramite opportune rotazioni

# Rotazione di base verso destra/sinistra sul nodo v/u




- Mantiene la proprietà di ricerca
- Richiede tempo O(1)

# Ribilanciamento tramite rotazioni

- Le rotazioni sono effettuate su nodi sbilanciati
- Sia v un nodo di profondità massima (nodo critico) con fattore di bilanciamento $\beta(v) \pm 2$
- Esiste un sottoalbero T di v che lo sbilancia
- A seconda della posizione di T si hanno 4 casi:

$\beta(v)=+2$ $\beta(v)=-2$

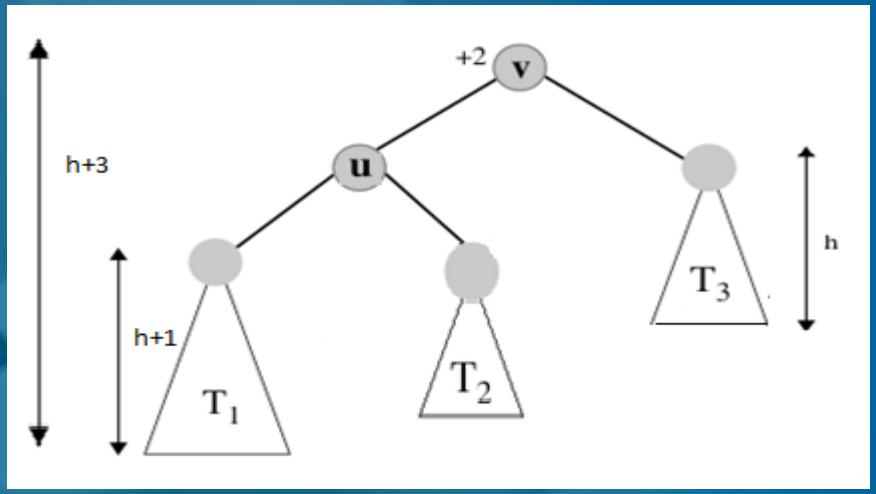
| | | |
|---|---|---|
| **Sinistra - sinistra** | (SS) | $T$ è il sottoalbero sinistro del figlio sinistro di $v$ |
| **Destra - destra** | (DD) | $T$ è il sottoalbero destro del figlio destro di $v$ |
| **Sinistra - destra** | (SD) | $T$ è il sottoalbero destro del figlio sinistro di $v$ |
| **Destra - sinistra** | (DS) | $T$ è il sottoalbero sinistro del figlio destro di $v$ |

- I quattro casi sono simmetrici a coppie

# [β(v)=+2, altezza $T_1$=h+1]

# Caso SS

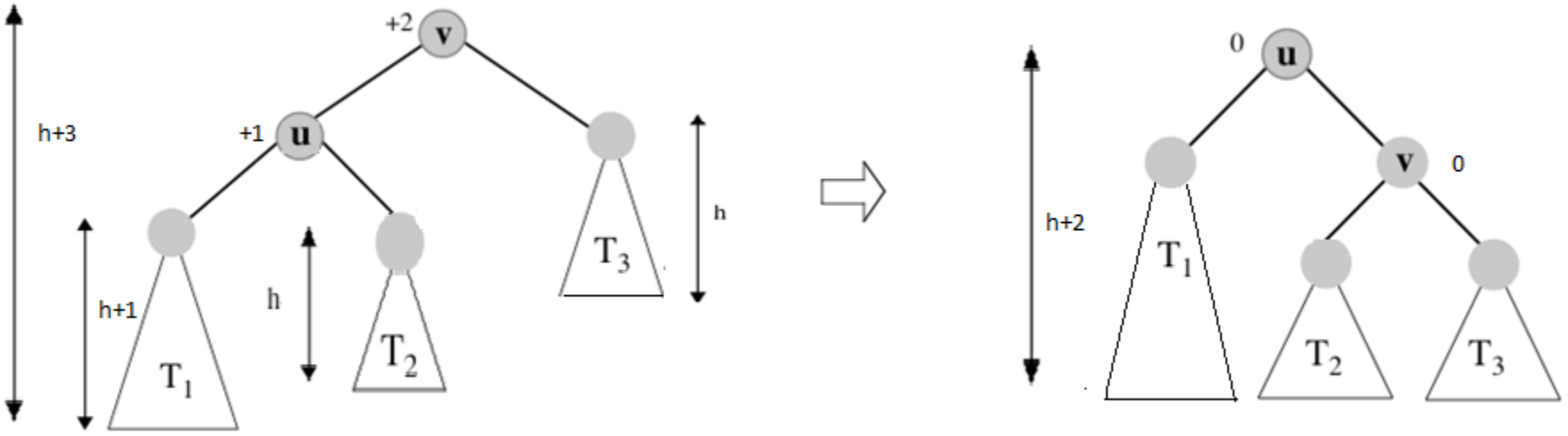
- L'altezza di T(v) è *h*+3, l'altezza di T(u) è *h*+2, l'altezza di $T_3$ è *h*, e l'altezza di $T_1$ è *h*+1 ⇒ β(v)=+2 e lo sbilanciamento è provocato da $T_1$



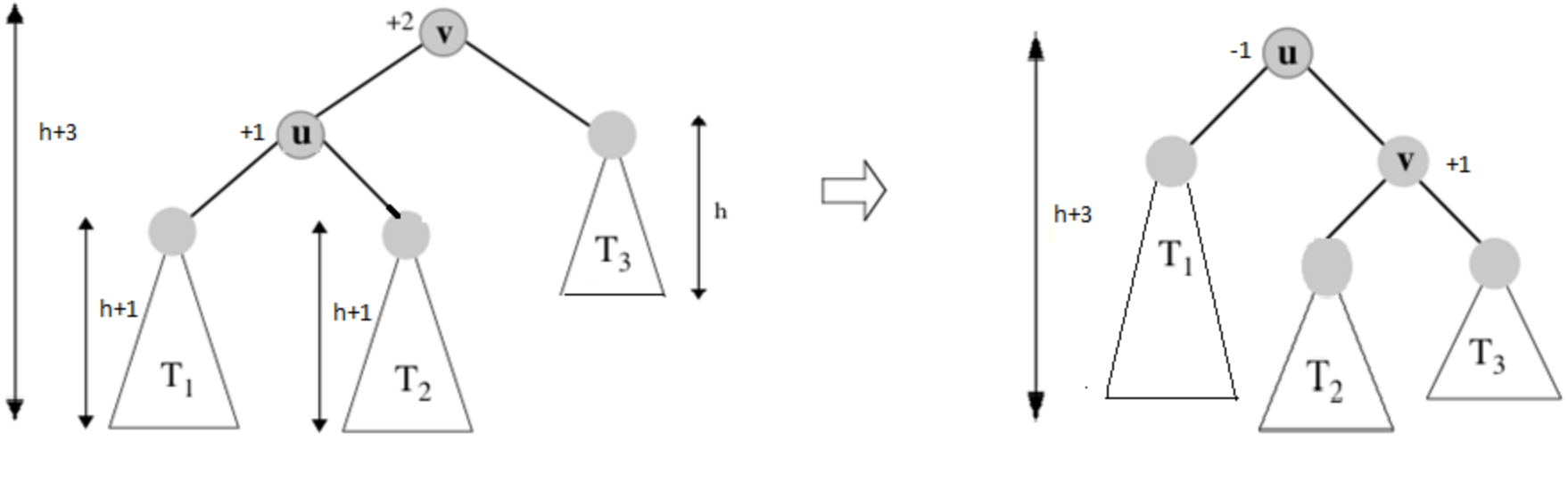

- Si applica una rotazione semplice verso destra su v; 2 sottocasi possibili:

  (i) l'altezza di $T_2$ è *h* ⇒ l'altezza dell'albero coinvolto nella rotazione passa da *h*+3 a *h*+2, e il fattore di bilanciamento di u e v diventa pari a **0**

  (ii) l'altezza di $T_2$ è *h*+1 ⇒ l'altezza dell'albero coinvolto nella rotazione rimane pari a *h*+3, e il fattore di bilanciamento di u diventa pari a **-1**, mentre quello di v diventa pari a **1**




…i due sottocasi del caso SS…



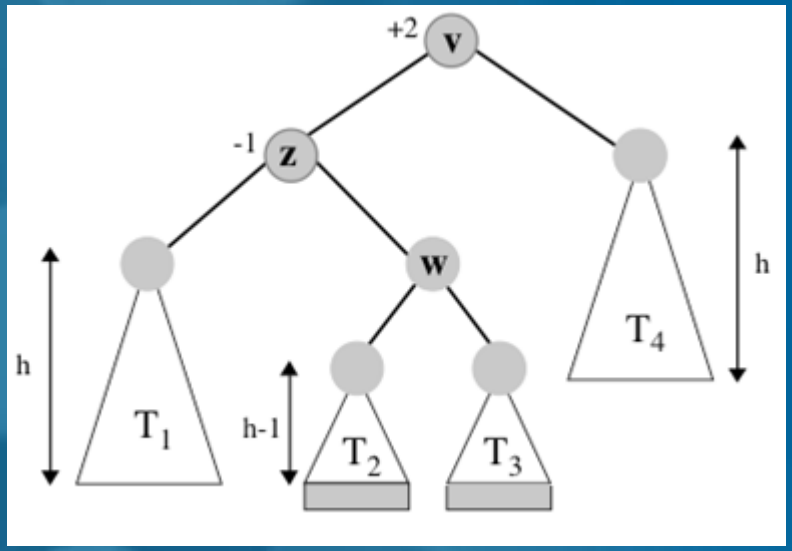
# Osservazioni sul caso SS

- Dopo la rotazione l'albero è bilanciato (tutti i fattori di bilanciamento sono in modulo $\leq 1$)
- L'inserimento di un elemento nell'AVL (ovvero, l'aggiunta di una foglia a un albero bilanciato) può provocare solo il caso (i) (perché altrimenti l'AVL era già sbilanciato!)
- Invece, la cancellazione di un elemento dall'AVL (che necessariamente fa diminuire l'altezza di qualche sottoalbero) può provocare entrambi i casi (ad esempio, se cancellando un elemento ho abbassato l'altezza di $T_3$)
- Nel caso (i), dopo la rotazione, l'albero diminuisce la sua altezza di uno

# Caso SD

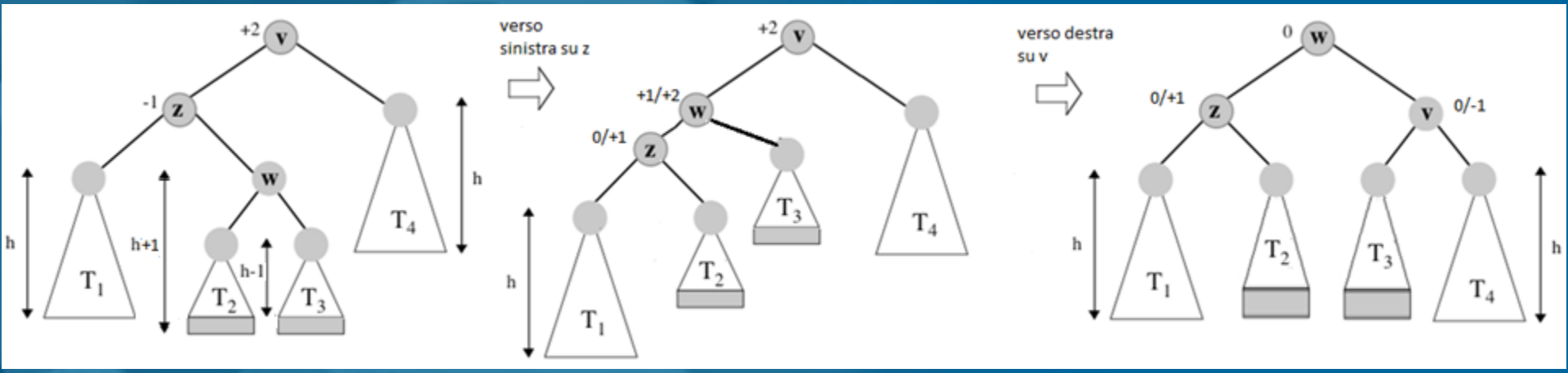
## [β(v)=+2, altezza $T_1$=h]

- L'altezza di T(v) è *h*+3, l'altezza di T(z) è *h*+2, l'altezza di $T_1$ è *h*, l'altezza di $T_4$ è *h*, e l'altezza di T(w) è *h*+1 ⇒ β(v)=+2, e β(z)=-1 cioè lo sbilanciamento è provocato dal sottoalbero destro di z




- Applicare due rotazioni semplici: una verso sinistra sul figlio sinistro del nodo critico (nodo z), l'altra verso destra sul nodo critico (nodo v)

# Caso SD



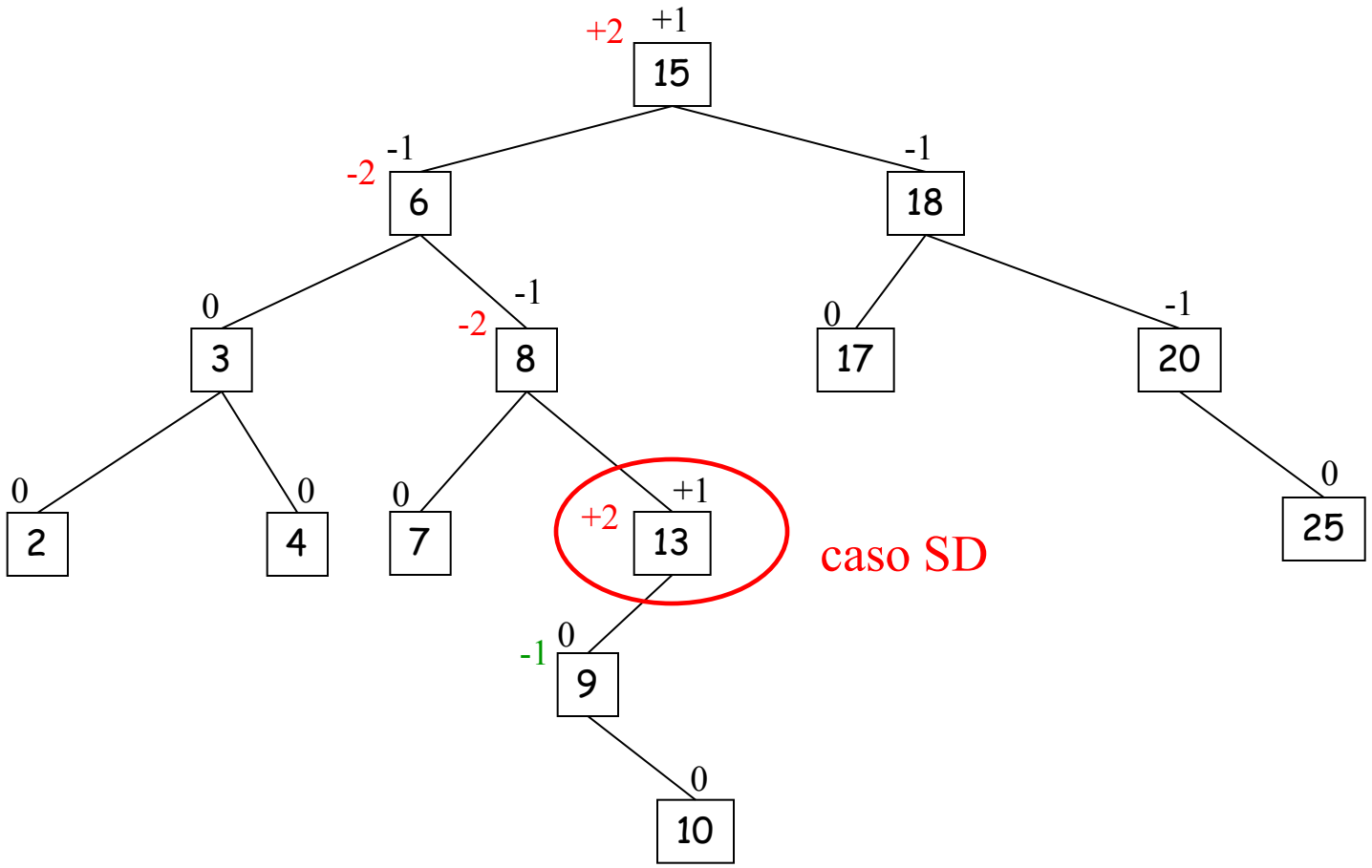

- L'altezza dell'albero dopo la rotazione passa da h+3 a h+2, poiché $T_2$ e $T_3$ sono alti al più h, e il fattore di bilanciamento di w diventa 0, mentre i fattori di bilanciamento di z e v sono 0 oppure ±1.
- Il caso SD può essere provocato sia da inserimenti (in $T_2$ o $T_3$), sia da cancellazioni che abbassano di 1 l'altezza di $T_4$.

# insert(elem e, chiave k)

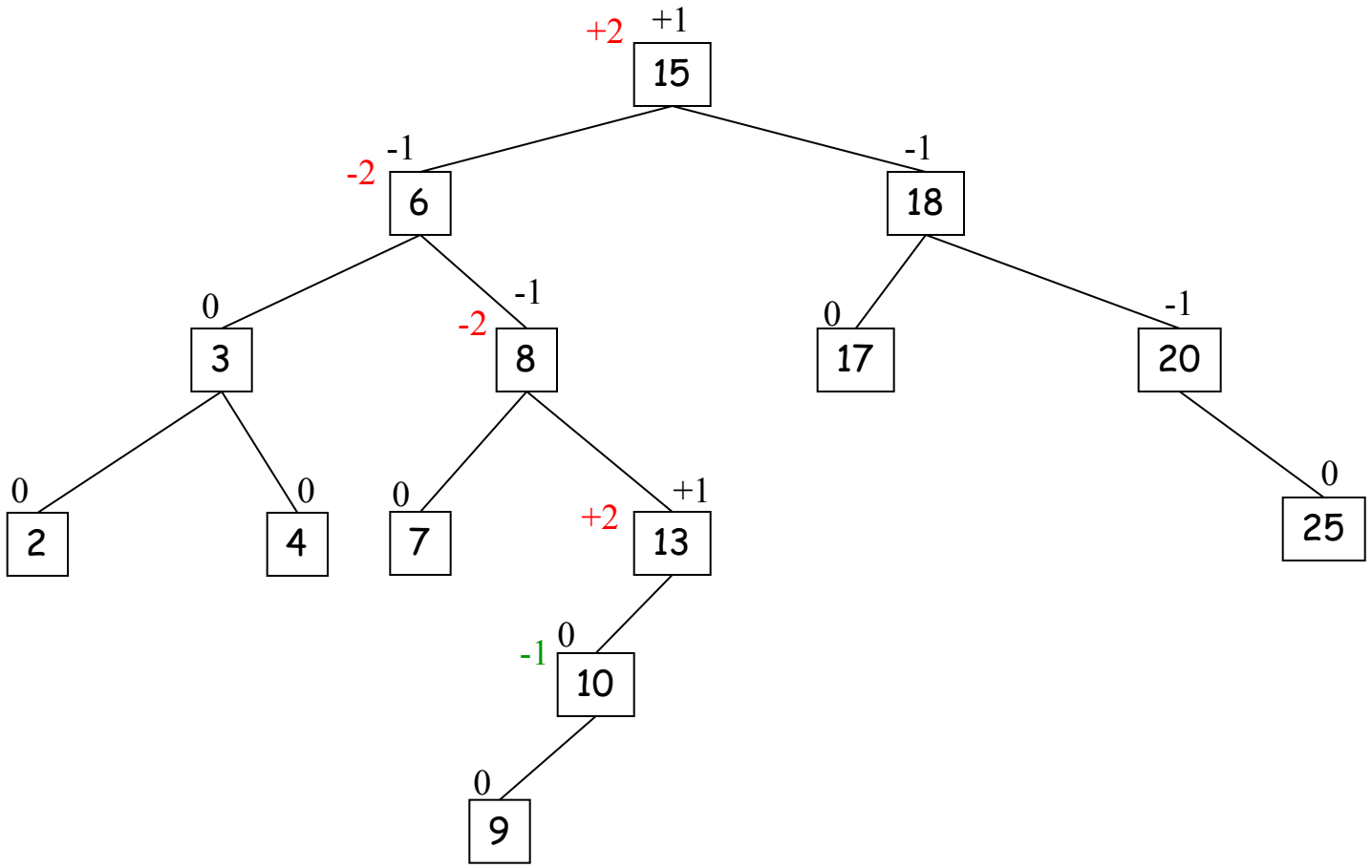
1. Crea un nuovo nodo u con elem=e e chiave=k
2. Inserisci u come in un BST
3. Ricalcola i fattori di bilanciamento dei nodi nel cammino dalla radice a u: sia v il più profondo nodo con fattore di bilanciamento pari a ±2 (nodo critico)
4. Esegui una rotazione opportuna su v

Oss.: un solo ribilanciamento è sufficiente, poiché l'altezza dell'albero coinvolto diminuisce di 1 (sottocaso (i) del caso SS o DD, o casi SD o DS), e quindi torna ad essere uguale all'altezza che aveva prima dell'inserimento

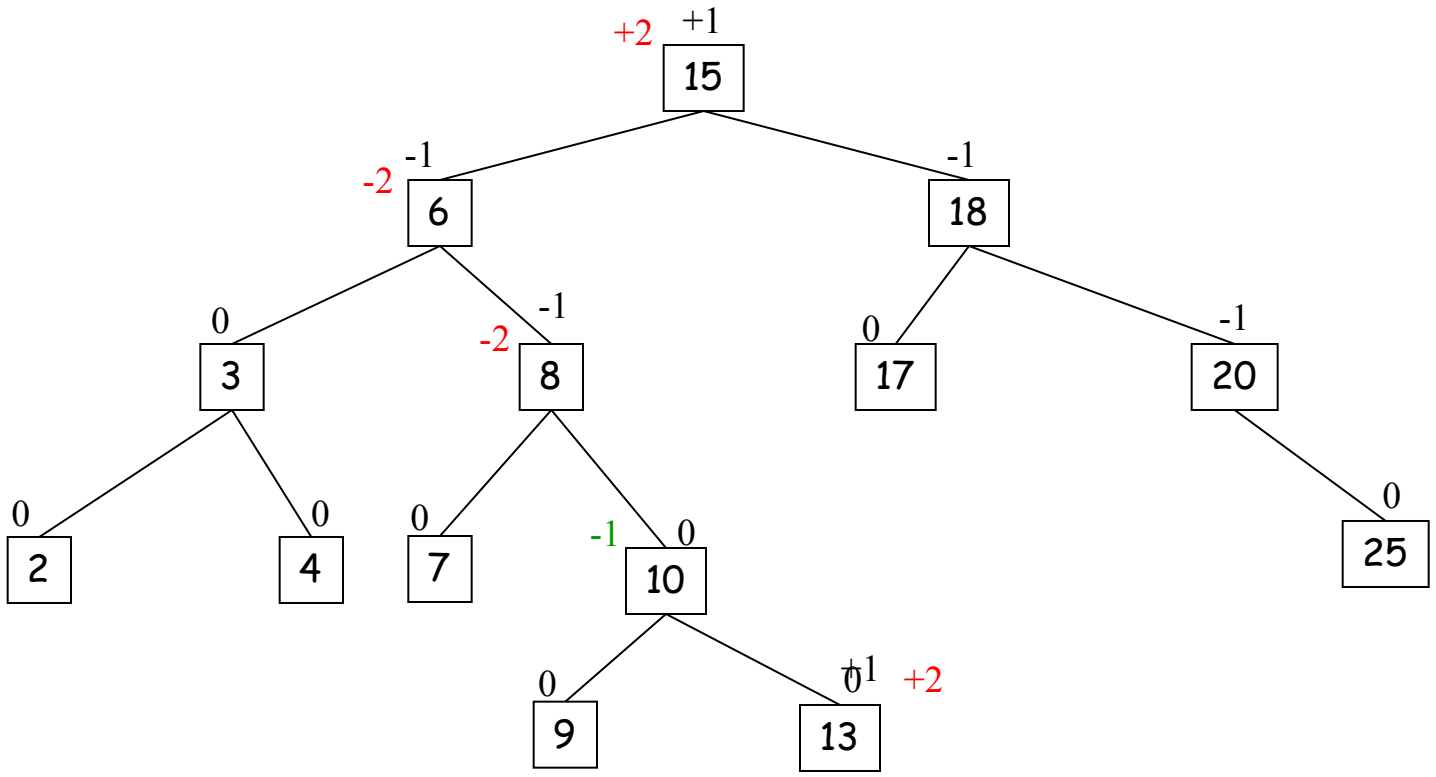
# insert (10,e)



# insert (10,e)



# Esempio: insert (10,e)

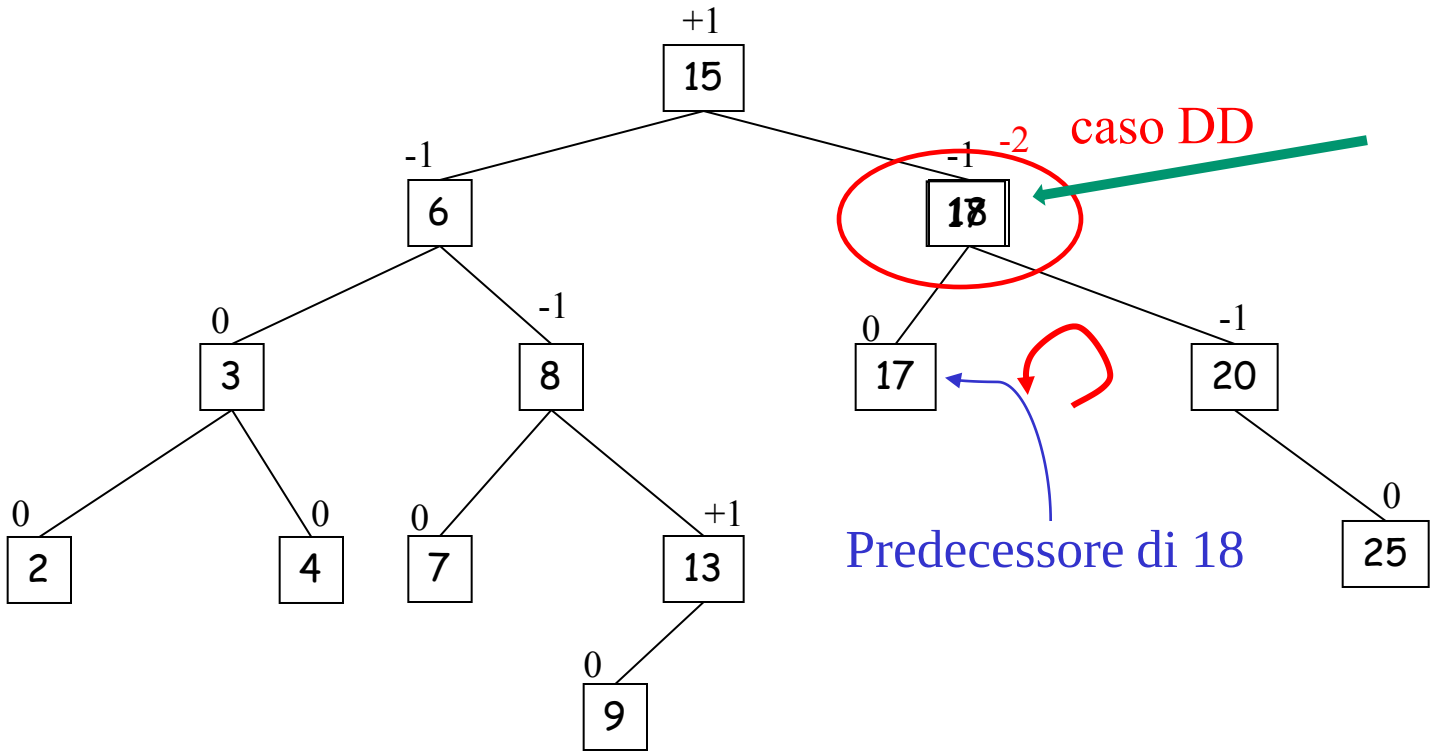


# delete(elem e)

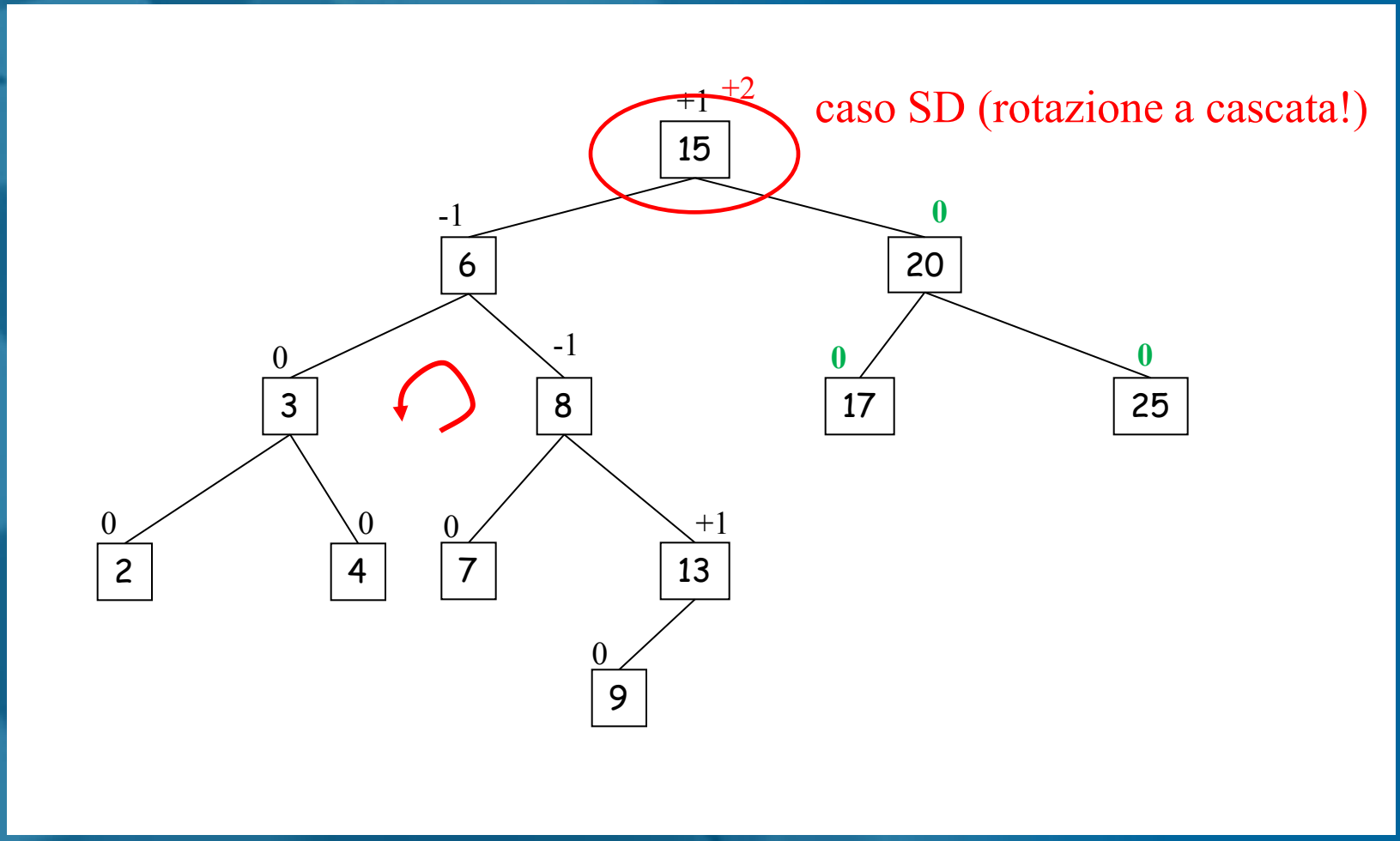
1. Cancella il nodo come in un BST
2. Ricalcola il fattore di bilanciamento del padre del nodo eliminato fisicamente (che potrebbe essere diverso dal nodo contenente e), ed esegui l'opportuna rotazione semplice o doppia ove necessario
3. Ripeti questo passo, sino ad arrivare eventualmente alla radice dell'AVL:
   - Se l'altezza del sottoalbero appena ribilanciato è uguale a quella che aveva prima della cancellazione, termina. Invece, se tale altezza è diminuita, risali verso l'alto (cioè vai nel padre del sottoalbero appena ribilanciato), calcola il fattore di bilanciamento, e applica l'opportuno ribilanciamento.

Oss.: potrebbero essere necessarie O(log n) rotazioni: infatti eventuali diminuzioni di altezza indotte dalle rotazioni possono propagare lo sbilanciamento verso l'alto nell'albero (l'altezza del sottoalbero in cui è avvenuta la rotazione diminuisce di 1 rispetto a quella che aveva prima della cancellazione)

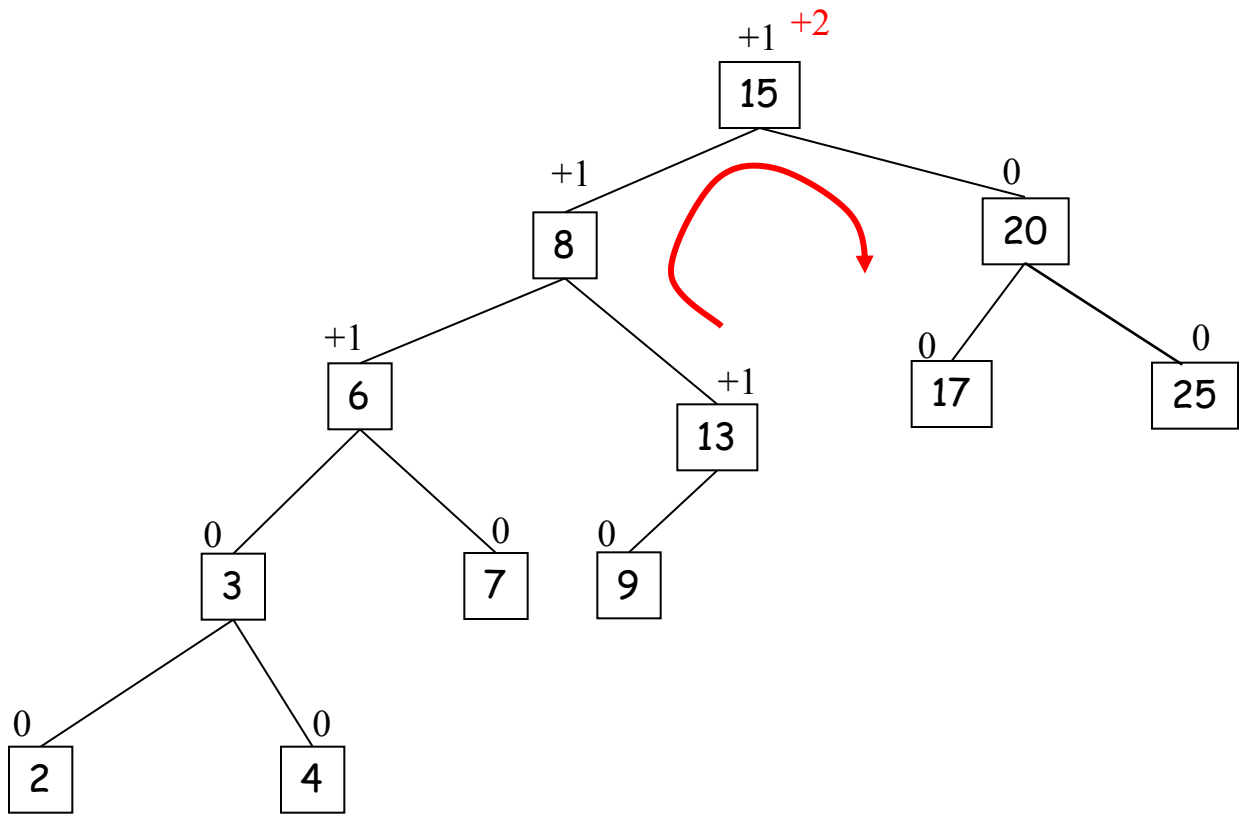
# Esempio: delete (18)



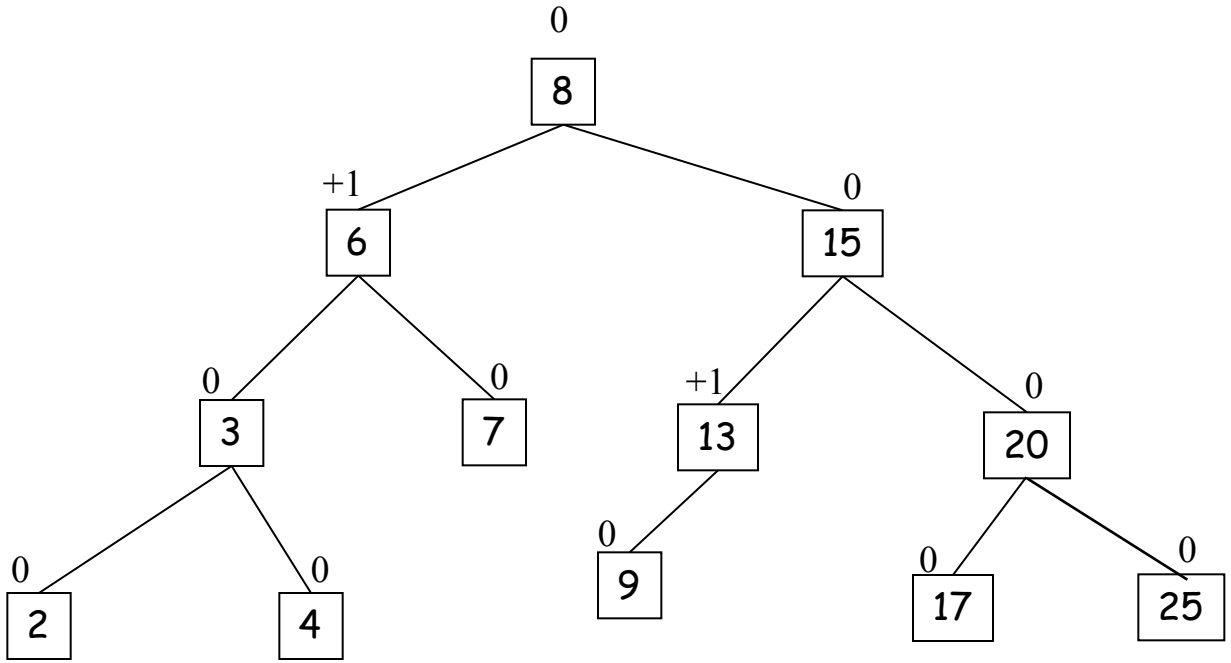
# Ribilanciamento DD e aggiornamento del fattore di bilanciamento del padre del sottoalbero ruotato



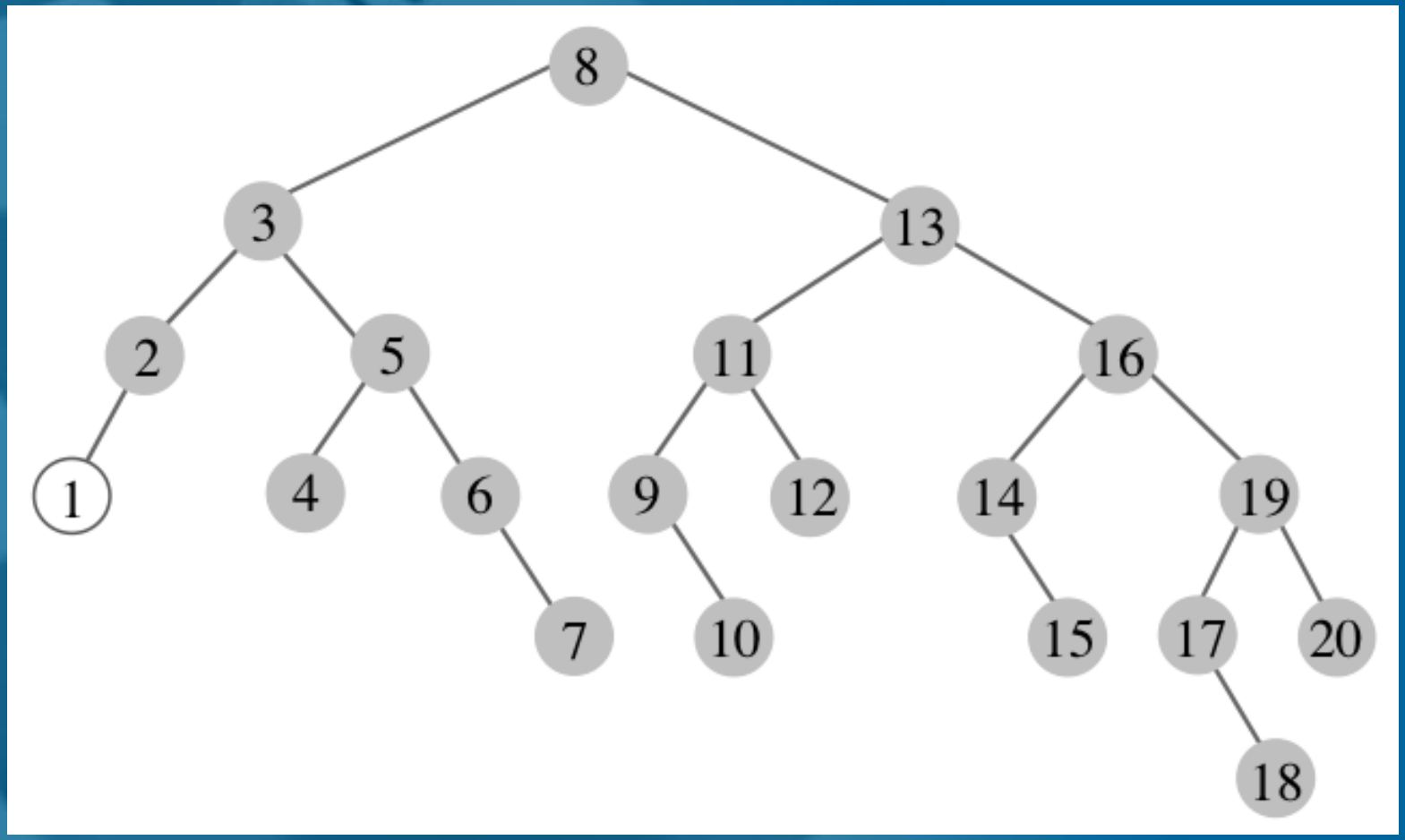
# Ribilanciamento SD



# Albero ribilanciato



# Cancellazione con rotazioni a cascata



# Costo delle operazioni

- Tutte le operazioni hanno costo O(log n) poiché l'altezza dell'albero è O(log n) e ciascuna rotazione richiede solo tempo costante

# Classe AlberoAVL

**classe** `AlberoAVL` **estende** `AlberoBinarioDiRicerca`:

**dati**: $S(n) = O(n)$

albero binario di ricerca $T$ ereditato, più il fattore di bilanciamento di ogni nodo.

**operazioni**:

`search` $(chiave\ k) \rightarrow elem$ $T(n) = O(\log n)$

ereditata.

`insert`$(elem\ e, chiave\ k)$ $T(n) = O(\log n)$

chiama `insert`() ereditata, poi ricalcola i fattori di bilanciamento ed eventualmente ribilancia tramite $O(1)$ rotazioni.

`delete`$(elem\ e)$ $T(n) = O(\log n)$

chiama `delete`() ereditata, poi ricalcola i fattori di bilanciamento ed eventualmente ribilancia tramite $O(\log n)$ rotazioni.