Algoritmi e Strutture Dati

Luciano Gualà
guala@mat.uniroma2.it
www.mat.uniroma2.it/~guala

Sommario

- Delimitazioni inferiori e superiori (di algoritmi e problemi)
- Quanto velocemente si possono ordinare n elementi?
  - una soglia (asintotica) di velocità sotto la quale non si può scendere: un lower bound
    - (per una classe di algoritmi ragionevoli – quelli basati su confronti)
  - una tecinica elegante che usa gli alberi di decisione
- E se si esce da questa classe di algoritmi?
  - integer sort e bucket sort (per interi "piccoli")
  - radix sort (per interi più "grandi")

Delimitazioni inferiori e superiori (di algoritmi e problemi)

Complessità di un algoritmo: delimitazione superiore (upper bound) e inferiore (lower bound)

Definizione

Un algoritmo A ha complessità (costo di esecuzione) $O(f(n))$ rispetto ad una certa risorsa di calcolo, se la quantità $r(n)$ di risorsa usata da A nel caso peggiore su istanze di dimensione n verifica la relazione $r(n)=O(f(n))$.

Definizione

Un algoritmo A ha complessità (costo di esecuzione) $\Omega(f(n))$ rispetto ad una certa risorsa di calcolo, se la quantità $r(n)$ di risorsa usata da A nel caso peggiore su istanze di dimensione n verifica la relazione $r(n)= \Omega(f(n))$

Complessità di un problema: delimitazione superiore (upper bound) e inferiore (lower bound)

Definizione

Un problema P ha una complessità $O(f(n))$ rispetto ad una risorsa di calcolo se esiste un algoritmo che risolve P il cui costo di esecuzione rispetto quella risorsa è $O(f(n))$

Definizione

Un problema P ha una complessità $\Omega(f(n))$ rispetto ad una risorsa di calcolo se ogni algoritmo che risolve P ha costo di esecuzione nel caso peggiore $\Omega(f(n))$ rispetto quella risorsa

Ottimalità di un algoritmo

Definizione

Dato un problema P con complessità $\Omega(f(n))$ rispetto ad una risorsa di calcolo, un algoritmo che risolve P è (asintoticamente) ottimo se ha costo di esecuzione $O(f(n))$ rispetto a quella risorsa

complessità temporale del problema dell'ordinamento

- Upper bound: $O(n^2)$
  - Insertion Sort, Selection Sort, Quick Sort, Bubble Sort
- Un upper bound migliore: $O(n \log n)$
  - Merge Sort, Heap Sort
- Lower bound: $\Omega(n)$
  - banale: ogni algoritmo che ordina n elementi li deve almeno leggere tutti

Abbiamo un **gap di log n** tra upper bound e lower bound!

Possiamo fare meglio?

Sui limiti della velocità: una delimitazione inferiore (lower bound) alla complessità del problema

Ordinamento per confronti
Dati due elementi a_i ed a_j, per determinarne l'ordinamento relativo effettuiamo una delle seguenti operazioni di confronto:

$$a_i < a_j \ ; \ a_i \le a_j \ ; \ a_i = a_j \ ; \ a_i \ge a_j \ ; \ a_i > a_j$$

Non si possono esaminare i valori degli elementi o ottenere informazioni sul loro ordine in altro modo.

Notare: Tutti gli algoritmi citati prima sono algoritmi di ordinamento per confronto.

Teorema

Ogni algoritmo basato su confronti che ordina n elementi deve fare nel caso peggiore $\Omega(n \log n)$ confronti.

Nota: il #di confronti che un algoritmo esegue è un **lower bound** al #di passi elementari che esegue

Corollario

Il Merge Sort e l'Heap Sort sono algoritmi ottimi (almeno dentro la classe di algoritmi basati su confronti).

Uno strumento utile: albero di decisione

Gli algoritmi di ordinamento per confronto possono essere descritti in modo astratto in termini di **alberi di decisione**.

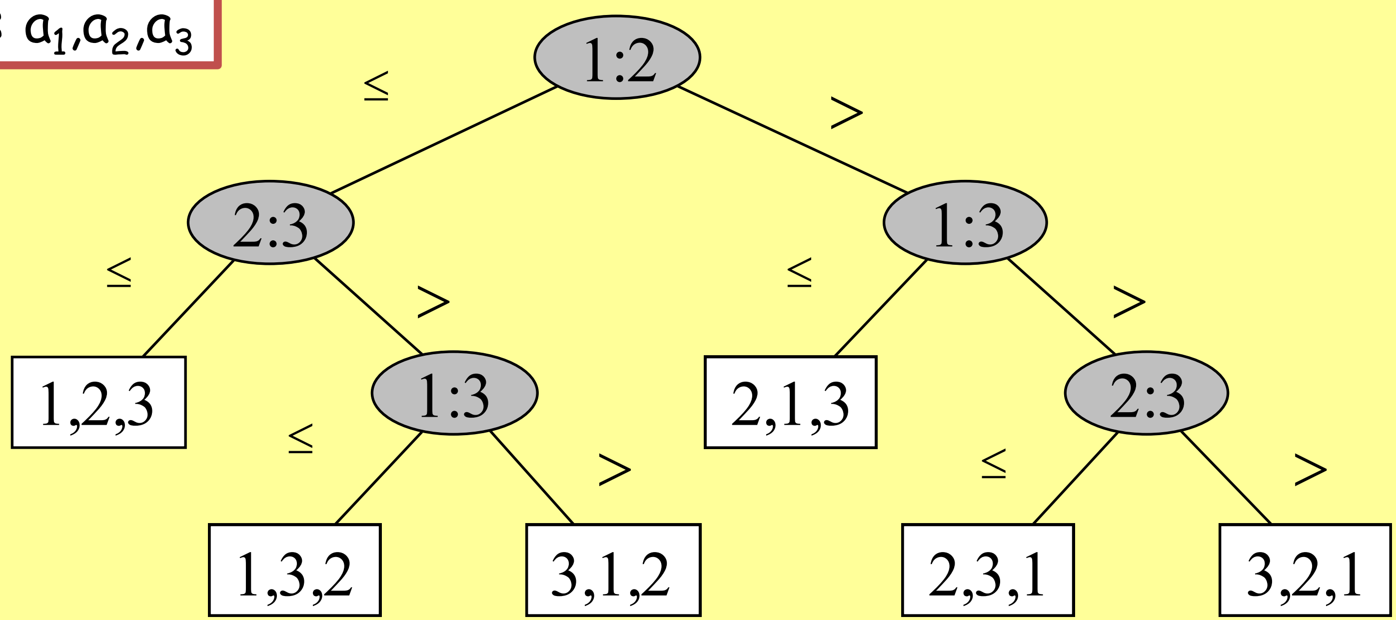
Un generico algoritmo di ordinamento per confronto lavora nel modo seguente:
- confronta due elementi a_i ed a_j (ad esempio effettua il test $a_i \leq a_j$);
- a seconda del risultato – riordina e/o decide il confronto successivo da eseguire.

Albero di decisione - Descrive i confronti che l'algoritmo esegue quando opera su un input di una determinata dimensione. I movimenti dei dati e tutti gli altri aspetti dell'algoritmo vengono ignorati

Alberi di decisione

- Descrive le diverse sequenze di confronti che A potrebbe fare su istanze di dimensione n
- Nodo interno (non foglia): $i:j$
  - modella il confronto tra a_i e a_j
- Nodo foglia:
  - modella una risposta (output) dell'algoritmo: permutazione degli elementi

Input: a_1,a_2,a_3



Osservazioni

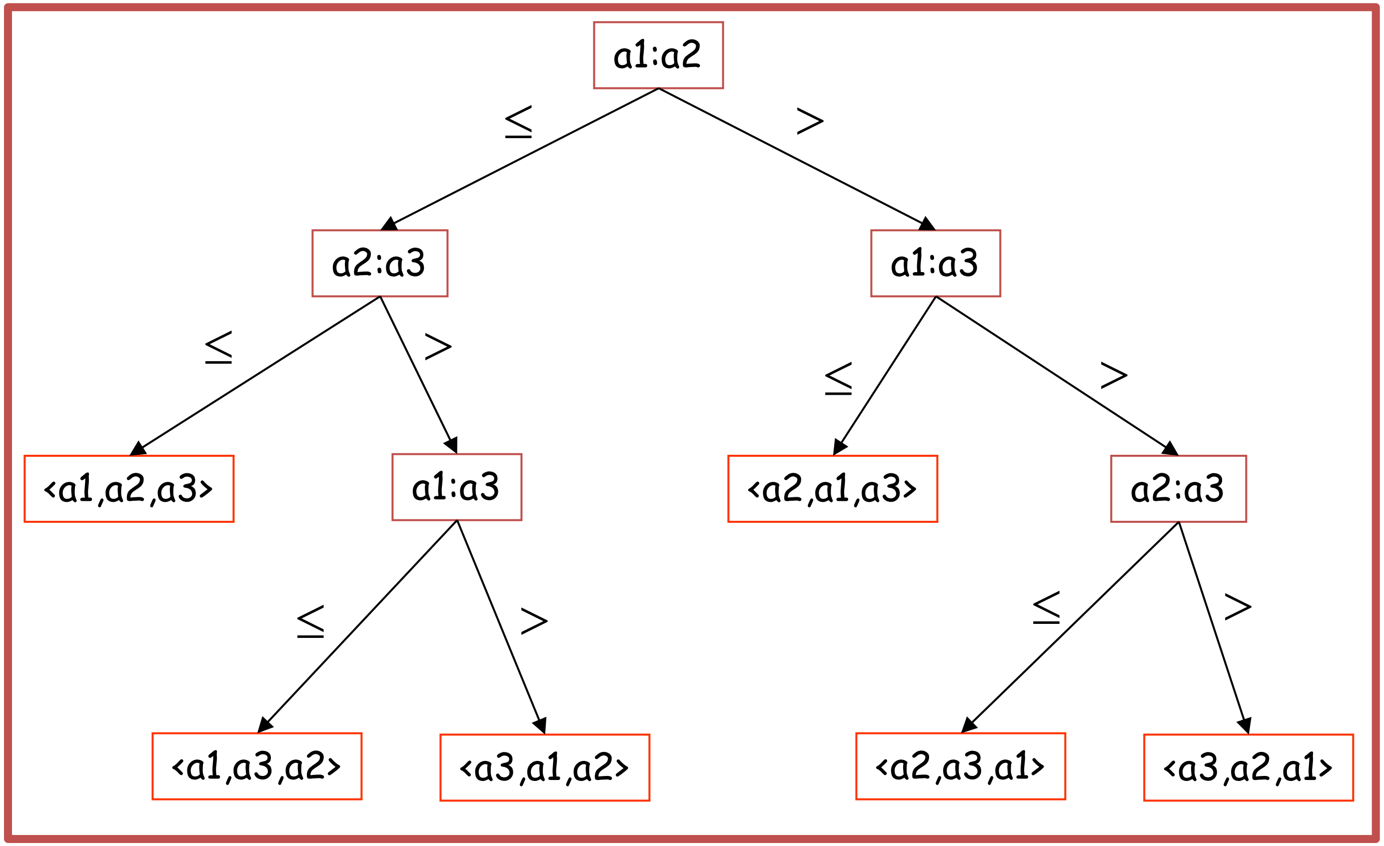
- L'albero di decisione non è associato ad un problema
- L'albero di decisione non è associato solo ad un algoritmo
- L'albero di decisione è associato ad un algoritmo e a una dimensione dell'istanza
- L'albero di decisione descrive le diverse sequenze di confronti che un certo algoritmo può eseguire su istanze di una data dimensione
- L'albero di decisione è una descrizione alternativa dell'algoritmo (customizzato per istanze di una certa dimensione)

Esempio

Fornire l'albero di decisione del seguente algoritmo per istanze di dimensione 3.

```
InsertionSort2 (A)
for k=1 to n-1 do
    x = A[k+1]
    j = k
    while j > 0 e A[j] > x do
        A[j+1] = A[j]
        j= j-1
    A[j+1]=x
```

…eccolo:



a1:a2
≤
>
a2:a3
a1:a3
≤
>
<a1,a2,a3>
a1:a3
≤
>
<a2,a1,a3>
a2:a3
≤
>
<a1,a3,a2>
<a3,a1,a2>
≤
>
<a2,a3,a1>
<a3,a2,a1>

Proprietà

- Per una particolare istanza, i confronti eseguiti dall'algoritmo su quella istanza rappresentano un cammino radice - foglia
- L'algoritmo segue un cammino diverso a seconda delle caratteristiche dell'istanza
  - Caso peggiore: cammino più lungo
- Il numero di confronti nel caso peggiore è pari all'altezza dell'albero di decisione
- Un albero di decisione di un algoritmo (corretto) che risolve il problema dell'ordinamento di n elementi deve avere necessariamente *almeno n! foglie*

Lemma

Un albero binario T con k foglie, ha altezza almeno $\log_2 k$

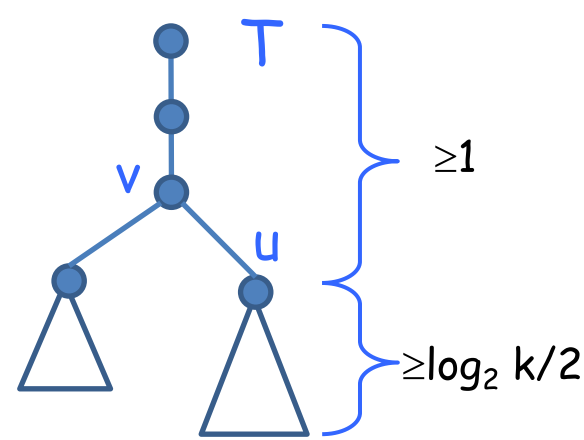
dim (per induzione su k)

caso base: k=1 altezza almeno $\log_2 1=0$

caso induttivo: k>1

considera il nodo interno v più vicino alla radice che ha due figli (v potrebbe essere la radice). nota che v deve esistere perché k>1.

v ha almeno un figlio u che è radice di un (sotto)albero che ha almeno k/2 foglie e < k foglie.



T ha altezza almeno

$1 + \log_2 k/2 = 1+\log_2 k - \log_2 2 = \log_2 k$

Il lower bound $\Omega(n \log n)$

- Consideriamo l'albero di decisione di un qualsiasi algoritmo che risolve il problema dell'ordinamento di n elementi
- L'altezza h dell'albero di decisione è almeno $\log_2 (n!)$
- Formula di Stirling: $n! \approx (2\pi n)^{1/2} \cdot (n/e)^n$

$$h \geq \log_2(n!) > \log_2 (n/e)^n =$$

$$n! > (n/e)^n$$

$$= n \log_2 (n/e) =$$

$$= n \log_2 n - n \log_2 e =$$

$$= \Omega(n \log n)$$

Esercizio

Dimostrare usando la tecnica dell'albero di decisione che l'algoritmo di pesatura che esegue (nel caso peggiore) $\lceil \log_3 n \rceil$ pesate per trovare la moneta falsa fra n monete è ottimo.

può un algoritmo basato su confronti ordinare n interi piccoli, diciamo compresi fra 1 e k=O(n), in (asintoticamente) meno di n logn?

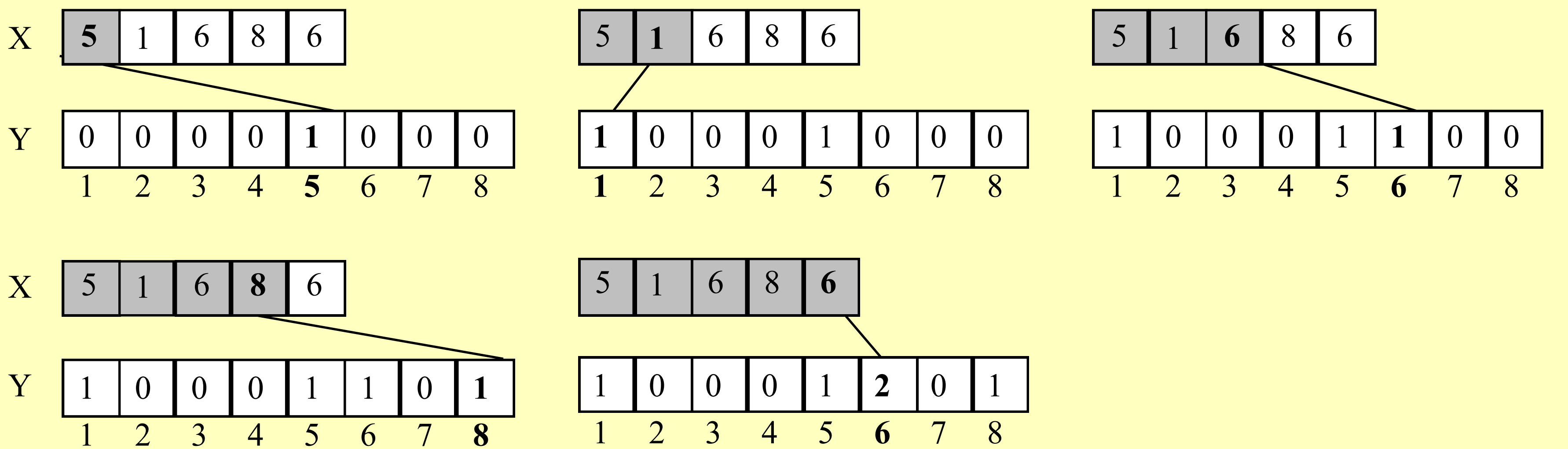
…no, la dimostrazione funziona anche sotto questa ipotesi!

IntegerSort: fase 1

Per ordinare n interi con valori in $[1,k]$

Mantiene un array Y di k contatori tale che

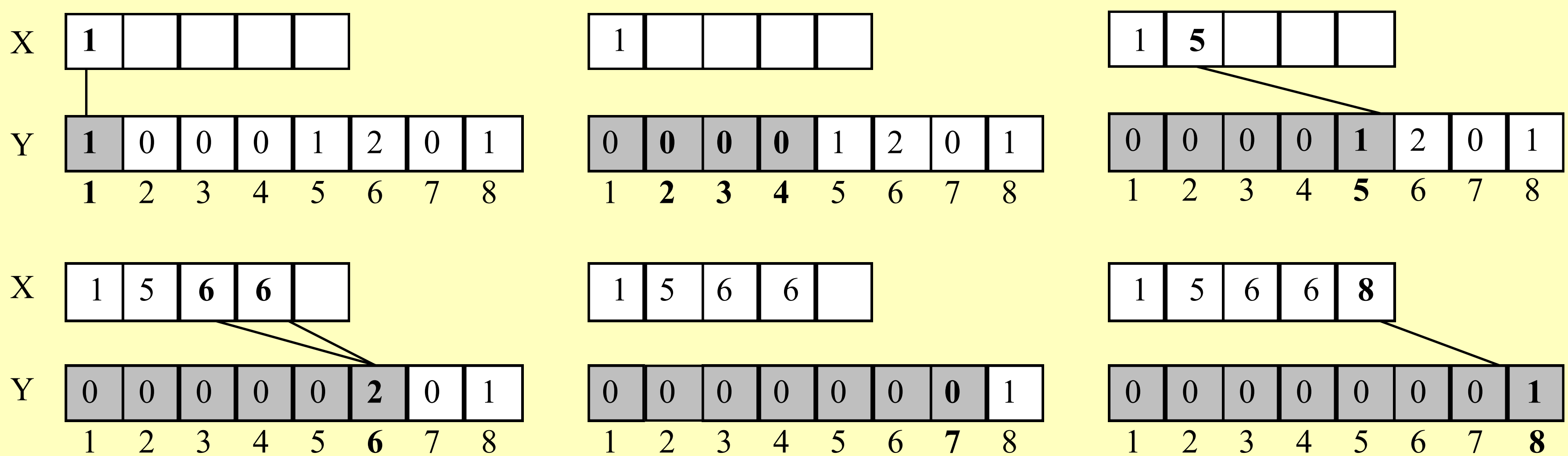
$Y[x]$ = numero di volte che il valore x compare in X



(a) Calcolo di Y

IntegerSort: fase 2

Scorre Y da sinistra verso destra e, se Y[x]=k, scrive in X il valore x per k volte



(b) Ricostruzione di X

IntegerSort (X, k)

```
Sia Y un array di dimensione k                    } O(1) - tempo costante
for i=1 to k do Y[i]=0                            } O(k)
for i=1 to n do incrementa Y[X[i]]                } O(n)
j=1                                               } O(1)
for i=1 to k do                                   } O(k)
    while (Y[i] > 0) do
        X[j]=i
        incrementa j
        decrementa Y[i]
```

per i fissato #volte eseguite è al più 1+Y[i] ⇒ O(k+n)

$$\sum_{i=1}^{k} (1+Y[i]) = \sum_{i=1}^{k} 1 + \sum_{i=1}^{k} Y[i] = k + n$$

IntegerSort: analisi

- Tempo $O(1)+O(k)=O(k)$ per inizializzare Y a 0
- Tempo $O(1)+O(n)=O(n)$ per calcolare i valori dei contatori
- Tempo $O(n+k)$ per ricostruire X

$$O(n+k)$$

Tempo lineare se $k=O(n)$

Contraddice il lower bound di $\Omega(n \log n)$?

No, perché l'Integer Sort non è un algoritmo basato su confronti!

Una domanda

Che complessità temporale ha l'IntegerSort quando $k = \omega(n)$, per esempio $k=\Theta(n^c)$, con $c>1$ costante?

…$T(n) = \Theta(n^c)$…

…$=\omega(n \log n)$ per $c > 1$…

Sommario

- Delimitazioni inferiori e superiori (di algoritmi e problemi)
- Quanto velocemente si possono ordinare n elementi?
  - una soglia (asintotica) di velocità sotto la quale non si può scendere: un lower bound
    - (per una classe di algoritmi ragionevoli – quelli basati su confronti)
  - una tecinica elegante che usa gli alberi di decisione
- E se si esce da questa classe di algoritmi?
  - integer sort e bucket sort (per interi “piccoli”)
  - radix sort (per interi più “grandi”)

BucketSort

Per ordinare n record con chiavi intere in $[1,k]$

- Esempio: ordinare n record con campi:
  - nome, cognome, anno di nascita, matricola,…

- si potrebbe voler ordinare per matricola o per anno di nascita

Input del problema:
- n record mantenuti in un array
- ogni elemento dell'array è un record con
  - campo chiave (rispetto al quale ordinare)
  - altri campi associati alla chiave (informazione satellite)

BucketSort

- Basta mantenere un array di liste, anziché di contatori, ed operare come per IntegerSort
- La lista Y[i] conterrà gli elementi con chiave uguale a i
- Concatenare poi le liste

Tempo $O(n+k)$ come per IntegerSort

esempio

X

	chiave	info satellite
1	5	α
2	1	β
3	6	γ
4	8	η
5	6	β

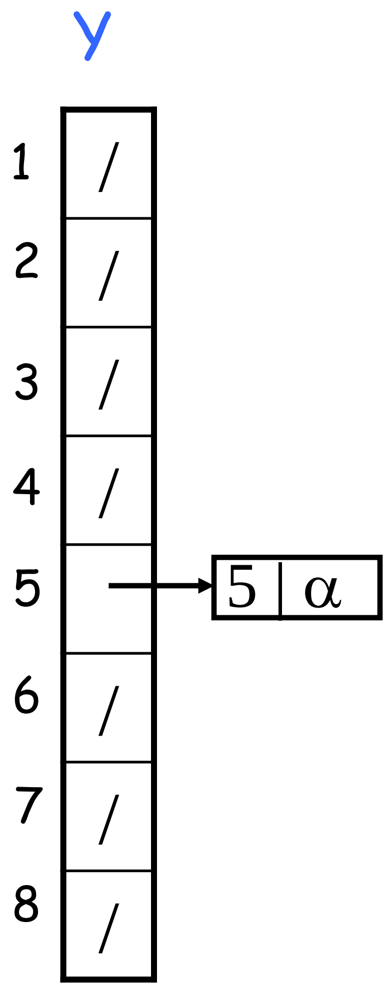
y

1	/
2	/
3	/
4	/
5	/
6	/
7	/
8	/

esempio

X

	chiave	info satellite
1	5	α
2	1	β
3	6	γ
4	8	η
5	6	β

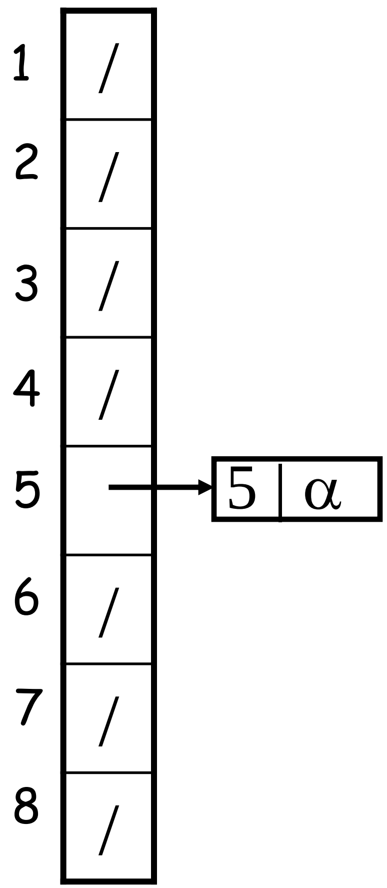


esempio

X

	chiave	info satellite
1	5	α
2	1	β
3	6	γ
4	8	η
5	6	β

y

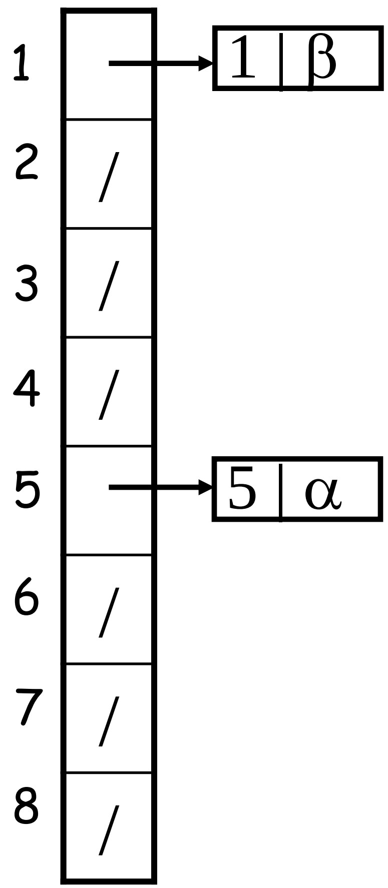


esempio

X

	chiave	info satellite
1	5	α
2	1	β
3	6	γ
4	8	η
5	6	β

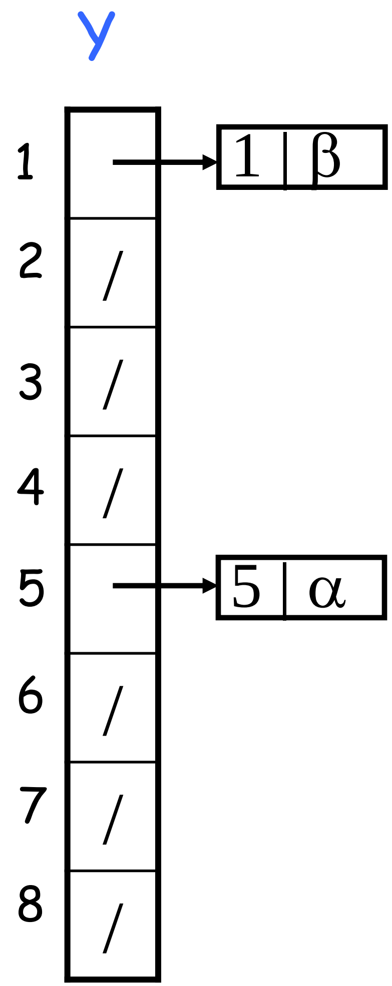
y



esempio

x

	chiave	info satellite
1	5	α
2	1	β
3	6	γ
4	8	η
5	6	β

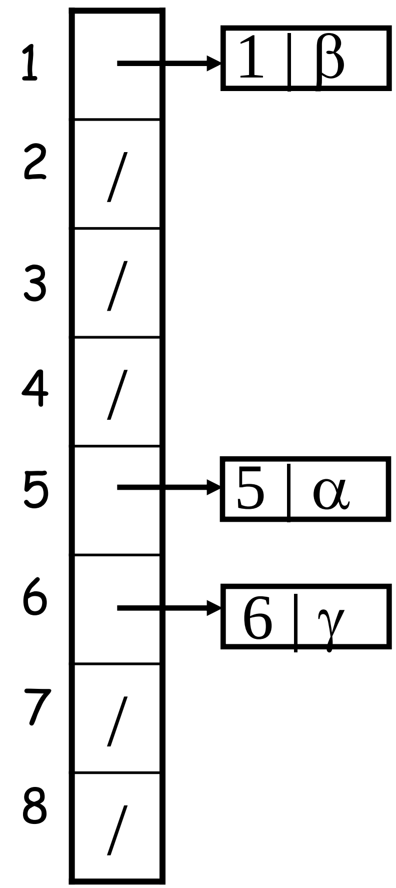


esempio

X

	chiave	info satellite
1	5	α
2	1	β
3	6	γ
4	8	η
5	6	β

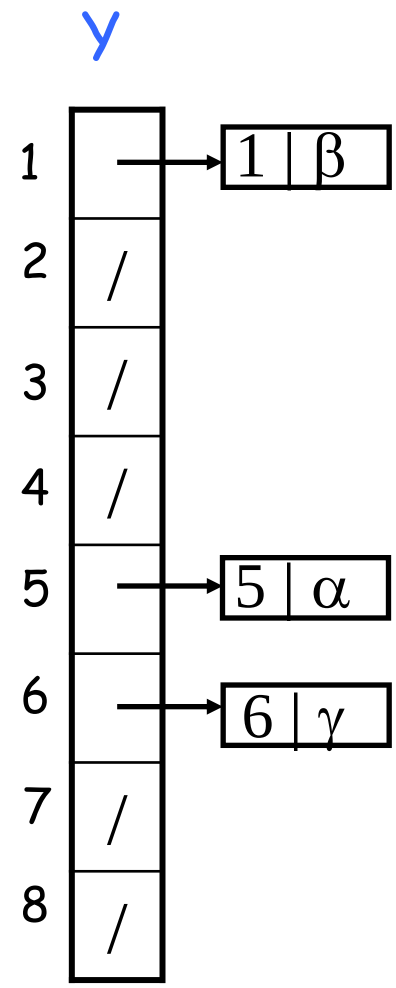
Y



esempio

X

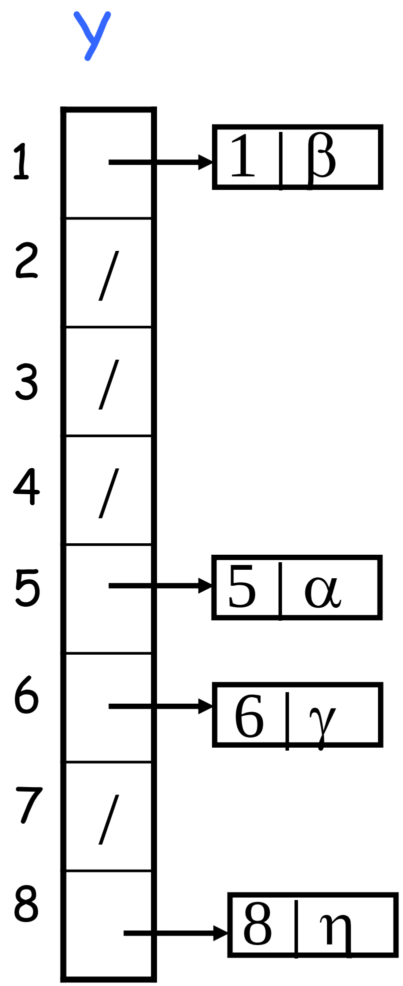
	chiave	info satellite
1	5	α
2	1	β
3	6	γ
4	8	η
5	6	β



esempio

X

	chiave	info satellite
1	5	α
2	1	β
3	6	γ
4	8	η
5	6	β

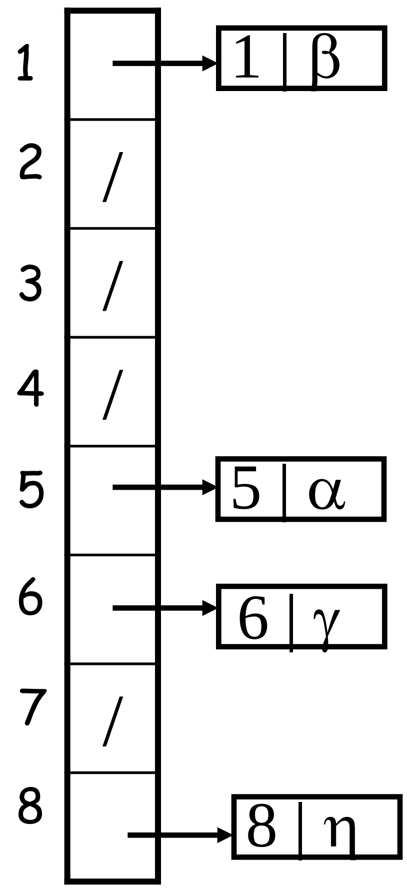


esempio

X

	chiave	info satellite
1	5	α
2	1	β
3	6	γ
4	8	η
5	6	β

y

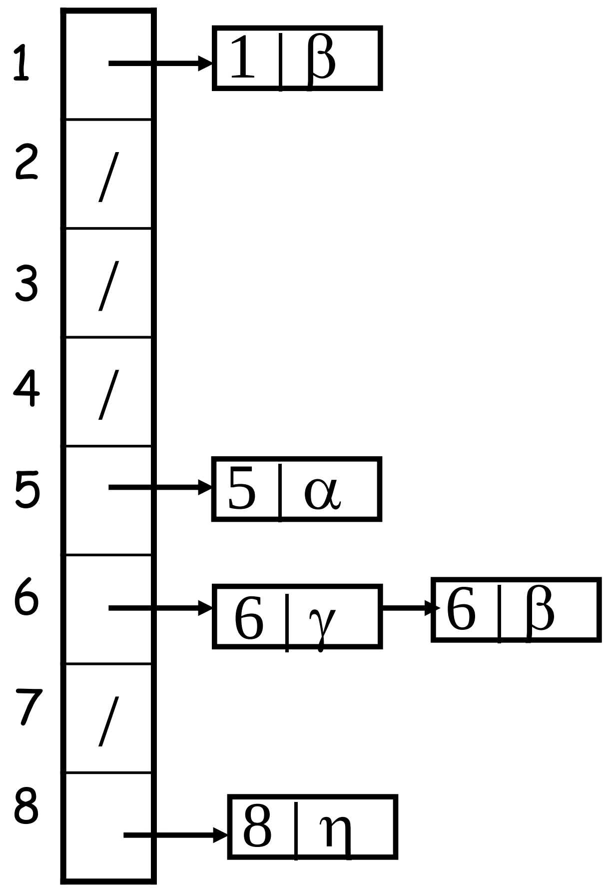


esempio

x

	chiave	info satellite
1	5	α
2	1	β
3	6	γ
4	8	η
5	6	β

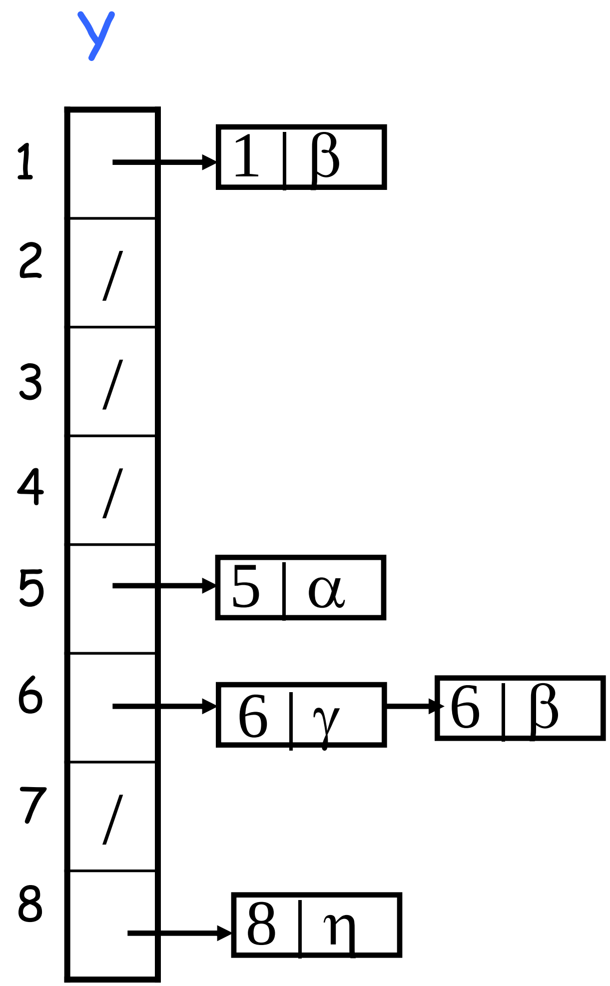
y



esempio

X

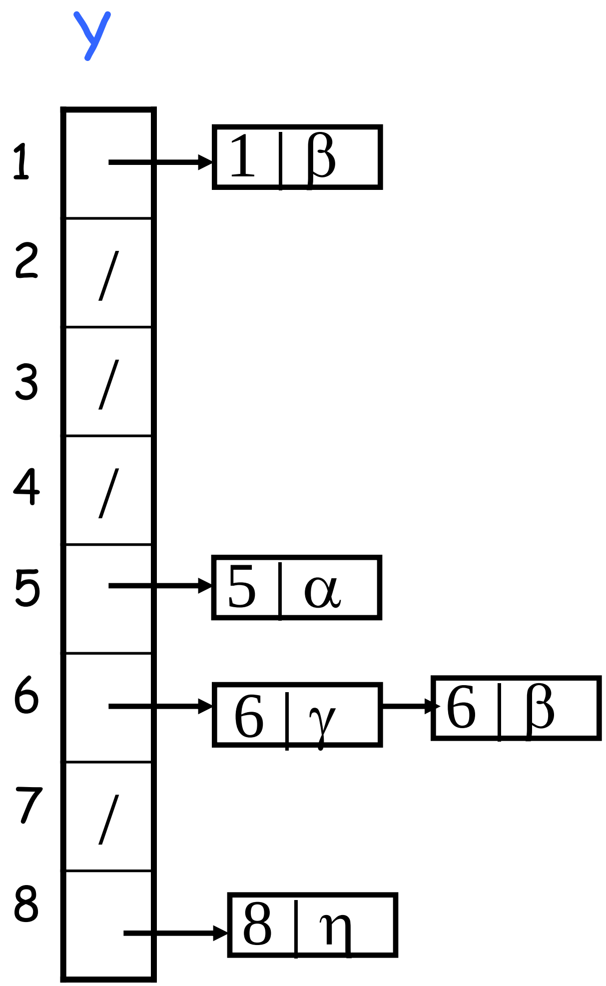
	chiave	info satellite
1	5	α
2	1	β
3	6	γ
4	8	η
5	6	β



esempio

X

	chiave	info satellite
1	5	α
2	1	β
3	6	γ
4	8	η
5	6	β



X (ordinato)

	chiave	info satellite
1	1	β
2	5	α
3	6	γ
4	6	β
5	8	η

```
BucketSort (X, k)
1.    Sia Y un array di dimensione k
2.    for i=1 to k do Y[i]=lista vuota
3.    for i=1 to n do
4.        appendi il record X[i] alla lista Y[chiave(X[i])]
5.    for i=1 to k do
6.        copia ordinatamente in X gli elemeti della lista Y[i]
```

Stabilità

- Un algoritmo è stabile se preserva l'ordine iniziale tra elementi con la stessa chiave
- domanda: il BucketSort è stabile?
- Il BucketSort è stabile se si appendendo gli elementi di X in coda alla opportuna lista Y[i]

RadixSort

- Ordina n interi con valori in [1,k]

- Rappresentiamo gli elementi in base b, ed eseguiamo una serie di BucketSort

- Partiamo dalla cifra meno significativa verso quella più significativa:
  - Ordiniamo per l'i-esima cifra con una passata di buckerSort (stabile)
  - i-esima cifra è la chiave, il numero info satellite
  - i-esima cifra è un intero in [0,b-1]

	2397		5924		5924		4368		2397
Per b=10	4368	→	2397	→	4368	→	2397	→	4368
	5924		4368		2397		5924		5924

Correttezza

- Se x e y hanno una diversa t-esima cifra, la t-esima passata di BucketSort li ordina
- Se x e y hanno la stessa t-esima cifra, la proprietà di stabilità del BucketSort li mantiene ordinati correttamente

Dopo la t-esima passata di BucketSort, i numeri sono correttamente ordinati rispetto alle t cifre meno significative

Tempo di esecuzione

- $O(\log_b k)$ passate di bucketsort
  - # di cifre per rappresentare il valore massimo k in base b: $O(\log_b k)$
- Ciascuna passata richiede tempo $O(n+b)$
  - in ogni passata la chiave è un intero in [0,b-1]

$$O((n+b) \log_b k)$$

$$\log_2 k = \log_n k \log_2 n$$

Se $b = \Theta(n)$, si ha $O(n \log_n k) = O\left(n \frac{\log k}{\log n}\right)$

Tempo lineare se $k=O(n^c)$, c costante

esempio

- Si supponga di voler ordinare 10^6 numeri da 32 bit
- Come scelgo la base b?
- 10^6 è compreso fra 2^{19} e 2^{20}
- Scegliendo $b=2^{16}$ si ha:
  - sono sufficienti 2 passate di bucketSort
  - ogni passata richiede tempo lineare

Problema 4.10

Dato un vettore X di n interi in $[1,k]$, costruire in tempo O(n+k) una struttura dati (oracolo) che sappia rispondere a domande (query) in tempo O(1) del tipo: “quanti interi in X cadono nell’intervallo $[a,b]$?”, per ogni a e b.

X	1	10	4	5	5	20	3	3
	1	2	3	4	5	6	7	8

a=5
b=15

oracolo

Problema 4.10

Dato un vettore X di *n* interi in [1,*k*], costruire in tempo O(n+k) una struttura dati (oracolo) che sappia rispondere a domande (query) in tempo O(1) del tipo: “quanti interi in X cadono nell’intervallo [*a*,*b*]?”, per ogni *a* e *b*.

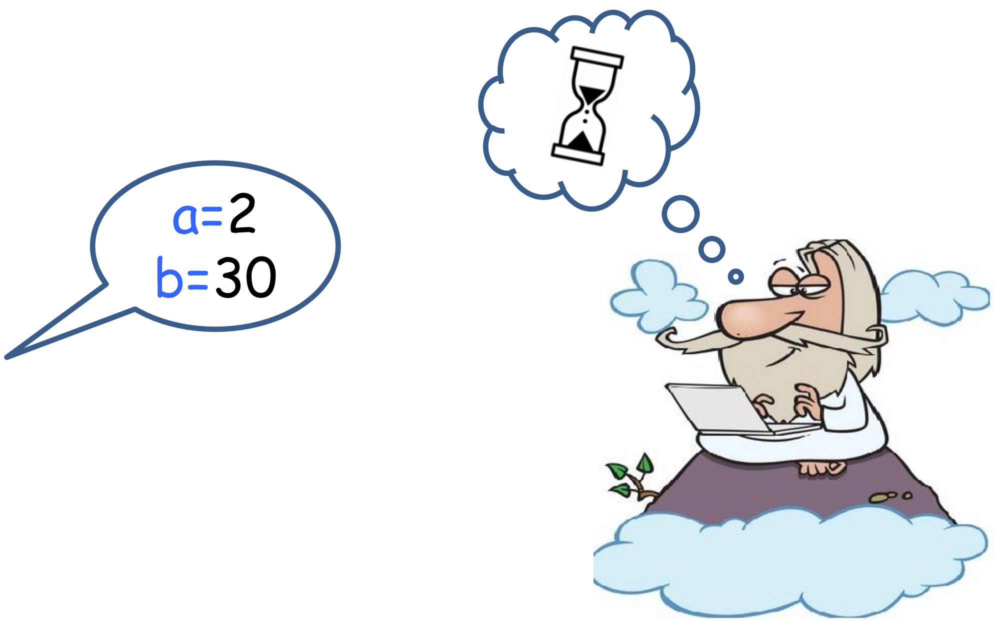
X	1	10	4	5	5	20	3	3
	1	2	3	4	5	6	7	8

oracolo

Problema 4.10

Dato un vettore X di n interi in $[1,k]$, costruire in tempo O(n+k) una struttura dati (oracolo) che sappia rispondere a domande (query) in tempo O(1) del tipo: “quanti interi in X cadono nell’intervallo $[a,b]$?”, per ogni a e b.

X	1	10	4	5	5	20	3	3
	1	2	3	4	5	6	7	8



oracolo

Problema 4.10

Dato un vettore X di n interi in $[1,k]$, costruire in tempo O(n+k) una struttura dati (oracolo) che sappia rispondere a domande (query) in tempo O(1) del tipo: "quanti interi in X cadono nell'intervallo $[a,b]$?", per ogni a e b.

X	1	10	4	5	5	20	3	3
	1	2	3	4	5	6	7	8

oracolo

Problema 4.10

Dato un vettore X di *n* interi in [1,*k*], costruire in tempo O(n+k) una struttura dati (oracolo) che sappia rispondere a domande (query) in tempo O(1) del tipo: “quanti interi in X cadono nell’intervallo [*a*,*b*]?”, per ogni *a* e *b*.

X	1	10	4	5	5	20	3	3
	1	2	3	4	5	6	7	8

#elem in X
fra a e b

a
b

alg che costruisce l’oracolo

oracolo

Qualità oracolo:

- tempo di costruzione
- tempo di query

Soluzione 1: rispondere "al volo"

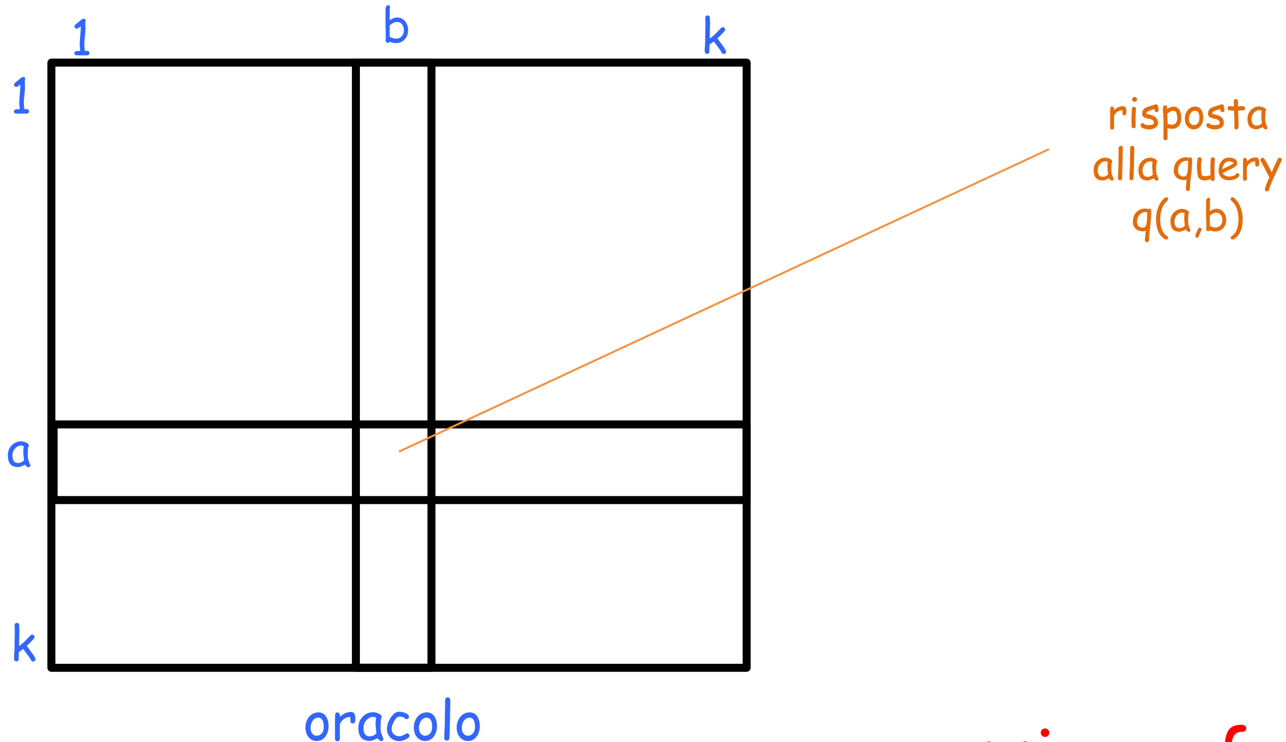
X

oracolo

Qualità oracolo:

- tempo di costruzione: $O(1)$
- tempo di query: $\Theta(n)$

Soluzione 2: precalcolare tutte le possibili domande



Qualità oracolo:

-tempo di costruzione: $\Omega(k^2)$

-tempo di query: $O(1)$

possiamo fare meglio?

Idea: Costruire in tempo $O(n+k)$ un array Y di dimensione k dove Y[i] è il numero di elementi di X che sono $\leq$ i

CostruisciOracolo (X, k)

1. Sia Y un array di dimensione k
2. **for** i=1 **to** k **do** Y[i]=0
3. **for** i=1 **to** n **do** incrementa Y[X[i]]
4. **for** i=2 **to** k **do** Y[i]=Y[i]+Y[i-1]
5. **return** Y

InterrogaOracolo (Y, k, a, b)

1. **if** b > k **then** b=k
2. **if** $a \leq 1$ **then return** Y[b]

   else return (Y[b]-Y[a-1])

Esercizio

Dato un vettore A di *n* numeri, costruire in tempo O(n log n) una struttura dati (oracolo) che sappia rispondere a domande (query) in tempo O(log n) del tipo: “quanti elementi in X cadono nell’intervallo [*a*,*b*]?”, per ogni *a* e *b*.