Progettare algoritmi veloci usando strutture dati efficienti

Un esempio: HeapSort

HeapSort: l'idea

- Stesso approccio incrementale del SelectionSort
  - – seleziona gli elementi dal più grande al più piccolo
  - – usa una struttura dati efficiente
    - estrazione in tempo O(log n) del massimo

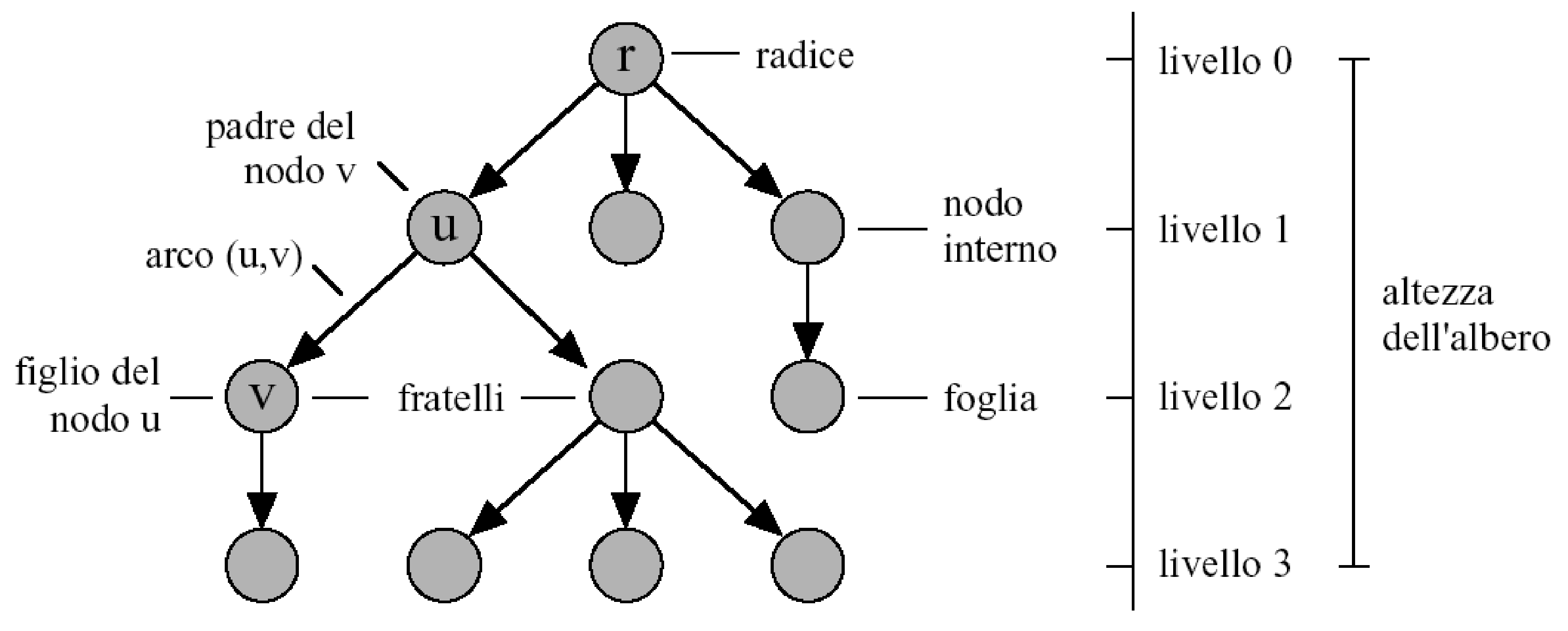
HeapSort

- Tipo di dato
  - Specifica una collezione di oggetti e delle operazioni di interesse su tale collezione (es. Dizionario: mantiene un insieme di elementi con chiavi soggetto a operazioni di inserimento, cancellazione, ricerca)
- Struttura dati
  - Organizzazione dei dati che permette di memorizzare la collezione e supportare le operazioni di un tipo di dato usando meno risorse di calcolo possibile

- Cruciale: progettare una struttura dati H su cui eseguire efficientemente le operazioni:
  - dato un array A, generare velocemente H
  - trovare il più grande oggetto in H
  - cancellare il più grande oggetto da H

Tipo di dato associato: coda con priorità (ci torneremo)

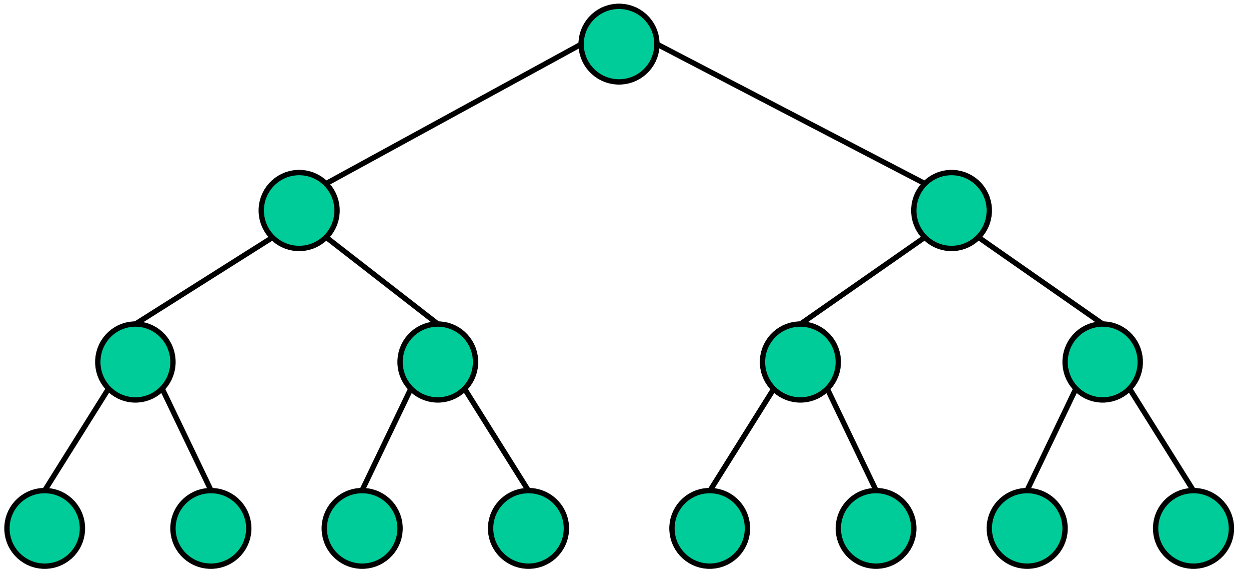
Alberi: qualche altra definizione



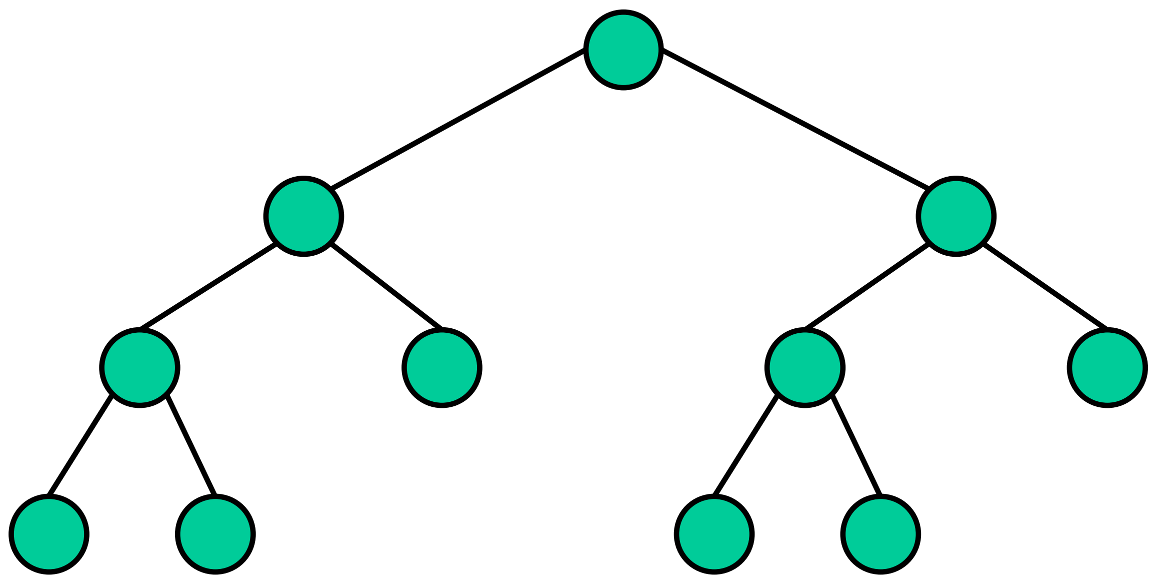
albero d-ario: albero in cui tutti i nodi interni hanno (al più) d figli

d=2 → albero binario

un albero d-ario è completo: se tutti nodi interni hanno esattamente d figli e le foglie sono tutte allo stesso livello



albero binario
completo



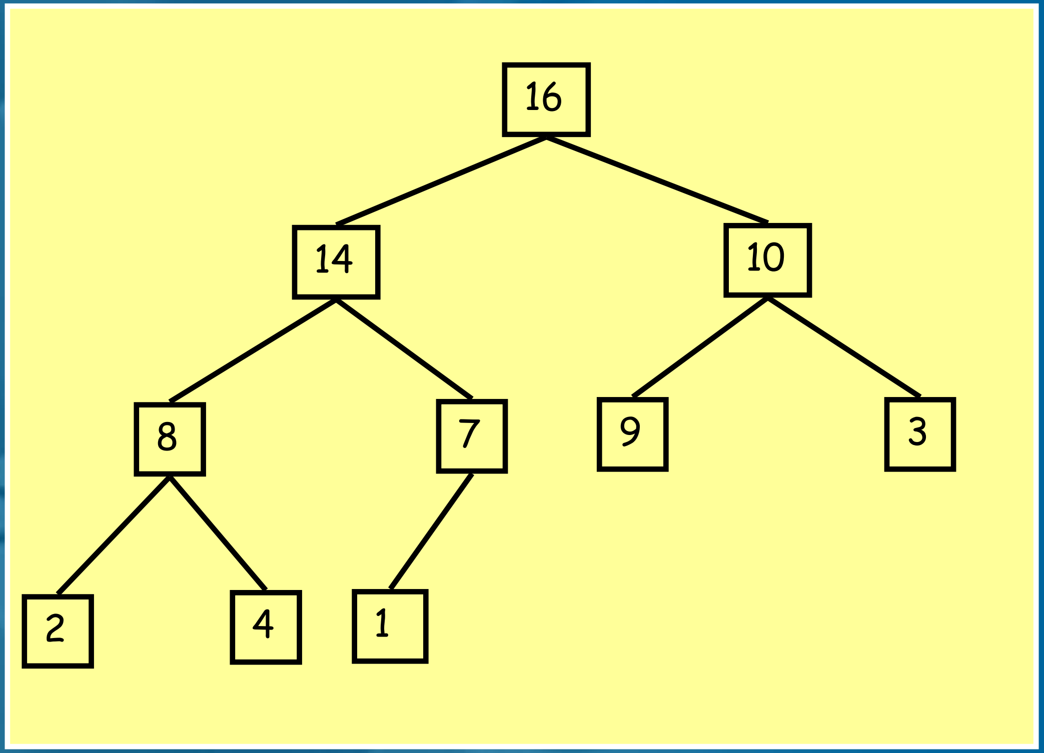
albero binario
(non completo)

HeapSort

- Struttura dati heap associata ad un insieme S = albero binario radicato con le seguenti proprietà:
  1) completo fino al penultimo livello (struttura rafforzata: foglie sull'ultimo livello tutte compattate a sinistra)
  2) gli elementi di S sono memorizzati nei nodi dell'albero (ogni nodo v memorizza uno e un solo elemento, denotato con chiave(v))
  3) chiave(padre(v)) ≥ chiave(v) per ogni nodo v diverso dalla radice

…un esempio

In questa direzione è presente un ordinamento



il massimo è contenuto nella radice!

In questa direzione non è presente un ordinamento

Proprietà salienti degli heap

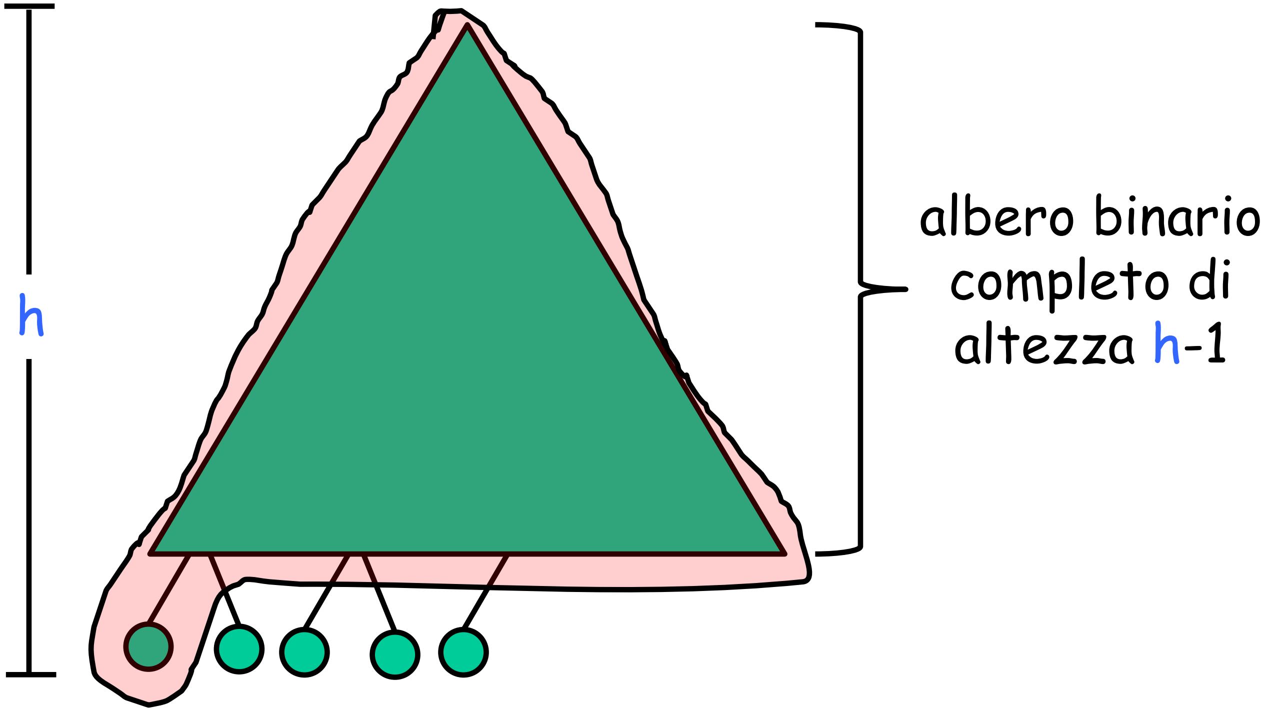
1) Il massimo è contenuto nella radice

2) L'albero con n nodi ha altezza O(log n)

3) Gli heap con struttura rafforzata possono essere rappresentati in un array di dimensione pari a n

Altezza di un heap
(prop. 2)

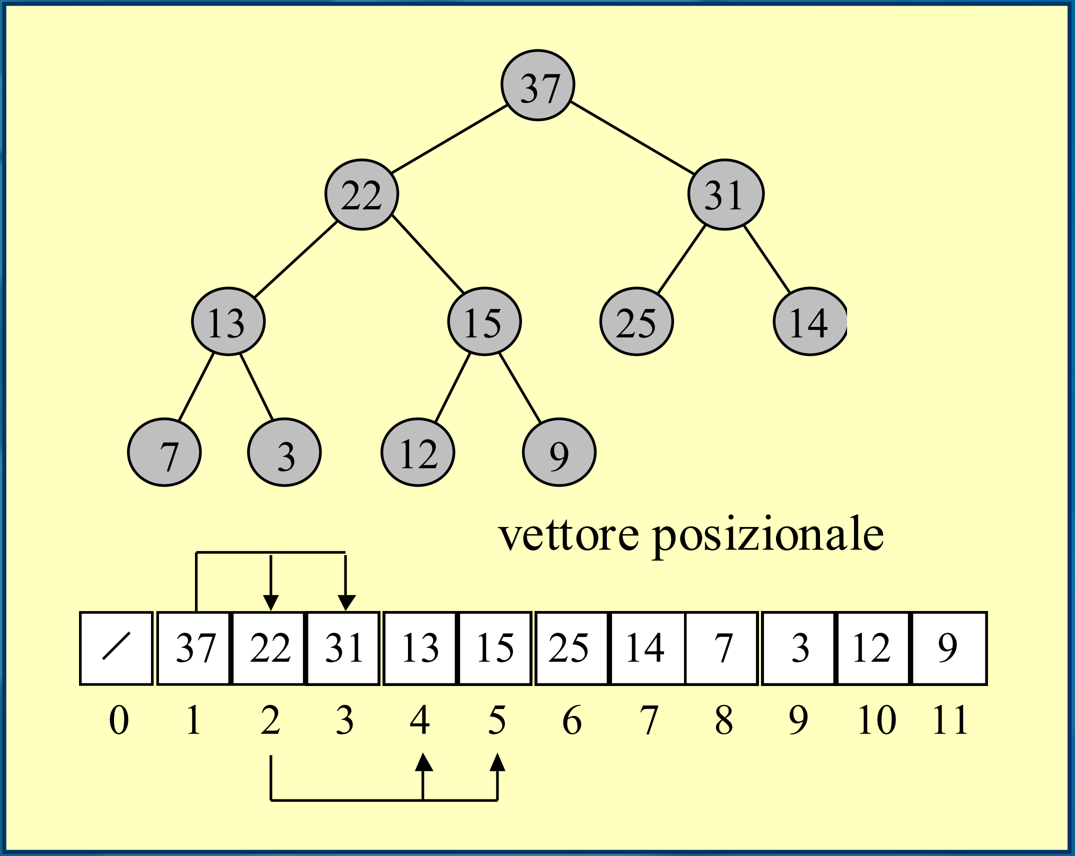
Sia H un heap di n nodi e altezza h.



$$n \geq 1 + \sum_{i=0}^{h-1} 2^i = 1 + 2^h - 1 = 2^h$$

$\Rightarrow$ $h \leq \log_2 n$

Rappresentazione tramite vettore posizionale (prop. 3)



$\sin(i) = 2i$

$\mathrm{des}(i) = 2i+1$

$\mathrm{padre}(i)=\lfloor i/2 \rfloor$

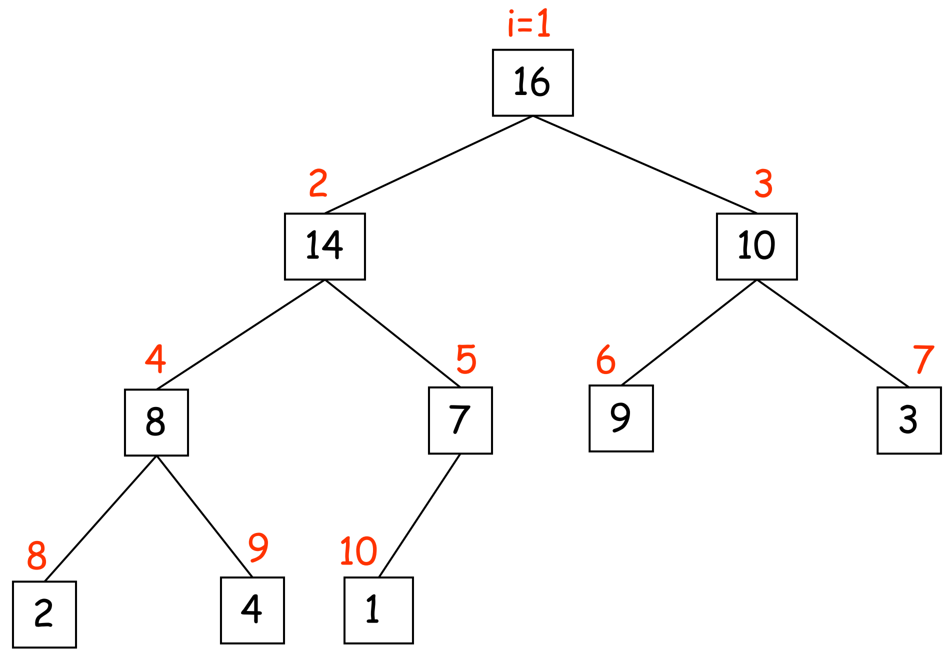
è sufficiente un vettore di dimensione n

in generale dimensione vettore diverso da numero elementi

nello pseudocodice numero oggetti indicato con heapsize[A]

(a volte memorizzato nella posizione 0)

…ancora un esempio



i=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…	…	Length[A]
16	14	10	8	7	9	3	2	4	1	…	…	…

Heap-size[A]

Heap-size[A] $\neq$ Length[A]

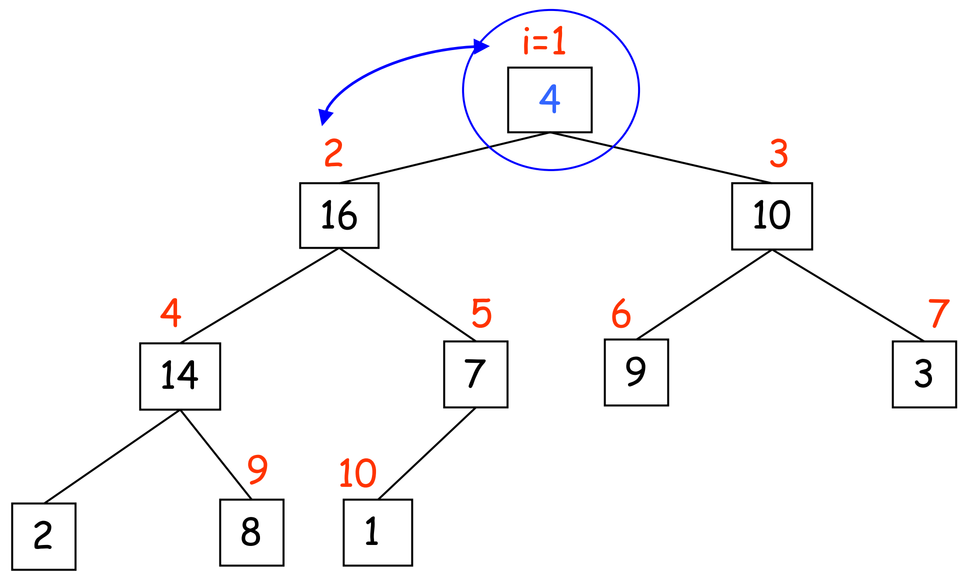
La procedura fixHeap

Sia v la radice di H. Assume che i sottoalberi radicati nel figlio sinistro e destro di v sono heap, ma la proprietà di ordinamento delle chiavi non vale per v. Posso ripristinarla così:

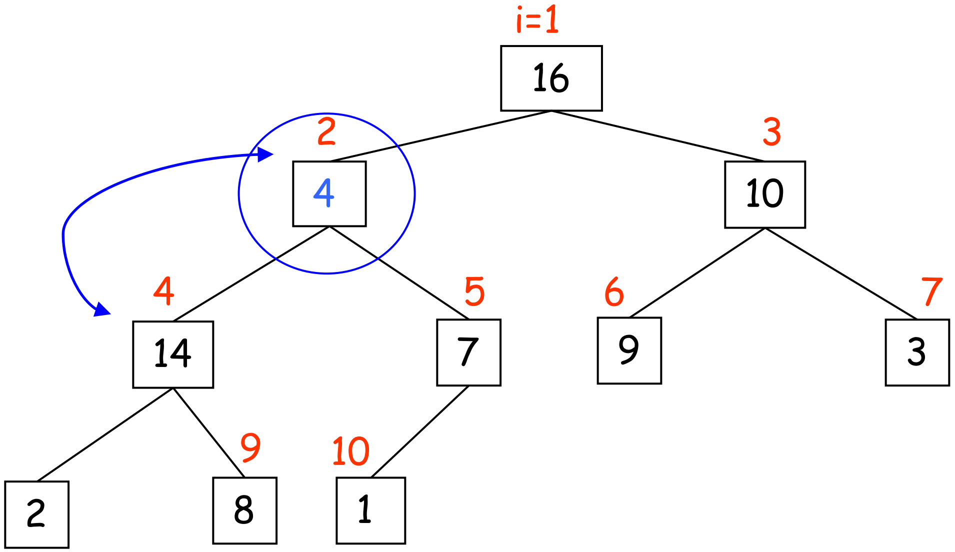
```
fixHeap(nodo v, heap H)
    if (v non è una foglia) then
        sia u il figlio di v con chiave massima
        if (chiave(v)<chiave(u)) then
            scambia chiave(v) e chiave(u)
            fixHeap(u,H)
```

Tempo di esecuzione: O(log n)

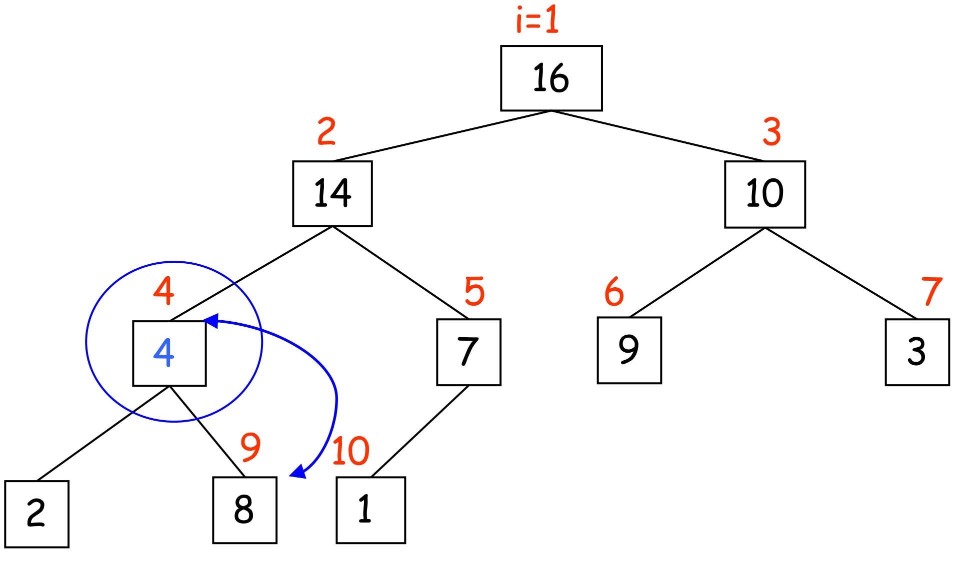
FixHeap - esempio



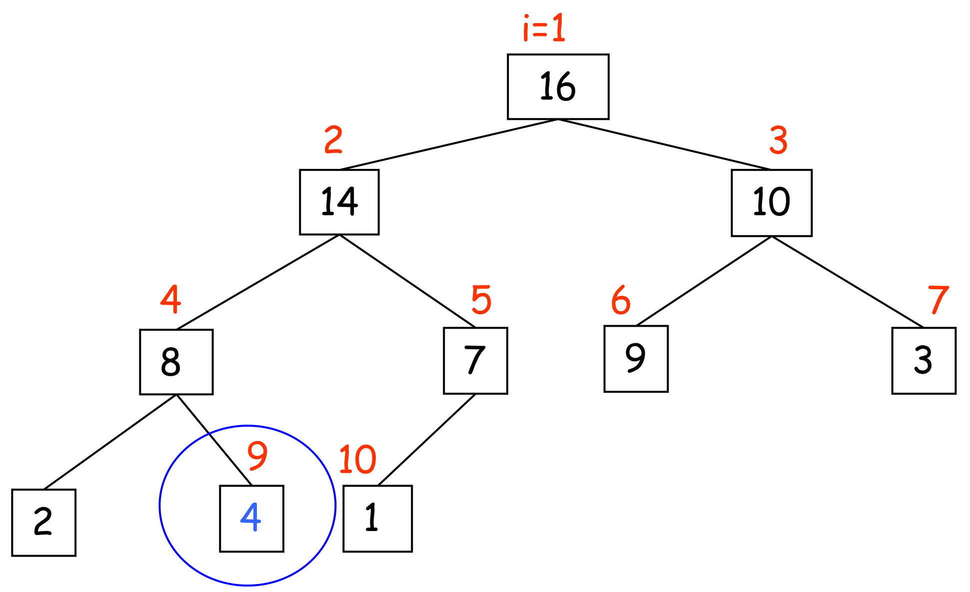
FixHeap - esempio

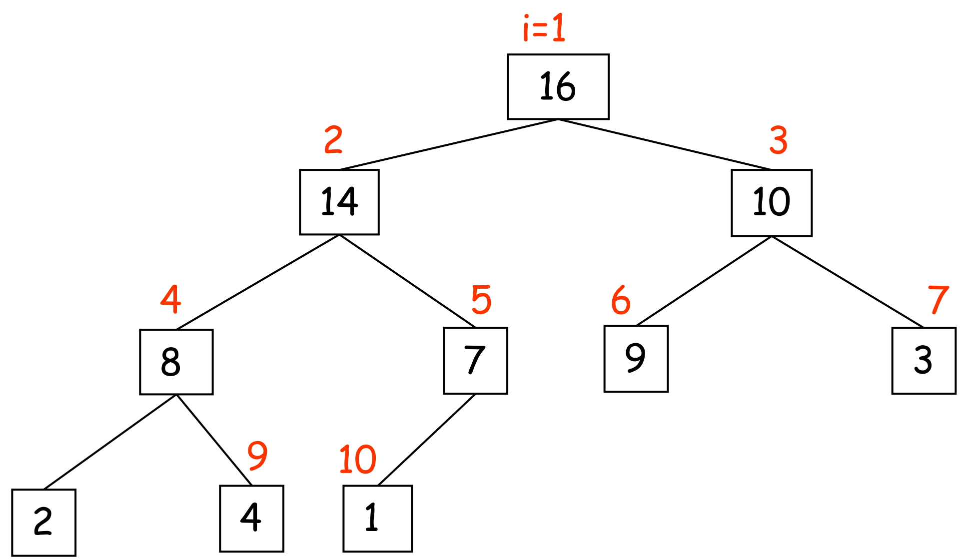


FixHeap - esempio



FixHeap - esempio





Complessità: $O(\log n)$

uno pseudocodice di fixHeap più dettagliato
(l'heap è mantenuto attraverso un vettore posizionale)

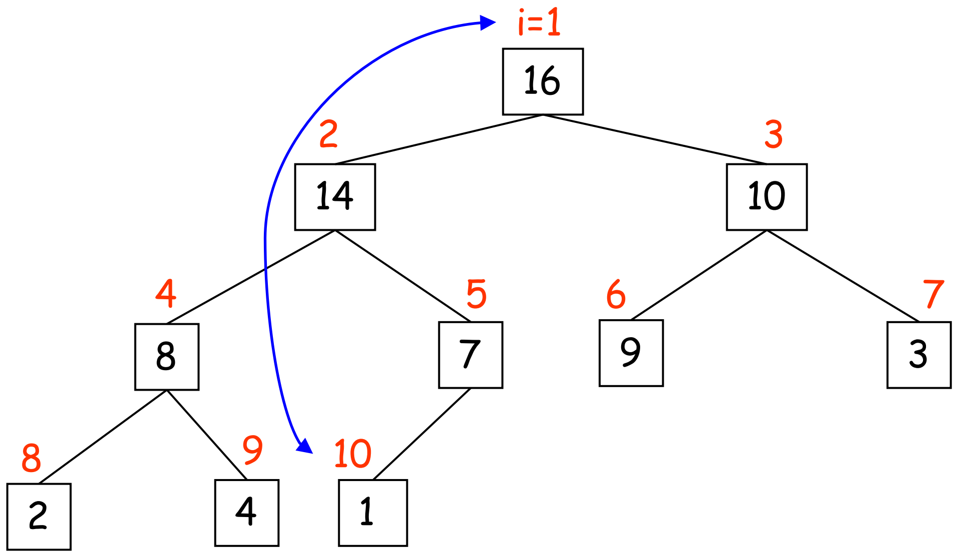
```
fixHeap (i,A)
s=sin(i)
d=des(i)
if (s ≤ heapsize[A] e A[s] >A[i])
then massimo=s
else massimo=i
if (d ≤ heapsize[A] e A[d] >A[massimo])
then massimo=d
if (massimo≠i)
then scambia A[i] e A[massimo]
        fixHeap(massimo,A)
```

Estrazione del massimo

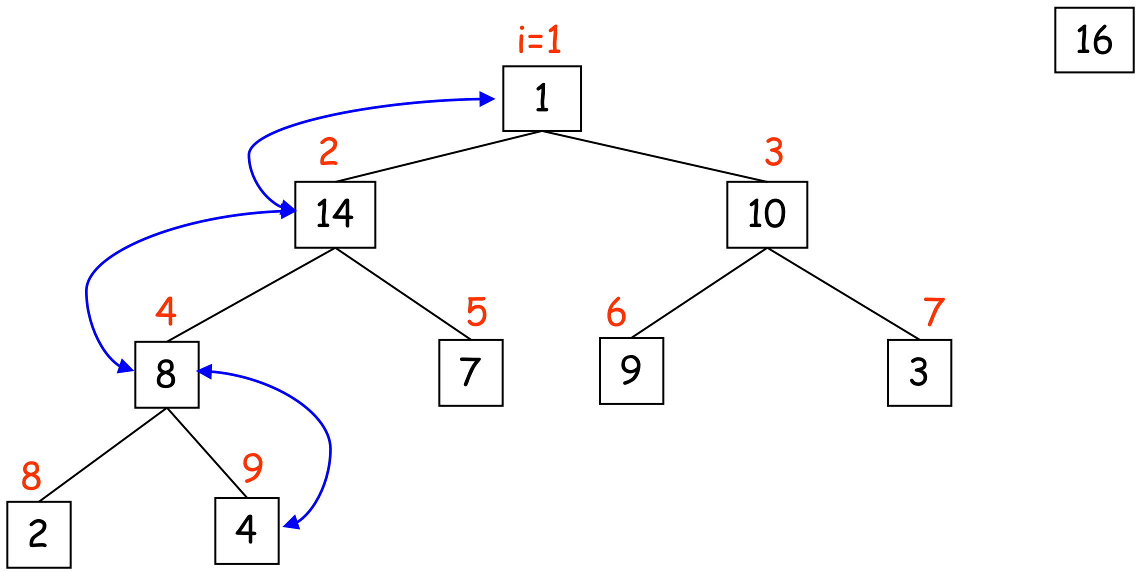
- Copia nella radice la chiave contenuta nella la foglia più a destra dell’ultimo livello
  - nota: è l’elemento in posizione heap-size
- Rimuovi la foglia
  - nota: nella rappresentazione con vettore posizionale vuol dire decrementare heap-size.
- Ripristina la proprietà di ordinamento a heap richiamando fixHeap sulla radice

Tempo di esecuzione: O(log n)

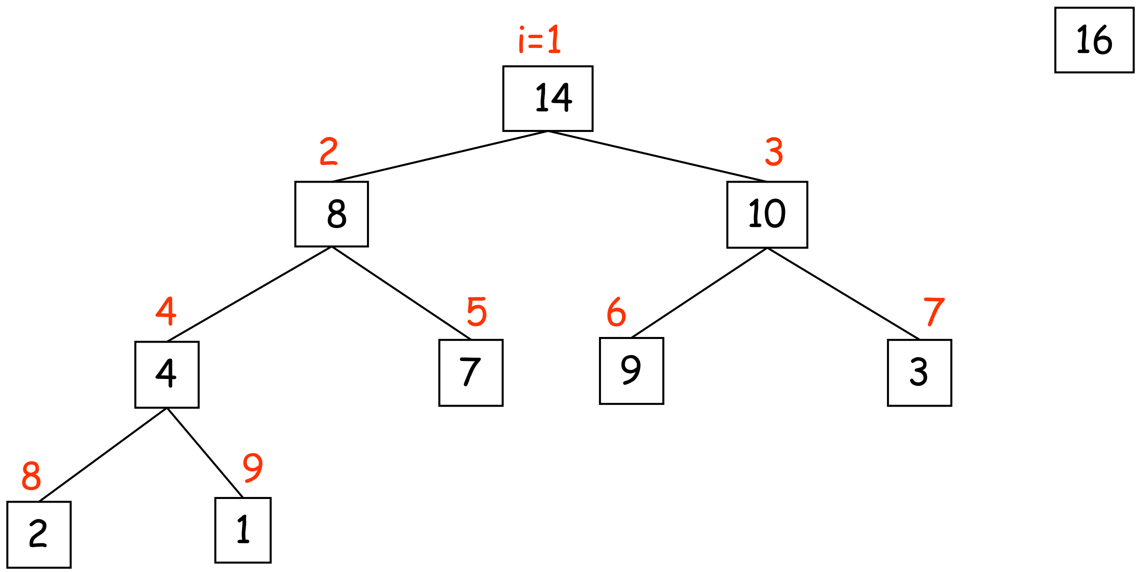
Estrazione del massimo



Estrazione del massimo



Estrazione del massimo

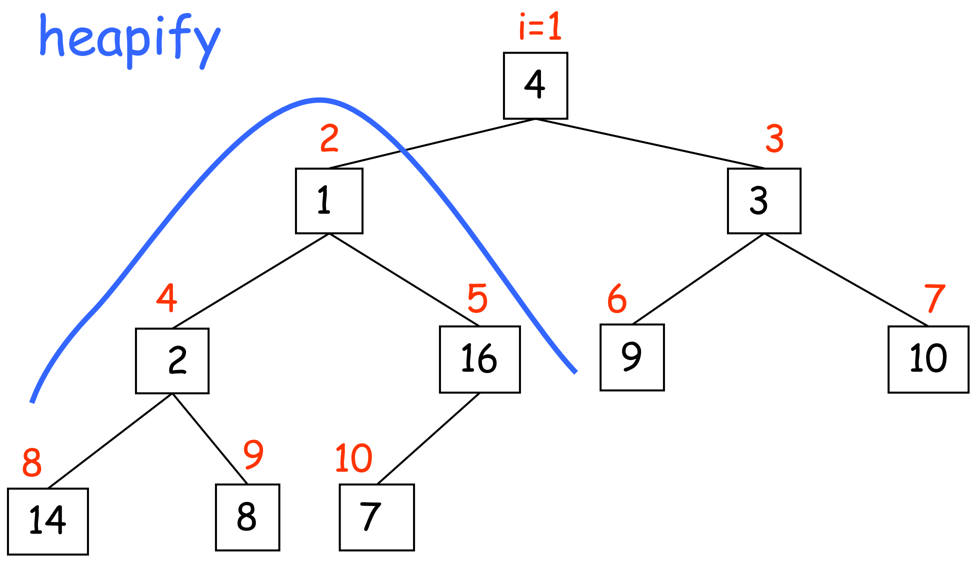


Costruzione dell'heap

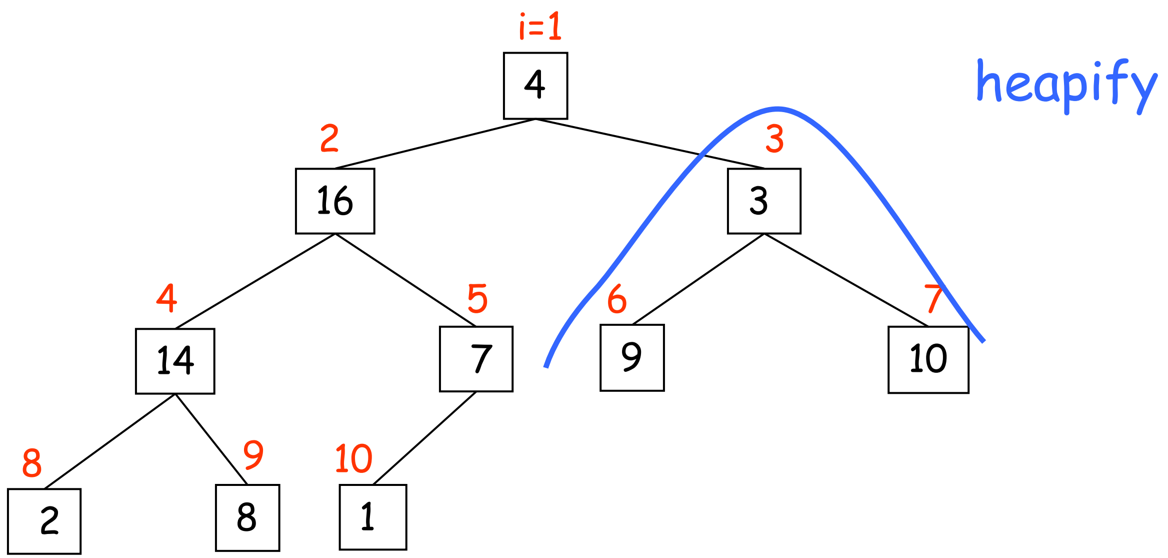
Algoritmo ricorsivo basato sulla tecnica del divide et impera

```
heapify(heap H)
    if (H non è vuoto) then
        heapify(sottoalbero sinistro di H)
        heapify(sottoalbero destro di H)
        fixHeap(radice di H,H)
```

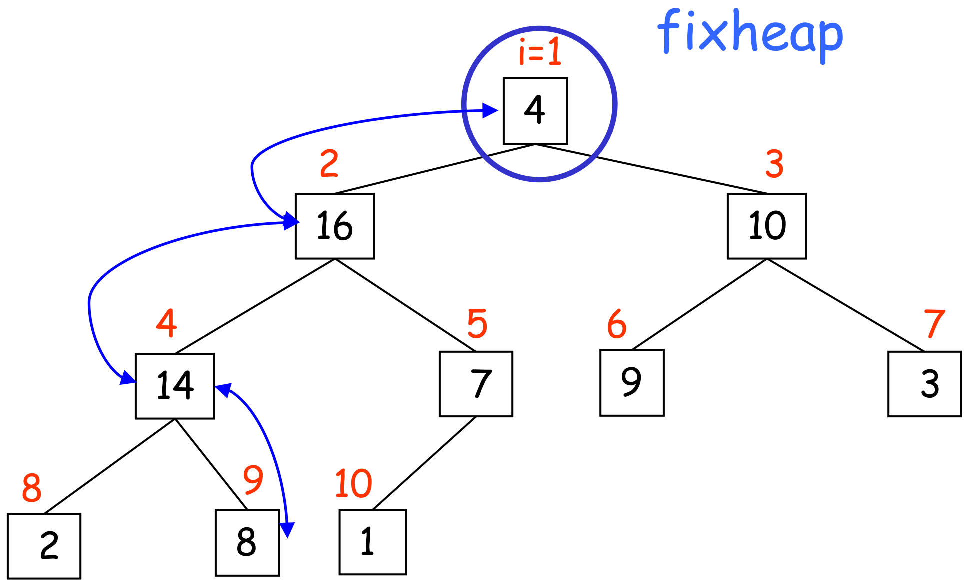
Heapify - Un esempio



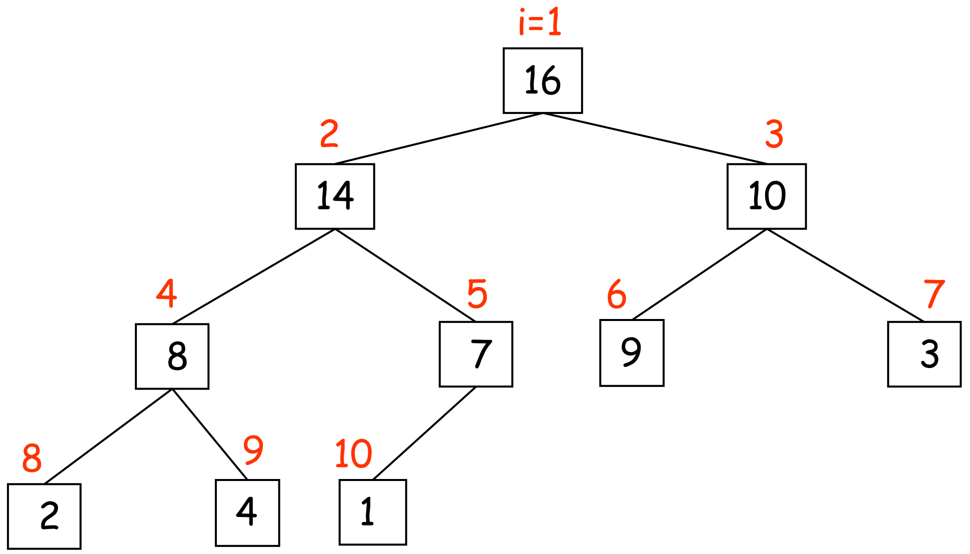
Heapify - Un esempio



Heapify - Un esempio



Heapify - Un esempio



E' un **heap**!

Complessità heapify

Sia h l'altezza di un heap con n elementi

Sia $n' \geq n$ l'intero tale che un heap con n' elementi ha

1. altezza h
2. è completo fino all'ultimo livello

Vale: $T(n) \leq T(n')$ e $n' \leq 2n$

Tempo di esecuzione: $T(n') = 2\,T((n'-1)/2) + O(\log n')$

$\leq 2\,T(n'/2) + O(\log n')$

$\Rightarrow$ $T(n') = O(n')$ dal Teorema Master

Quindi: $T(n) \leq T(n') = O(n') = O(2n) = O(n)$

Esercizio

Scrivere lo pseudocodice dettagliato di heapify assumendo che l’heap è mantenuto con un vettore posizionale.

Max-Heap e Min-Heap

e se volessi una struttura dati che mi permette di estrarre il minimo velocemente invece del massimo?

Semplice: costruisco un min-heap invertendo la proprietà di ordinamento delle chiavi. Cioè richiedo che

chiave(padre(v)) ≤ chiave(v)

per ogni v (diverso dalla radice)

e come mai noi abbiamo progettato un max-heap e non un min-heap?

…fra un po' lo capiremo ☺

L’algoritmo HeapSort

- Costruisce un heap tramite heapify
- Estrae ripetutamente il massimo per n-1 volte
  - ad ogni estrazione memorizza il massimo nella posizione dell’array che si è appena liberata

heapSort (A)

1. Heapify(A)
2. Heapsize[A]=n
3. **for** i=n **down to** 2 **do**
4. scambia A[1] e A[i]
5. Heapsize[A] = Heapsize[A] -1
6. fixHeap(1,A)

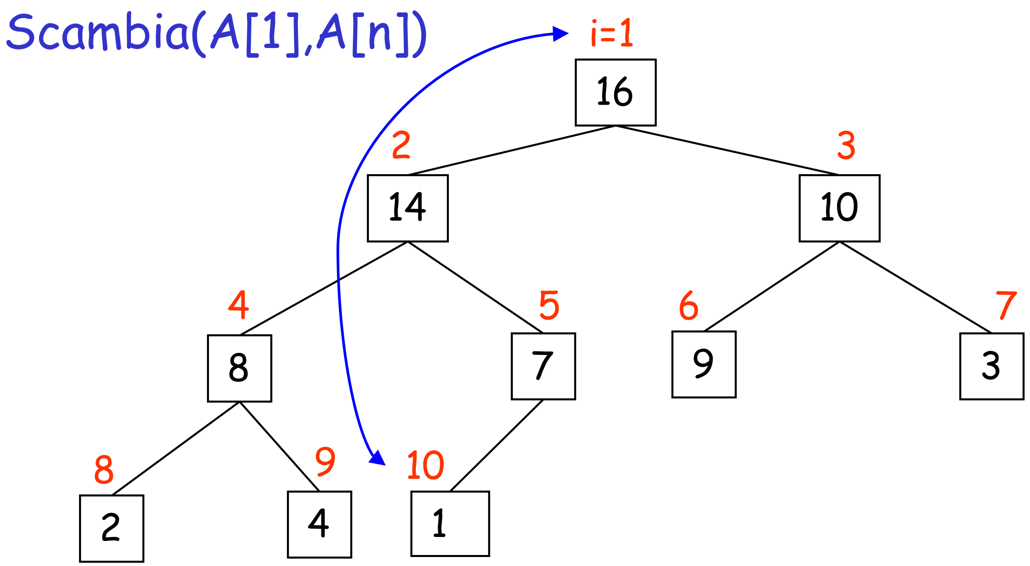
} O(n)

n-1 estrazioni di costo O(log n)

ordina in loco in tempo O(n log n)

Esempio

Input: A=<4,1,3,2,16,9,10,14,8,7>
Heapify(A) → A_0 =<16,14,10,8,7,9,3,2,4,1>

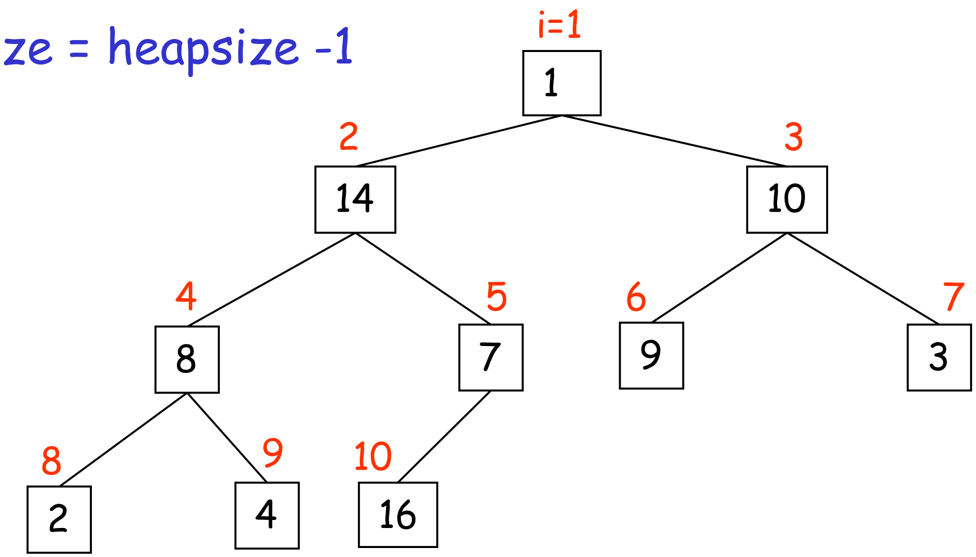


Esempio

Input: A=<4,1,3,2,16,9,10,14,8,7>

Heapify(A) → A_0 =<16,14,10,8,7,9,3,2,4,1>

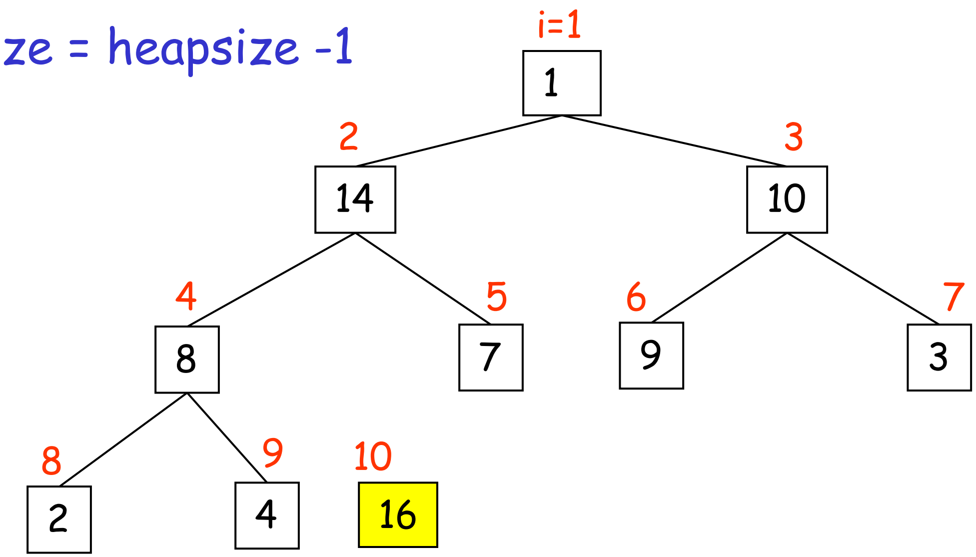
heapsize = heapsize -1



Esempio

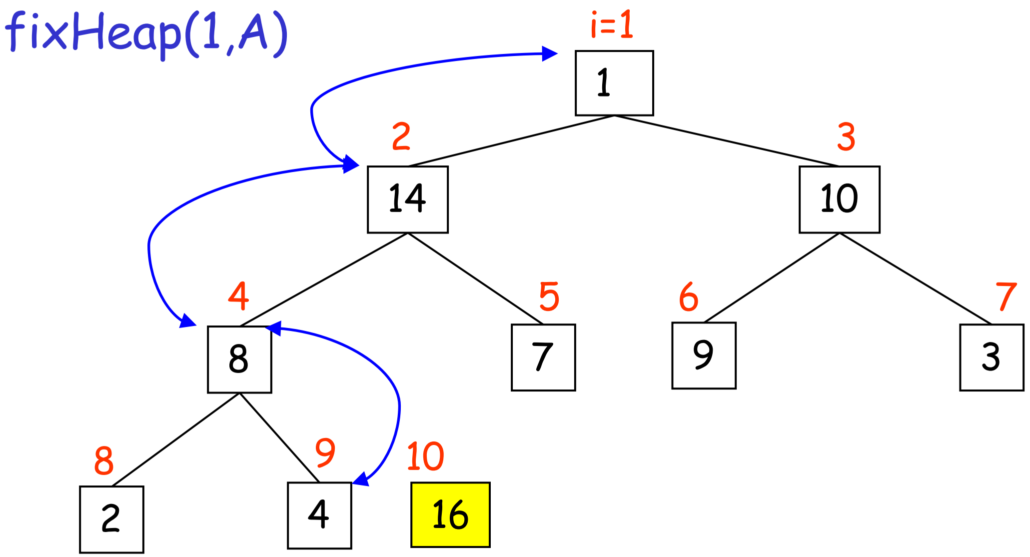
Input: A=<4,1,3,2,16,9,10,14,8,7>
Heapify(A) → A_0 =<16,14,10,8,7,9,3,2,4,1>

heapsize = heapsize -1



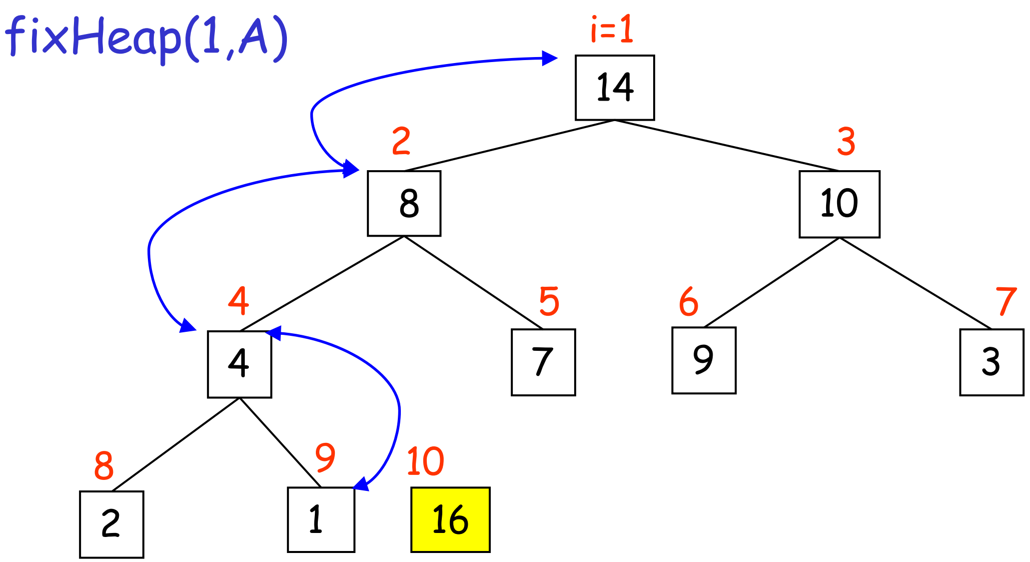
Esempio

Input: $A=\langle 4,1,3,2,16,9,10,14,8,7\rangle$
Heapify(A) → $A_0 = \langle 16,14,10,8,7,9,3,2,4,1\rangle$



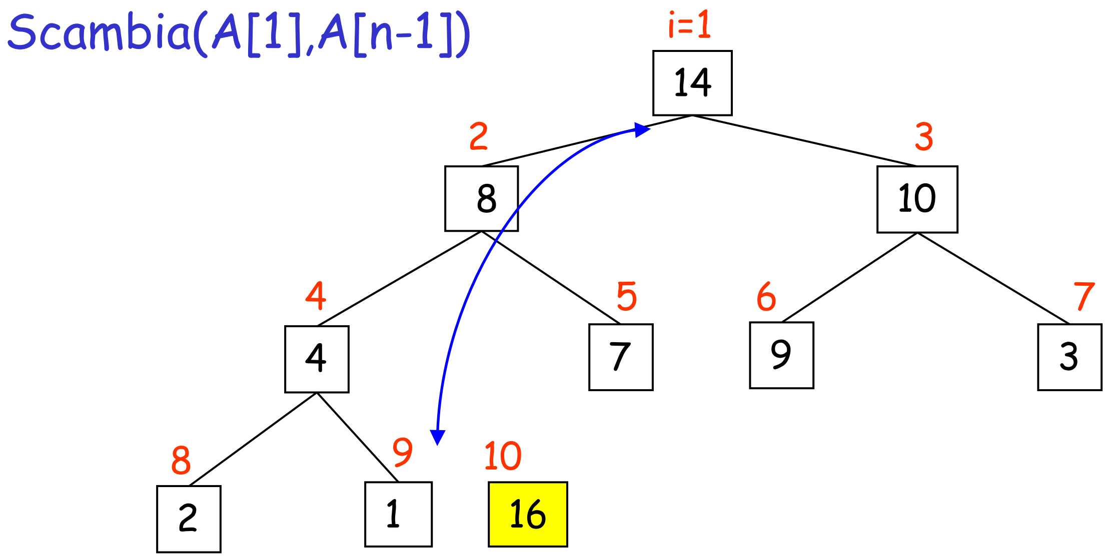
Esempio

Input: A=<4,1,3,2,16,9,10,14,8,7>
Heapify(A) → A_0 =<16,14,10,8,7,9,3,2,4,1>



Esempio

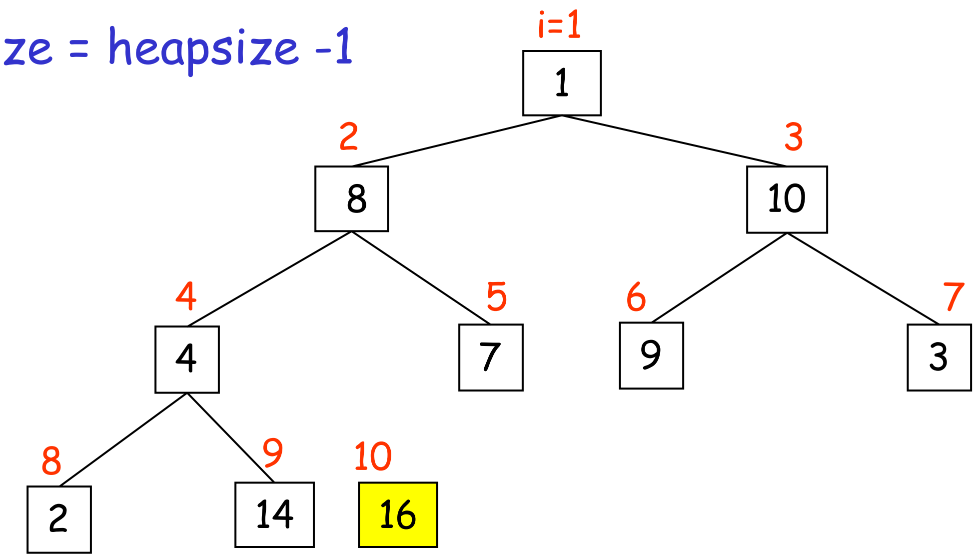
Input: A=<4,1,3,2,16,9,10,14,8,7>
Heapify(A) → A_0 =<16,14,10,8,7,9,3,2,4,1>



Esempio

Input: A=<4,1,3,2,16,9,10,14,8,7>
Heapify(A) → A_0 =<16,14,10,8,7,9,3,2,4,1>

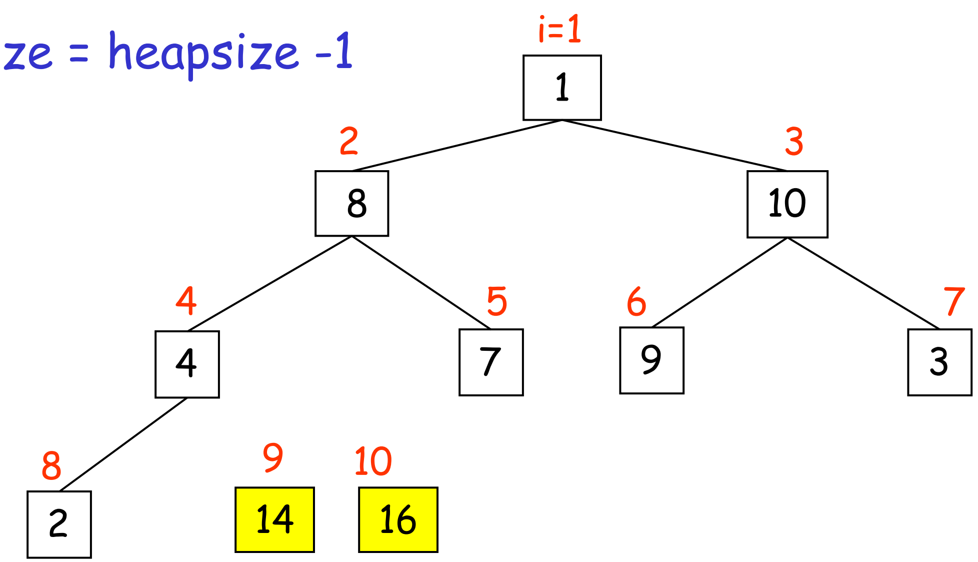
heapsize = heapsize -1



Esempio

Input: A=<4,1,3,2,16,9,10,14,8,7>
Heapify(A) → A_0 =<16,14,10,8,7,9,3,2,4,1>

heapsize = heapsize -1

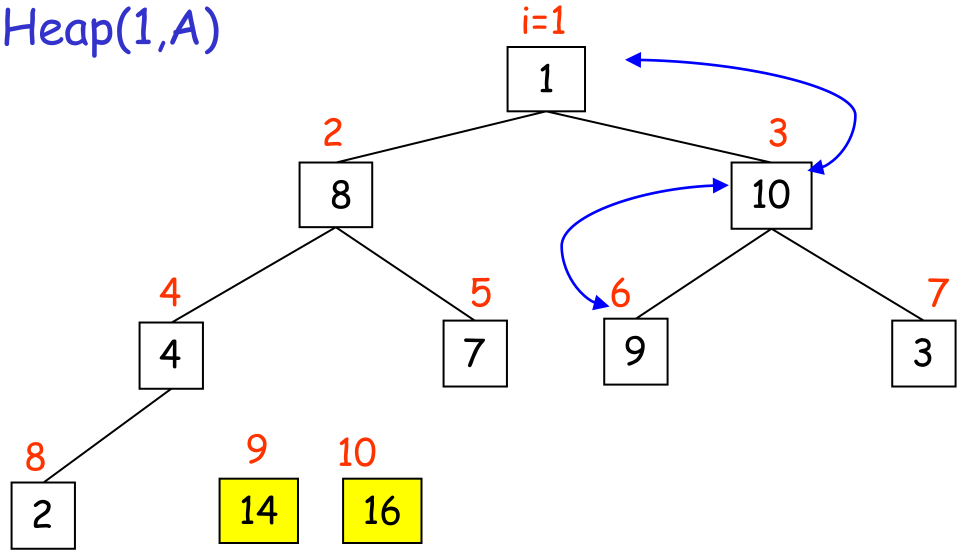


Esempio

Input: A=<4,1,3,2,16,9,10,14,8,7>

Heapify(A) → A_0 =<16,14,10,8,7,9,3,2,4,1>

fixHeap(1,A)

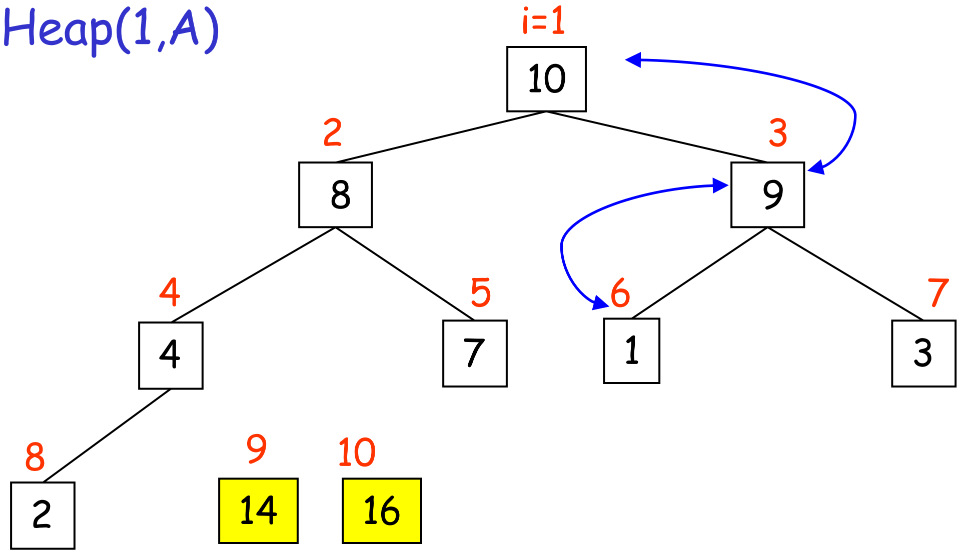


Esempio

Input: A=<4,1,3,2,16,9,10,14,8,7>

Heapify(A) → A_0 =<16,14,10,8,7,9,3,2,4,1>

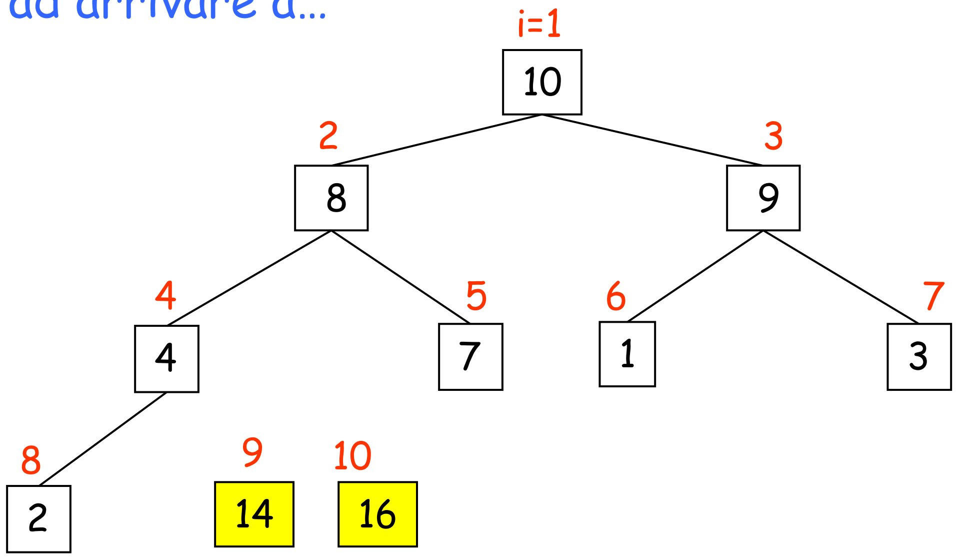
fixHeap(1,A)



Esempio

Input: A=<4,1,3,2,16,9,10,14,8,7>
Heapify(A) → A_0 =<16,14,10,8,7,9,3,2,4,1>

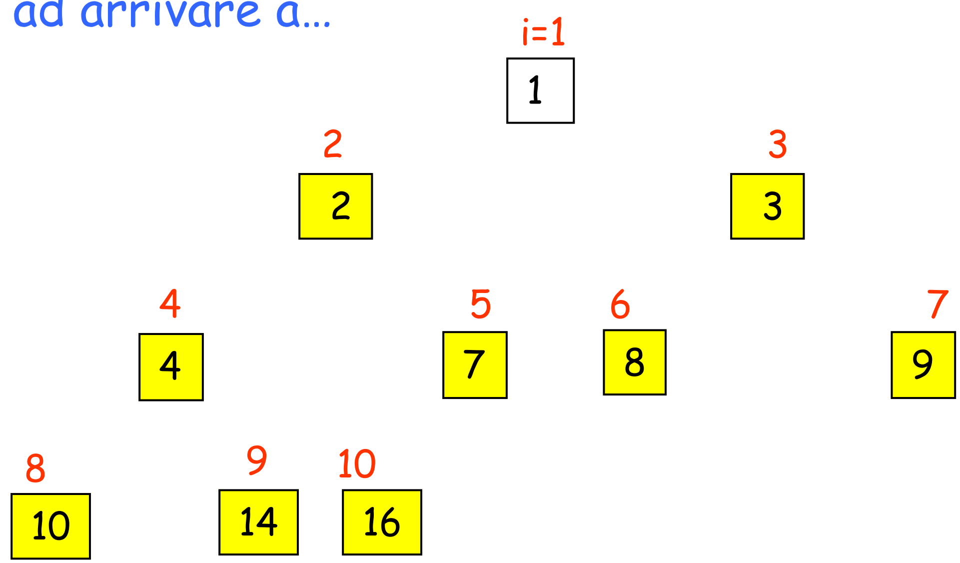
E così via, sino ad arrivare a...



Esempio

Input: $A=\langle 4,1,3,2,16,9,10,14,8,7\rangle$
Heapify(A) $\rightarrow$ $A_0=\langle 16,14,10,8,7,9,3,2,4,1\rangle$

E così via, sino ad arrivare a...



1	2	3	4	7	8	9	10	14	16
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Max-Heap e Min-Heap

Quindi: come mai abbiamo usato un max-heap e non un min-heap? Potevamo usare anche un min-heap?

…l'uso del max-heap (implementato con un vettore posizionale) ci permette di usare solo memoria ausiliare costante! ☺

Teorema

L’algoritmo HeapSort ordina *in loco* un array di lunghezza n in tempo $O(n \log n)$ nel caso peggiore.