

Algoritmi e Strutture Dati

Capitolo 4 Ordinamento

Ordinamento

Dato un insieme S di n oggetti presi da un dominio totalmente ordinato, ordinare S

- Esempi: ordinare una lista di nomi alfabeticamente, o un insieme di numeri, o un insieme di compiti d'esame in base al cognome dello studente
- Subroutine in molti problemi
- È possibile effettuare ricerche in array ordinati in tempo $O(\log n)$

Il problema dell'ordinamento

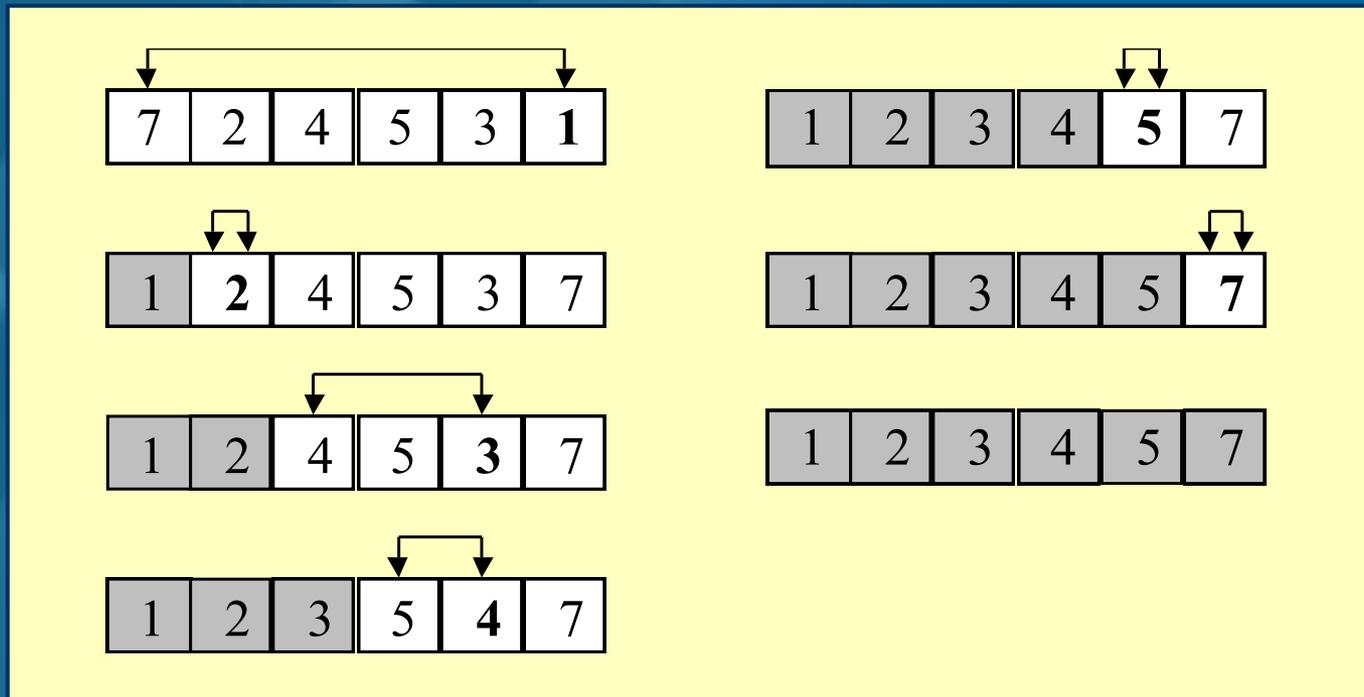
- **Input:** una sequenza di n numeri $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$
- **Output:** una permutazione (riarrangiamento) $\langle a_1', a_2', \dots, a_n' \rangle$ della sequenza di input tale che $a_1' \leq a_2' \leq \dots \leq a_n'$

Ordinare in tempo quadratico

Un algoritmo semplice,
intuitivo, facile da
programmare.
E inefficiente.

SelectionSort

Approccio incrementale: estende l'ordinamento da k a $k+1$ elementi, scegliendo il minimo degli $n-k$ elementi non ancora ordinati e mettendolo in posizione $k+1$



SelectionSort (A)

1. **for** $k=0$ **to** $n-2$ **do**
2. $m = k+1$
3. **for** $j=k+2$ **to** n **do**
4. **if** ($A[j] < A[m]$) **then** $m=j$
5. scambia $A[m]$ con $A[k+1]$

- al generico passo k , $A[1], \dots, A[k]$ sono già ordinati
- linee 2-4: ricerca del minimo fra gli elementi $A[k+1], \dots, A[n]$
- m è l'indice dell'array in cui si trova il minimo
- il minimo è messo in posizione $k+1$

Corretto?

- E' facile convincersi che l'algoritmo mantiene le seguenti *invarianti*: dopo il generico passo k ($k=0, \dots, n-2$) abbiamo che:
 - (i) i primi $k+1$ elementi sono ordinati e
 - (ii) sono i $k+1$ elementi più piccoli dell'array

Suggerimento: ragionare per invarianti è uno strumento utile per dimostrare la correttezza di un algoritmo, perché permette di isolare proprietà dell'algoritmo, spiegarne il funzionamento, capire a fondo l'idea su cui si basa.

Complessità temporale (analisi)

$T(n)$ = #operazioni elementari sul **modello RAM** a costi uniformi eseguite dall'algoritmo nel **caso peggiore** su istanze di **dimensione n** .

Complessità: un upper bound

SelectionSort (A)

```
1.  for k=0 to n-2 do
2.      m = k+1
3.      for j=k+2 to n do
4.          if (A[j] < A[m]) then m=j
5.      scambia A[m] con A[k+1]
```

eseguite
al più n
volte per
ogni ciclo
esterno

ciclo esterno
eseguito al più
 n volte

ogni linea di codice costa tempo $O(1)$

$$T(n) \leq 5 n^2 O(1) = \Theta(n^2) \quad \longrightarrow \quad T(n) = O(n^2)$$

L'analisi è stretta? Cioè, $T(n)$ è $\Theta(n^2)$?

Complessità: un lower bound

SelectionSort (A)

1. **for** k=0 **to** n-2 **do**
2. m = k+1
3. **for** j=k+2 **to** n **do**
4. **if** (A[j] < A[m]) **then** m=j
5. scambia A[m] con A[k+1]

Idea: conto solo i confronti fra elementi

} n-k-1
confronti

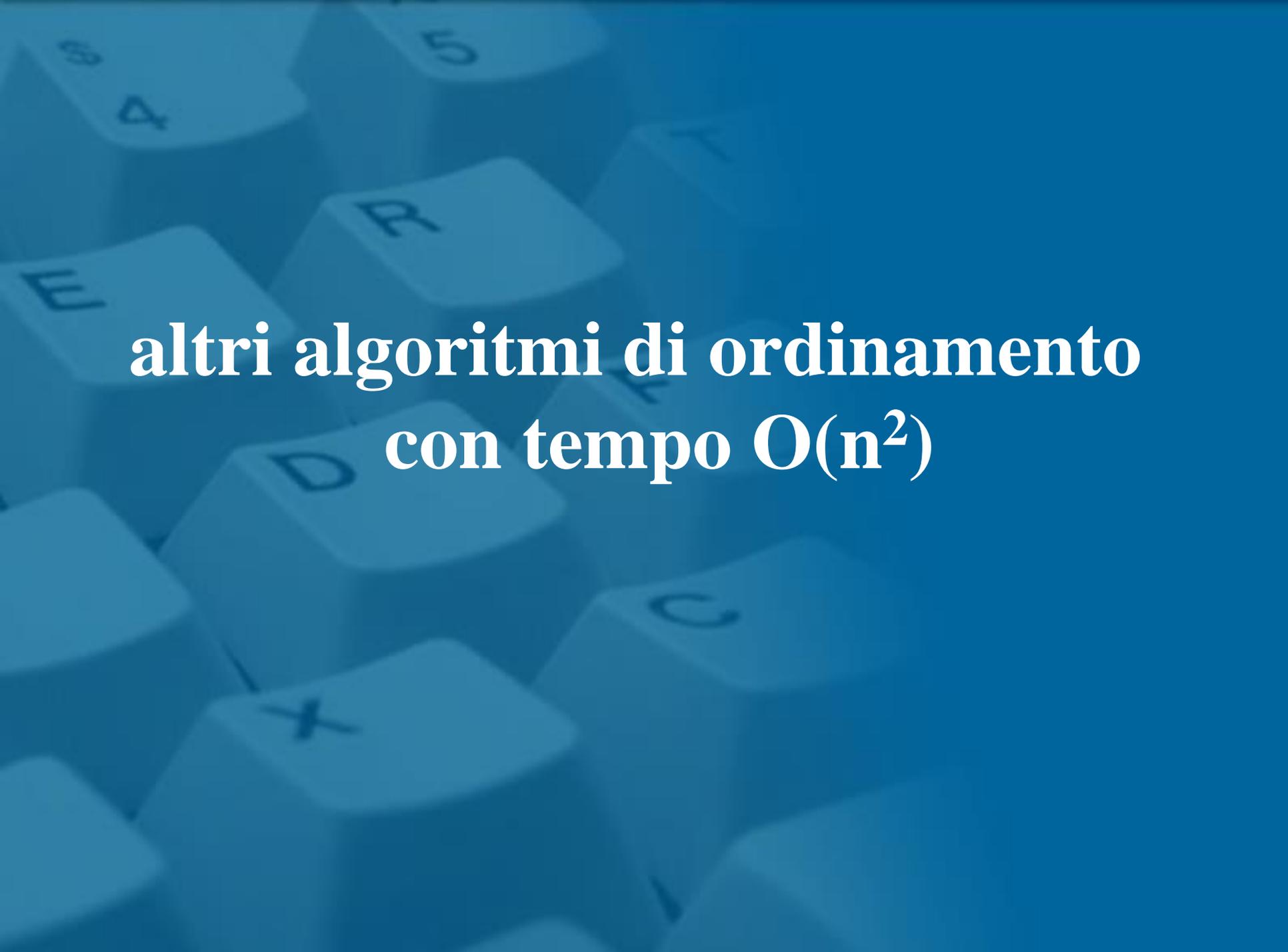
$$T(n) \geq \sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1) = \sum_{k=1}^{n-1} k = n(n-1)/2 = \Theta(n^2)$$



$$T(n) = \Omega(n^2)$$



$$T(n) = \Theta(n^2)$$

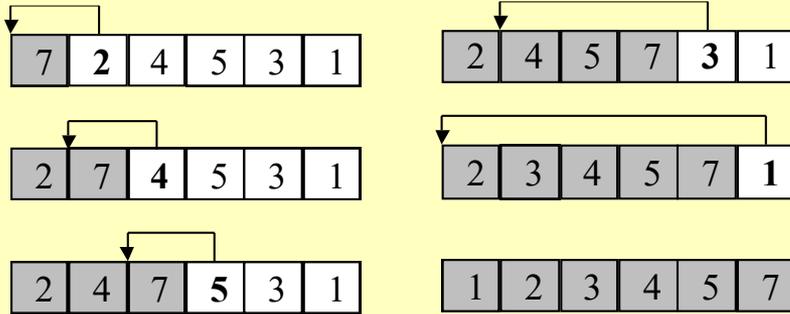


**altri algoritmi di ordinamento
con tempo $O(n^2)$**



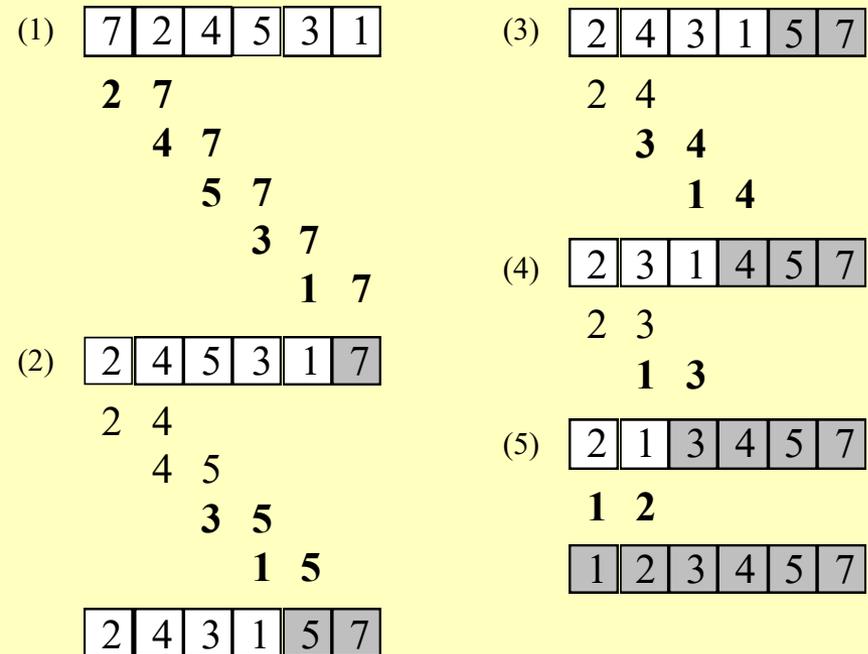
Insertion Sort

Approccio incrementale: estende l'ordinamento da k a $k+1$ elementi, posizionando l'elemento $(k+1)$ -esimo nella posizione corretta rispetto ai primi k elementi



Bubble Sort

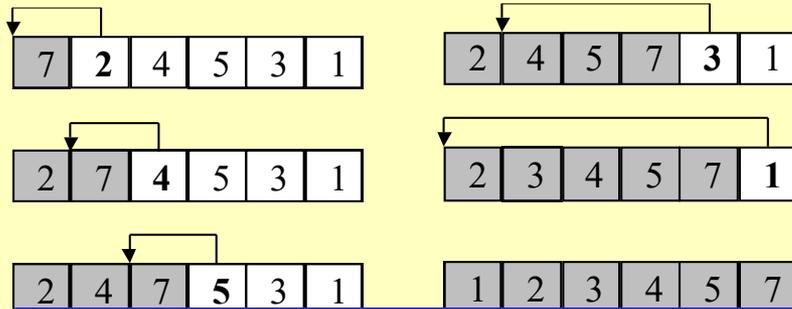
Approccio incrementale: esegue $n-1$ scansioni. Ad ogni scansione guarda coppie di elementi adiacenti e li scambia se non sono nell'ordine corretto.





Insertion Sort

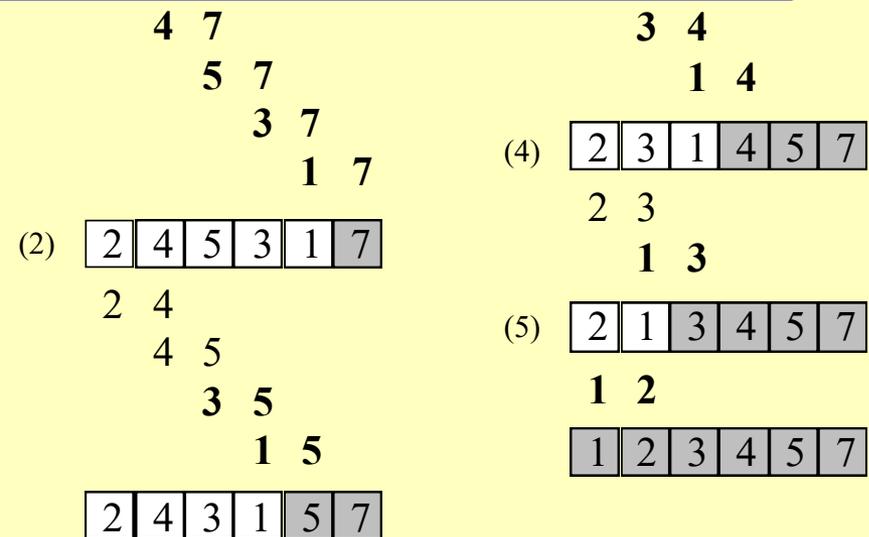
Approccio incrementale: estende l'ordinamento da k a $k+1$ elementi, posizionando l'elemento $(k+1)$ -



Esercizio

Scrivere lo pseudocodice dei due algoritmi e fare l'analisi della complessità temporale nel caso peggiore.

Approccio incrementale: esegue $n-1$ scansioni. Ad ogni scansione guarda coppie di elementi adiacenti e li scambia se non sono nell'ordine corretto.



Ordinare in tempo meno che quadratico

Un algoritmo semplice, un po' meno intuitivo, facile da programmare.

E temporalmente efficiente.

Tecnica: Divide et Impera

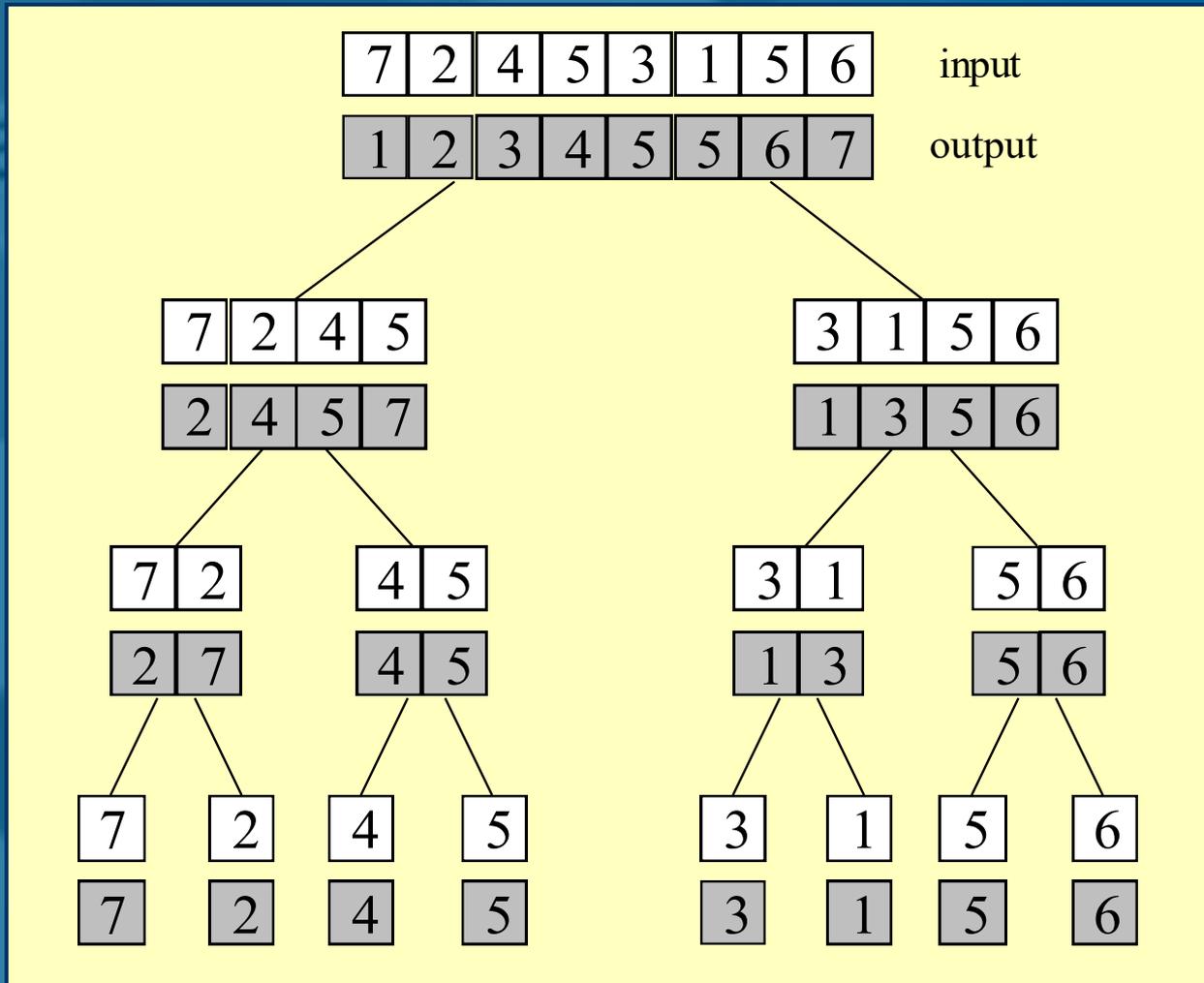
MergeSort

- Usa la tecnica del **divide et impera**:
 - 1 **Divide**: dividi l'array a metà
 - 2 Risolvi i due sottoproblemi ricorsivamente
 - 3 **Impera**: fondi le due sottosequenze ordinate

MergeSort (A, i, f)

1. **if** (i < f) **then**
2. $m = \lfloor (i+f)/2 \rfloor$
3. MergeSort(A,i,m)
4. MergeSort(A,m+1,f)
5. Merge(A,i,m,f)

Esempio di esecuzione

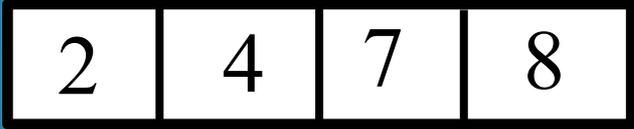


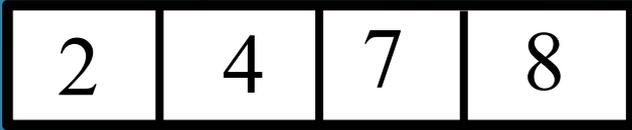
Albero delle
chiamate
ricorsive

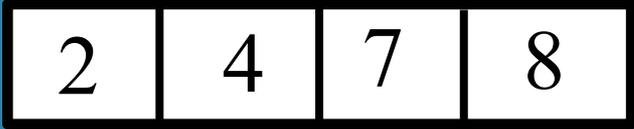
Procedura Merge

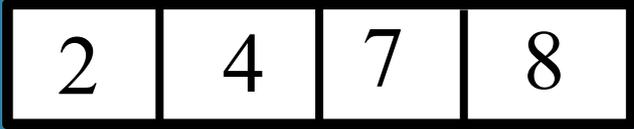
- Due array ordinati A e B possono essere fusi rapidamente:
 - **estrai ripetutamente il minimo di A e B** e copialo nell'array di output, finché A oppure B non diventa vuoto
 - copia gli elementi dell'array non vuoto alla fine dell'array di output

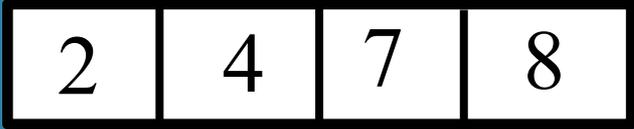
Notazione: dato un array A e due indici $x \leq y$, denotiamo con $A[x;y]$ la porzione di A costituita da $A[x], A[x+1], \dots, A[y]$

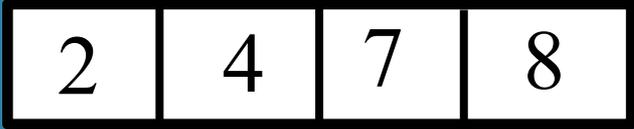


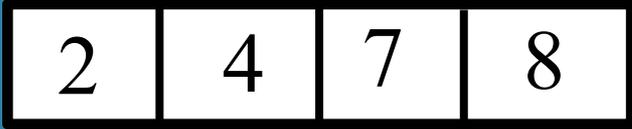


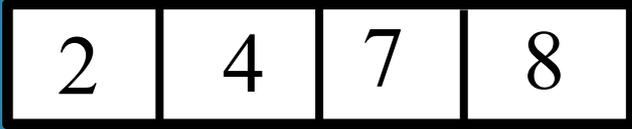












2	4	7	8
---	---	---	---

1	3	4	5
---	---	---	---

1	2	3	4	4	5	7	8
---	---	---	---	---	---	---	---



Merge (A, i_1, f_1, f_2)

1. Sia X un array ausiliario di lunghezza $f_2 - i_1 + 1$
2. $i = 1; k_1 = i_1$
3. $k_2 = f_1 + 1$
4. **while** ($k_1 \leq f_1$ e $k_2 \leq f_2$) **do**
5. **if** ($A[k_1] \leq A[k_2]$)
6. **then** $X[i] = A[k_1]$
7. incrementa i e k_1
8. **else** $X[i] = A[k_2]$
9. incrementa i e k_2
10. **if** ($k_1 \leq f_1$) **then** copia $A[k_1; f_1]$ alla fine di X
11. **else** copia $A[k_2; f_2]$ alla fine di X
12. copia X in $A[i_1; f_2]$

fonde $A[i_1; f_1]$ e $A[f_1 + 1; f_2]$
output in $A[i_1; f_2]$

Osservazione: sto
usando un array
ausiliario

Lemma

La procedure **Merge** fonde due sequenze ordinate di lunghezza n_1 e n_2 in tempo $\Theta(n_1 + n_2)$.

dim

Ogni confronto “consuma” un elemento di una delle due sequenze. Ogni posizione di X è riempita in tempo costante. Il numero totale di elementi è $n_1 + n_2$. Anche la Linea 12 (copia del vettore ausiliario) costa $\Theta(n_1 + n_2)$. ■

MergeSort (A, i, f)

1. **if** (i < f) **then**
2. $m = \lfloor (i+f)/2 \rfloor$
3. MergeSort(A,i,m)
4. MergeSort(A,m+1,f)
5. Merge(A,i,m,f)

Corretto?

Sì.

- chiamate ricorsive ordinano le due metà
- il Merge le fonde correttamente

Complessità?

Tempo di esecuzione

- La complessità temporale del MergeSort è descritto dalla seguente relazione di ricorrenza:

$$T(n) = 2 T(n/2) + O(n)$$

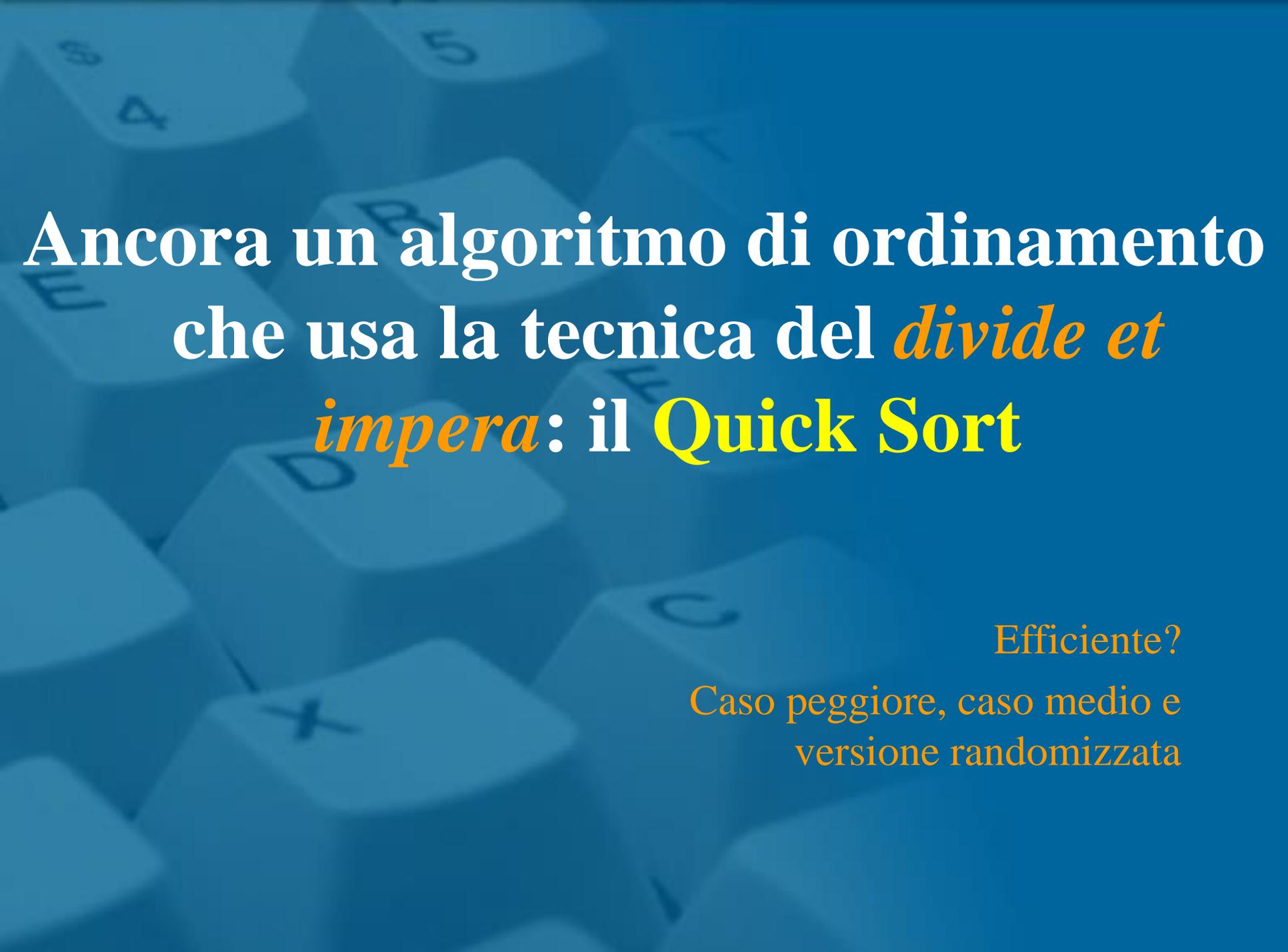
- Usando il Teorema Master si ottiene

$$T(n) = O(n \log n)$$

$$a=b=2, f(n)=O(n) \rightarrow \text{caso 2}$$

Quanta memoria (ausiliaria) usiamo?

- La complessità spaziale del **MergeSort** è $\Theta(n)$
 - la procedura Merge usa memoria ausiliaria pari alla dimensione di porzione da fondere;
 - non sono mai attive due procedure di Merge contemporaneamente;
 - ogni chiamata di MergeSort usa memoria costante (esclusa quella usata dalla procedura Merge);
 - numero di chiamate di MergeSort attive contemporaneamente sono $O(\log n)$;
- Il **MergeSort** non ordina *in loco*
 - occupazione di memoria ausiliaria (oltre input) pari a $\Theta(n)$



Ancora un algoritmo di ordinamento
che usa la tecnica del *divide et
impera*: il **Quick Sort**

Efficiente?

Caso peggiore, caso medio e
versione randomizzata

QuickSort

- Usa la tecnica del **divide et impera**:
 - 1 **Divide**: scegli un elemento x della sequenza (perno) e partiziona la sequenza in elementi $\leq x$ ed elementi $>x$
 - 2 Risolvi i due sottoproblemi ricorsivamente
 - 3 **Impera**: restituisci la concatenazione delle due sottosequenze ordinate

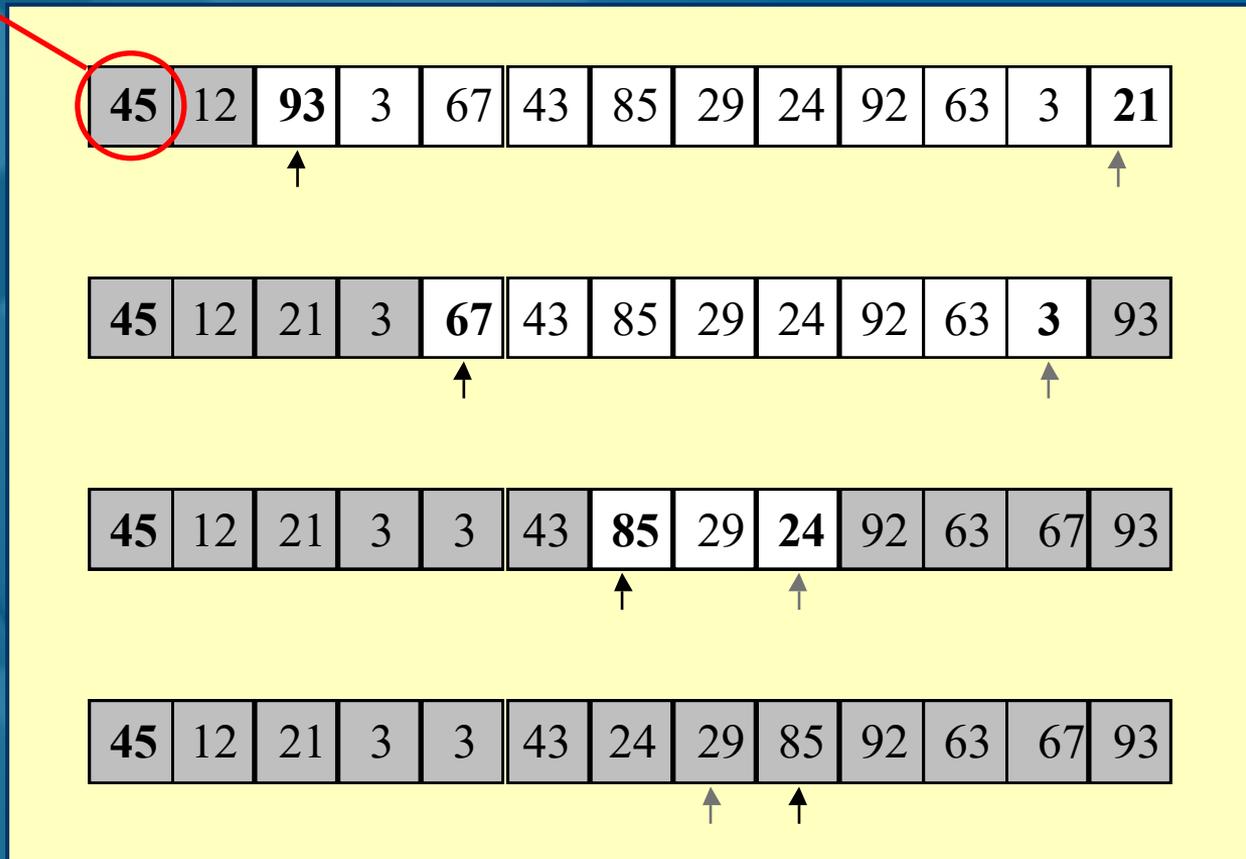
Rispetto al MergeSort, divide complesso ed impera semplice

Partizione (in loco)

- Scegli il perno
- Scorri l'array “in parallelo” da sinistra verso destra e da destra verso sinistra
 - da sinistra verso destra, ci si ferma su un elemento maggiore del perno
 - da destra verso sinistra, ci si ferma su un elemento minore del perno
- Scambia gli elementi e riprendi la scansione

Partizione in loco: un esempio

perno



Partition (A, i, f)

1. $x=A[i]$
2. $inf=i$
3. $sup=f+1$
4. **while** (true) **do**
5. **do** ($inf=inf+1$) **while** ($inf \leq f$ e $A[inf] \leq x$)
6. **do** ($sup=sup-1$) **while** ($A[sup] > x$)
7. **if** ($inf < sup$) **then** scambia $A[inf]$ e $A[sup]$
8. **else break**
9. scambia $A[i]$ e $A[sup]$
10. **return** sup

partiziona $A[i;f]$
rispetto a $A[i]$

Tempo di
esecuzione:

$O(n)$

mette il perno “al centro”

restituisce l'indice del “centro”

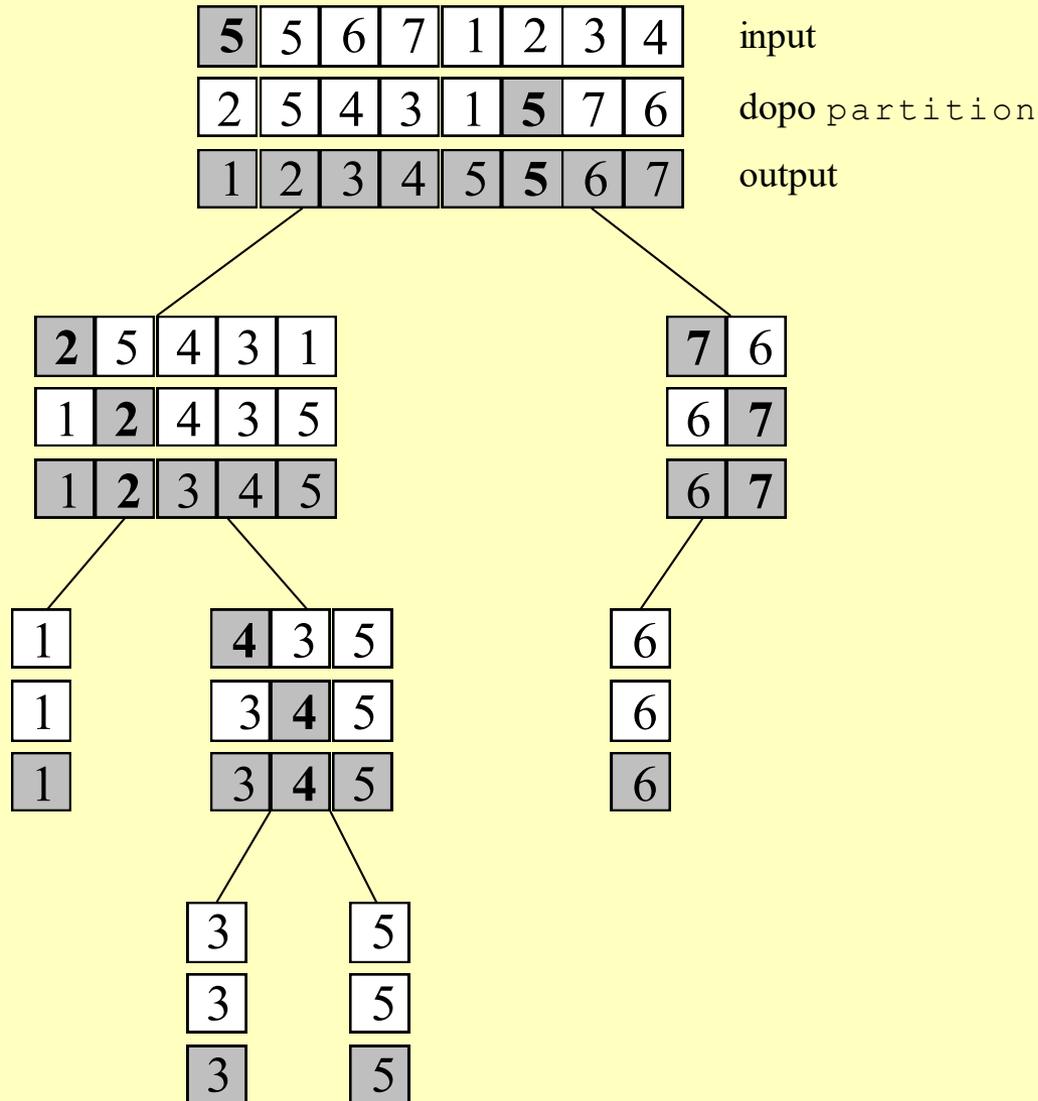
Proprietà (invariante):

In ogni istante, gli elementi $A[i], \dots, A[inf-1]$ sono \leq del perno,
mentre gli elementi $A[sup+1], \dots, A[f]$ sono $>$ del perno

QuickSort (A, i, f)

1. **if** ($i < f$) **then**
2. $m = \text{Partition}(A, i, f)$
3. QuickSort(A, i, m-1)
4. QuickSort(A, m + 1, f)

Esempio di esecuzione



L'albero delle chiamate ricorsive può essere sbilanciato

QuickSort (A, i, f)

1. **if** ($i < f$) **then**
2. $m = \text{Partition}(A, i, f)$
3. QuickSort(A, i, m-1)
4. QuickSort(A, m + 1, f)

Corretto?

Sì.

- dopo Partition:

$A[i:m-1]$ contiene elem \leq del perno, $A[m]$ il perno, $A[m+1:f]$ elementi $>$ del perno

- le chiamate ricorsive ordinano $A[i:f]$

Complessità?

Analisi nel caso peggiore

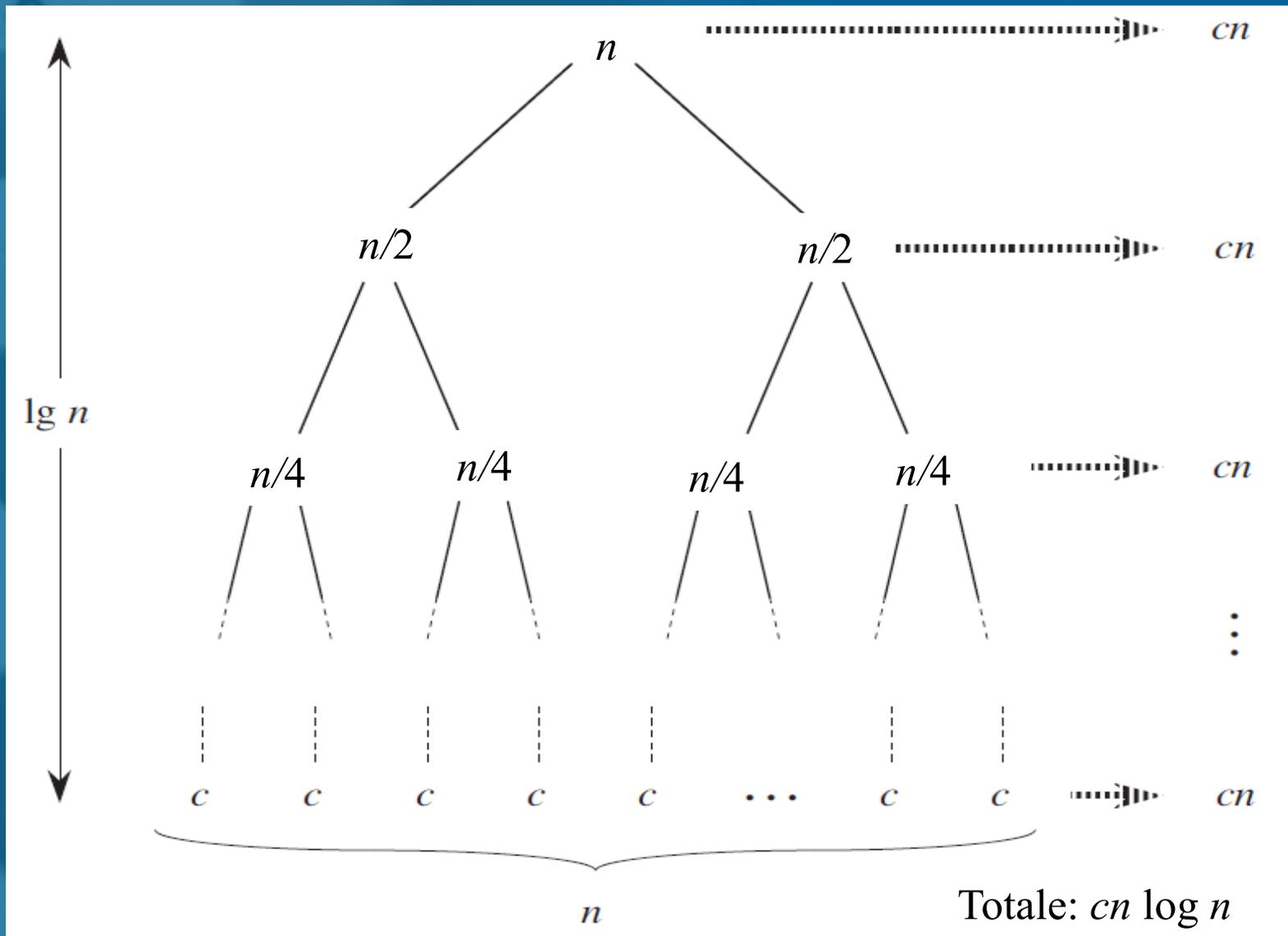
- Ogni invocazione di Partition posiziona almeno un elemento in modo corretto (il perno)
- Quindi dopo n invocazioni di Partition, ognuna di costo $O(n)$ ho il vettore ordinato. Il costo complessivo è quindi $O(n^2)$
- Il caso peggiore si verifica quando il perno scelto ad ogni passo è il minimo o il massimo degli elementi nell'array
- La complessità in questo caso è:

$$\begin{aligned}T(n) &= T(n-1) + T(0) + O(n) \\ &= T(n-1) + O(1) + O(n) \\ &= T(n-1) + O(n)\end{aligned}$$

→ $T(n) = O(n^2)$

complessità nel caso migliore?

Caso migliore: $O(n \log n)$, partizionamento sempre bilanciato

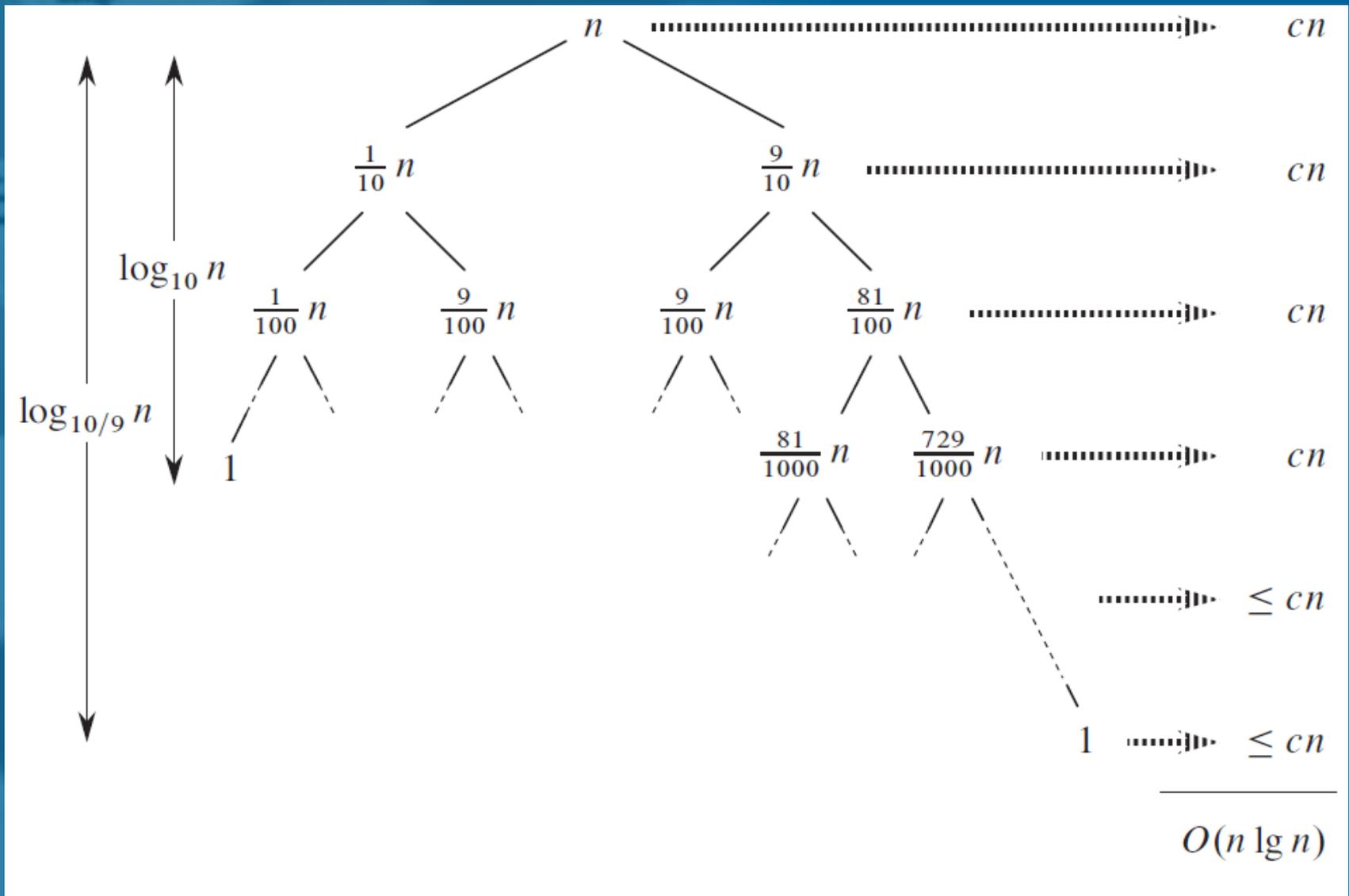


...intuizioni sul caso medio...

(penso al caso di istanze equiprobabili)

- **problema:** la partizione può essere sbilanciata
- la probabilità che ad ogni passo si presenti la partizione peggiore è molto bassa
- per partizioni che non sono “troppo sbilanciate” l’algoritmo è veloce
- **domanda:** quale è la complessità dell’algoritmo supponendo che l’algoritmo di partizionamento produca sempre una partizione proporzionale $9-a-1$?
- E se la partizione fosse sempre proporzionale a $99-a-1$?
- **Nota:** sembrano partizioni piuttosto sbilanciate...

...la complessità è ancora $O(n \log n)$



...e se le istanze non sono equiprobabili?

Versione randomizzata: scegli il perno x a caso fra gli elementi da ordinare

Teorema

L'algoritmo **quickSort** randomizzato ordina in loco un array di lunghezza n in tempo $O(n^2)$ nel caso peggiore e $O(n \log n)$ tempo atteso

...e se le istanze non sono equiprobabili?

Versione randomizzata: scegli il perno x a caso fra gli elementi da ordinare

Teorema

L'algoritmo **quickSort** randomizzato ordina in loco un array di lunghezza n in tempo $O(n^2)$ nel caso peggiore e $O(n \log n)$ con alta probabilità, ovvero con probabilità almeno $1-1/n$.

quickSort randomizzato

(randomizzazione \neq caso medio)

- nessuna assunzione sulla distribuzione di probabilità delle istanze
- nessun input specifico per il quale si verifica il caso peggiore
- il caso peggiore determinato solo dal generatore di numeri casuali

Analisi e progettazione di algoritmi randomizzati:
ampia e importante area di studio e ricerca