

# Algoritmi e Strutture Dati

Luciano Gualà

[guala@mat.uniroma2.it](mailto:guala@mat.uniroma2.it)

[www.mat.uniroma2.it/~guala](http://www.mat.uniroma2.it/~guala)

# Informazioni utili

- **Orario lezioni**
  - martedì: 9,00 - 11,00
  - giovedì: 16,00 - 18,00
- **Orario ricevimento**
  - per appuntamento (online o presenza)
  - Ufficio: dip. di matematica, piano 0, corridoio A0, stanza 103

# Struttura del corso

- Corso strutturato in due moduli
  - **Modulo I**
    - 6 CFU
    - Ottobre - Gennaio
  - **Modulo II**
    - 6 CFU
    - Marzo - Giugno
  - Modulo II** (per Data Science)
    - 3 CFU
    - Marzo - Aprile (12 lezioni)

# Prerequisiti del corso

## Cosa è necessario sapere...

- programmazione di base
- strutture dati elementari
- concetto di ricorsione
- dimostrazione per induzione e calcolo infinitesimale

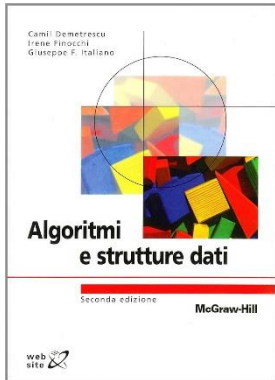
## Propedeuticità

- programmazione
- analisi matematica
- matematica discreta

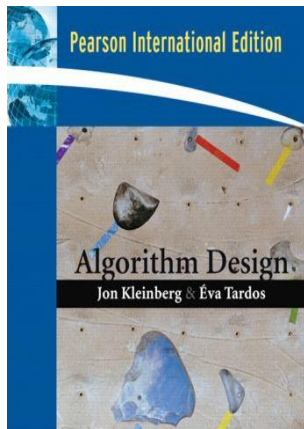
# Slide e materiale didattico

<http://www.mat.uniroma2.it/~guala/>

## Libri di testo



C. Demetrescu, I. Finocchi, G. Italiano  
**Algoritmi e Strutture dati** (sec. ed.)  
(modulo I)

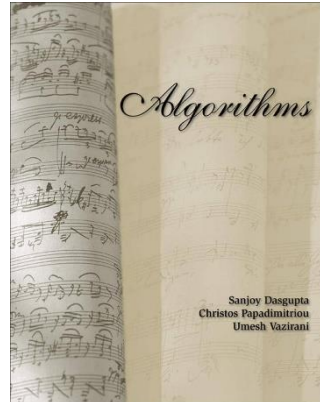


J. Kleinberg, E. Tardos  
**Algorithm Design**  
(modulo II)

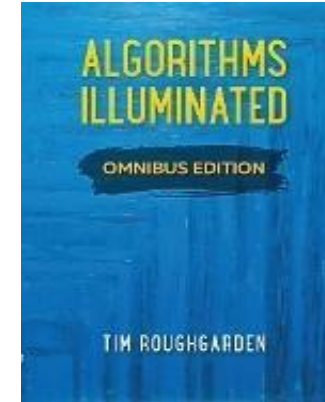
# testi alternativi:



T.H. Cormen, C.E. Leiserson,  
R.L. Rivest, C. Stein  
*Introduzione agli algoritmi  
e strutture dati*



S. Dasgupta, C.  
Papadimitriou,  
U. Vazirani  
*Algorithms*



T. Roughgarden  
*Algorithms Illuminated*



P. Crescenzi, G. Gambosi, R.  
Grossi, G. Rossi  
*Strutture di dati e algoritmi*

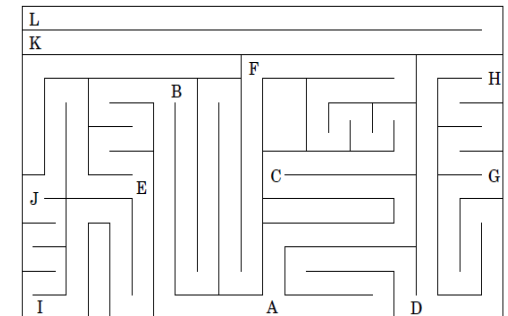
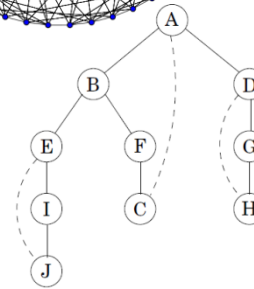
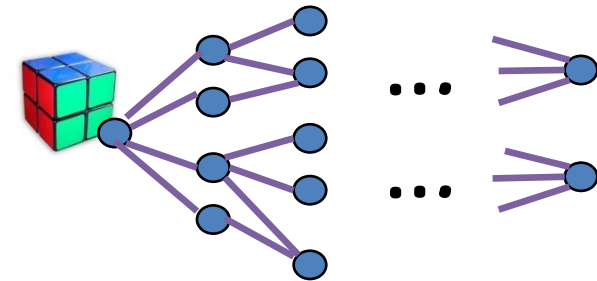
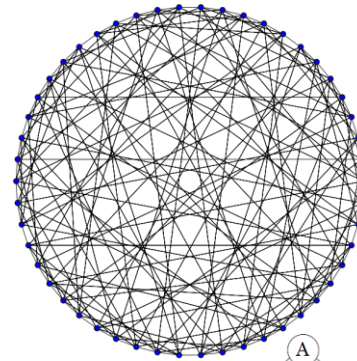
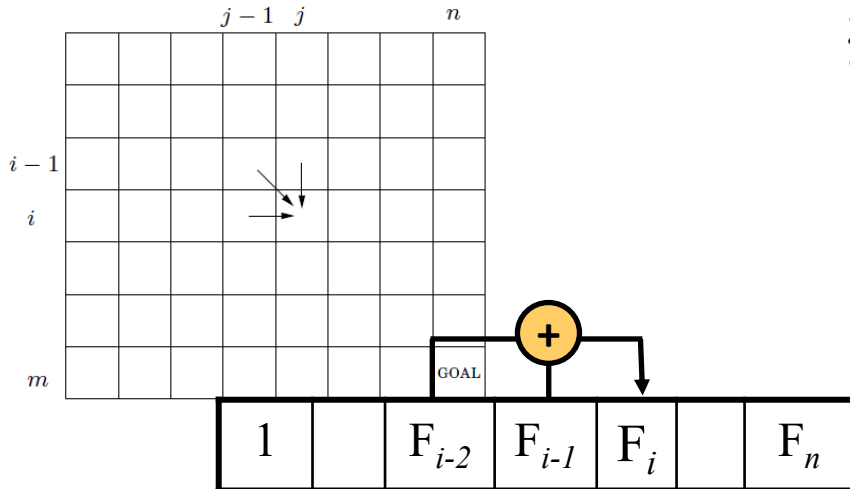
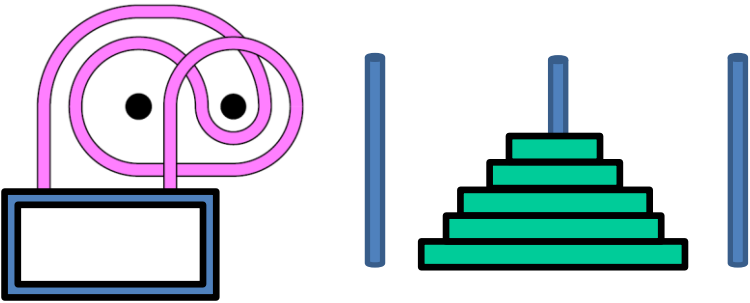
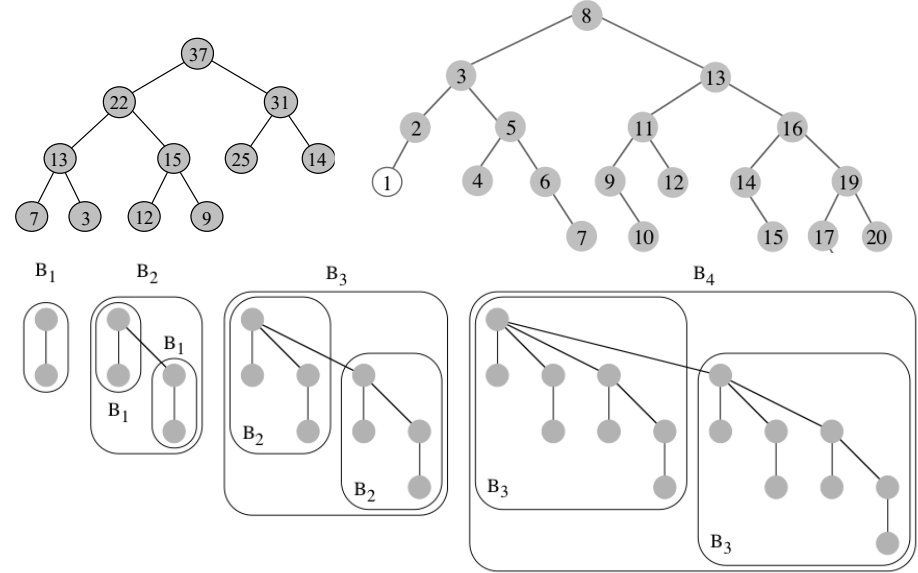
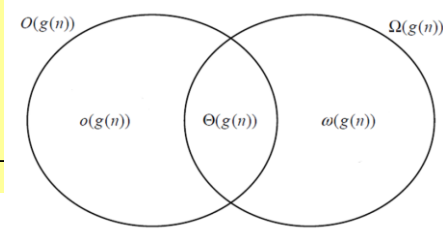
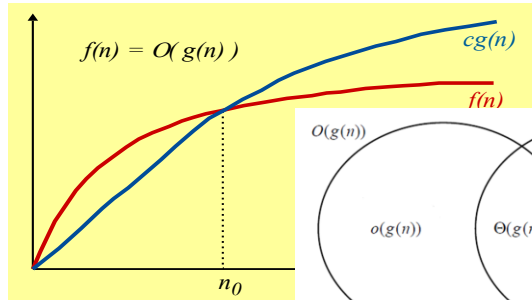


A. Bertossi, A. Montresor  
*Algoritmi e strutture di dati*

# Modalità d'esame

- L'esame consiste in una **prova scritta** e una **prova orale** (per ogni modulo)
  - problem set, 2 a modulo (opzionali)
- **6 appelli**
  - 2 giugno/luglio
  - 2 settembre
  - 2 gennaio/febbraio
- Prova **parziale** a febbraio
- Per sostenere l'esame è **obbligatorio prenotarsi online** (una settimana prima) su [delphi.uniroma2.it](http://delphi.uniroma2.it)

# Teoria degli algoritmi piena di idee bellissime





# Qualche consiglio:

- Studiare giorno per giorno
- Lavorare sui problemi assegnati in gruppo
- Scrivere/formalizzare la soluzione individualmente
- Cercate di divertirvi!



# Algoritmo

Procedimento che descrive una sequenza di passi ben definiti finalizzato a risolvere un dato problema (computazionale).

# etimologia

Il termine *Algoritmo* deriva da *Algorismus*,  
traslitterazione latina del  
nome di un matematico  
persiano del IX secolo,  
*Muhammad al-Khwarizmi*,  
che descrisse delle  
procedure per i calcoli  
matematici



# Algoritmi e programmi

- Un algoritmo può essere visto come **l'essenza computazionale** di un programma, nel senso che fornisce il procedimento per giungere alla soluzione di un dato problema di calcolo
- **Algoritmo diverso da programma**
  - programma è la codifica (in un linguaggio di programmazione) di un algoritmo
  - un algoritmo può essere visto come un programma distillato da dettagli riguardanti il linguaggio di programmazione, ambiente di sviluppo, sistema operativo
  - Algoritmo è un concetto autonomo da quello di programma

# Cosa studieremo?

...ad analizzare e progettare "buoni" algoritmi

...che intendiamo per "buoni"?

- **Corretti**: producono correttamente il risultato desiderato
- **Efficienti**: usano poche risorse di calcolo, come **tempo** e memoria.

**algoritmi veloci!**

# Cosa è (più) importante oltre l'efficienza?

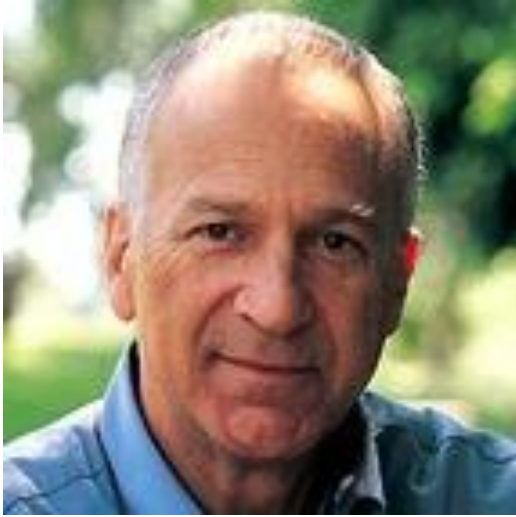
Allora perché tanta enfasi sull'efficienza?

- Correttezza
- Mantenibilità
- Stabilità
- Modularità
- Sicurezza
- User-friendliness
- ...

- Veloce è bello
- A volte: o veloce o non funzionale
- Legato alla User-friendliness
- Efficienza può essere usata per "pagare" altre caratteristiche



# Altri motivi per studiare gli algoritmi



"L'algoritmica è l'anima dell'informatica."

David Harel

Le idee algoritmiche non solo trovano soluzioni a problemi ben posti, quanto costituiscono il linguaggio che porta ad esprimere chiaramente il problema sottostante

# Altri motivi per studiare gli algoritmi

## importanza teorica



"Se è vero che un problema non si capisce a fondo finché non lo si deve insegnare a qualcuno altro, a maggior ragione nulla è compreso in modo più approfondito di ciò che si deve insegnare ad una macchina, ovvero di ciò che va espresso tramite un algoritmo."

Donald Knuth

- In ogni algoritmo è possibile individuare due componenti fondamentali:
- l'identificazione della appropriata tecnica di progetto algoritmico (basato sulla struttura del problema);
  - la chiara individuazione del nucleo matematico del problema stesso.



# Altri motivi per studiare gli algoritmi

## importanza pratica



"There is a saying: If you want to be a good programmer, you just program every day for two years, you will be an excellent programmer. If you want to be a world-class programmer, you can program every day for ten years. Or you can program every day for two years and take an algorithms class."

Charles E. Leiserson

# Altri motivi per studiare gli algoritmi

cosa sapere per lavorare a Google ?

## Preparing for Google Technical Internship Interviews

This guide is intended to help you prepare for Software Engineering internship and Engineering Practicum interviews at Google. If you have any additional questions, please don't hesitate to get in touch with your recruiter.



**Recruitment  
Process: Software  
Engineering  
Internships**



**Interview Tips**



**Technical Preparation**



**Extra Prep  
Resources**

# Altri motivi per studiare gli algoritmi

cosa sapere per lavorare a Google ?

## Preparing for your Interview

### Technical Preparation

**Coding:** Google Engineers primarily code in C++, Java, or Python. We ask that you use one of these languages during your interview. For phone interviews, you will be asked to write code real time in Google Docs. You may be asked to:

- Construct / traverse data structures
- Implement system routines
- Distill large data sets to single values
- Transform one data set to another

**Algorithms:** You will be expected to know the complexity of an algorithm and how you can improve/change it. You can find examples that will help you prepare on [TopCoder](#). Some examples of algorithmic challenges you may be asked about include:

- Big-O analysis: understanding this is particularly important
- Sorting and hashing
- Handling obscenely large amounts of data

**Sorting:** We recommend that you know the details of at least one  $n \cdot \log(n)$  sorting algorithm, preferably two (say, quicksort and merge sort). Merge sort can be highly useful in situations where quicksort is impractical, so take a look at it. What common sorting functions are there? On what kind of input data are they efficient, when are they not? What does efficiency mean in these cases in terms of runtime and space used? E.g. in exceptional cases insertion-sort or radix-sort are much better than the generic QuickSort / MergeSort / HeapSort answers.

# Altri motivi per studiare gli algoritmi

cosa sapere per lavorare a Google ?

## Preparing for your Interview

### Technical Preparation

**Data structures:** Study up on as many other structures and algorithms as possible. We recommend you know about the most famous classes of NP-complete problems, such as traveling salesman and the knapsack problem. Be able to recognize them when an interviewer asks you in disguise. Find out what NP-complete means. You will also need to know about Trees, basic tree construction, traversal and manipulation algorithms, hash tables, stacks, arrays, linked lists, priority queues.

**Hashtables and Maps:** Hashtables are arguably the single most important data structure known to mankind. You should be able to implement one using only arrays in your favorite language, in about the space of one interview. You'll want to know the  $O()$  characteristics of the standard library implementation for Hashtables and Maps in the language you choose to write in.

**Trees:** We recommend you know about basic tree construction, traversal and manipulation algorithms. You should be familiar with binary trees, n-ary trees, and trie-trees at the very least. You should be familiar with at least one flavor of balanced binary tree, whether it's a red/black tree, a splay tree or an AVL tree. You'll want to know how it's implemented. You should know about tree traversal algorithms: BFS and DFS, and know the difference between inorder, postorder and preorder.

**Min/Max Heaps:** Heaps are incredibly useful. Understand their application and  $O()$  characteristics. We probably won't ask you to implement one during an interview, but you should know when it makes sense to use one.

# Altri motivi per studiare gli algoritmi

cosa sapere per lavorare a Google ?

## Preparing for your Interview

### Technical Preparation

**Graphs:** To consider a problem as a graph is often a very good abstraction to apply, since well known graph algorithms for distance, search, connectivity, cycle-detection etc. will then yield a solution to the original problem. There are 3 basic ways to represent a graph in memory (objects and pointers, matrix, and adjacency list); familiarize yourself with each representation and its pros/cons. You should know the basic graph traversal algorithms, breadth-first search and depth-first search. Know their computational complexity, their tradeoffs and how to implement them in real code.

**Recursion:** Many coding problems involve thinking recursively and potentially coding a recursive solution. Prepare for recursion, which can sometimes be tricky if not approached properly. Practice some problems that can be solved iteratively, but a more elegant solution is recursion.

**Operating systems:** You should understand processes, threads, concurrency issues, locks, mutexes, semaphores, monitors and how they all work. Understand deadlock, livelock and how to avoid them. Know what resources a process needs and a thread needs. Understand how context switching works, how it's initiated by the operating system and underlying hardware. Know a little about scheduling. The world is rapidly moving towards multi-core, so know the fundamentals of "modern" concurrency constructs.

**Mathematics:** Some interviewers ask basic discrete math questions. This is more prevalent at Google than at other companies because counting problems, probability problems and other Discrete Math 101 situations surrounds us. Spend some time before the interview refreshing your memory on (or teaching yourself) the essentials of elementary probability theory and combinatorics. You should be familiar with n-choose-k problems and their ilk – the more the better.



**Still want more info?**  
[Tech interviews @ Google](#)

[Distributed systems & parallel programming](#)

[Scalable Web Architecture & Distributed systems](#)

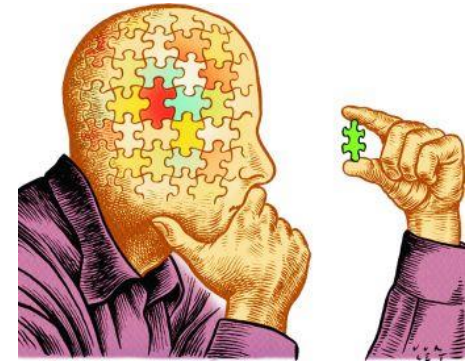
[How search works](#)

# Altri motivi per studiare gli algoritmi

Potenzia le capacità di:

- **Critical Thinking:**

- un modo di decidere se un certo enunciato è sempre vero, vero a volte, parzialmente vero, o falso



- **Problem Solving:**

- insieme dei processi atti ad analizzare, affrontare e risolvere positivamente problemi





complessità  
temporale

alcuni concetti di cui non è  
sempre facile parlare

algoritmo

istanza

efficienza

problema

modello di  
calcolo

dimensione  
dell'istanza

caso  
peggiore

correttezza

# un puzzle può aiutare; eccone uno famoso

n monete tutte identiche d'aspetto  
una delle monete è **falsa** e pesa  
leggermente più delle altre

ho a disposizione solo una  
**bilancia** a due piatti



**obiettivo:** individuare la moneta falsa  
(facendo poche pesate)



# tornando ai concetti fondamentali

**problema:** individuare una moneta falsa fra  $n$  monete

**istanza:**  $n$  specifiche monete; quella falsa è una di queste; può essere la "prima", la "seconda", ecc.

**dimensione dell'istanza:** il valore  $n$

**modello di calcolo:** bilancia a due piatti; specifica quello che si può fare

**algoritmo:** strategia di pesatura. La descrizione deve essere "comprensibile" e "compatta". Deve descrivere la sequenza di operazioni sul modello di calcolo eseguite per una **generica** istanza

**correttezza dell'algoritmo:** la strategia di pesatura deve funzionare (individuare la moneta falsa) per una **generica** istanza, ovvero indipendentemente da quante monete sono, e se la moneta falsa è la "prima", la "seconda", ecc.

# tornando ai concetti fondamentali

**complessità  
temporale  
(dell'algoritmo):** # di pesate che esegue prima di individuare la moneta falsa. Dipende dalla dimensione dell'istanza e dall'istanza stessa.

**complessità  
temporale nel  
caso peggiore:** # **massimo** di pesate che esegue su una istanza di una certa dimensione. E' una delimitazione superiore a quanto mi "costa" risolvere una **generica** istanza. Espressa come funzione della dimensione dell'istanza.

**efficienza  
(dell'algoritmo):** l'algoritmo deve fare poche pesate, deve essere cioè **veloce**. Ma veloce rispetto a che? quando si può dire che un algoritmo è veloce?

Alg1

uso la prima moneta e la  
confronto con le altre



$n=7$



1 2 3 4 5 6 7

Alg1

uso la prima moneta e la  
confronto con le altre



$n=7$



1 2 3 4 5 6 7

Alg1

uso la prima moneta e la  
confronto con le altre



$n=7$



1 2 3 4 5 6 7

Alg1

uso la prima moneta e la  
confronto con le altre



$n=7$



1 2 3 4 5 6 7

Alg1

uso la prima moneta e la  
confronto con le altre



$n=7$



1 2 3 4 5 6 7



Alg1

uso la prima moneta e la  
confronto con le altre

trovata!



$n=7$



1 2 3 4 5 6 7



Alg1

uso la prima moneta e la  
confronto con le altre



$n=7$





Alg1

uso la prima moneta e la  
confronto con le altre

trovata!



$n=7$



1 2 3 4 5 6 7

due parole sui **costrutti**:  
sequenziamento, condizionale, ciclo

Alg1 ( $X=[x_1, x_2, \dots, x_n]$ )


1. **for**  $i=2$  **to**  $n$  **do**
2.     **if**  $\text{peso}(x_1) > \text{peso}(x_i)$  **then return**  $x_1$
3.     **if**  $\text{peso}(x_1) < \text{peso}(x_i)$  **then return**  $x_i$

Corretto? sì!     # pesate? dipende!

nel caso peggiore?  $n-1$

efficiente? ...boh?!

posso fare  
meglio?

Oss: l'ultima  
pesata non serve 

$n-2$   
pesate

...mah!

Alg2

peso le monete a coppie



$n=7$



1 2 3 4 5 6 7

Alg2

peso le monete a coppie



$n=7$



1 2 3 4 5 6 7

Alg2

peso le monete a coppie



$n=7$



Alg2

peso le monete a coppie



trovata!



$n=7$



Alg2

peso le monete a coppie



$n=7$



1 2 3 4 5 6 7



Alg2

peso le monete a coppie



$n=7$



1 2 3 4 5 6 7

Alg2

peso le monete a coppie



$n=7$



Alg2

peso le monete a coppie



trovata!



$n=7$



Alg2 ( $X=[x_1, x_2, \dots, x_n]$ )

1.  $k = \lfloor n/2 \rfloor$
2. **for**  $i=1$  **to**  $k$  **do**
3.     **if**  $\text{peso}(x_{2i-1}) > \text{peso}(x_{2i})$  **then return**  $x_{2i-1}$
4.     **if**  $\text{peso}(x_{2i-1}) < \text{peso}(x_{2i})$  **then return**  $x_{2i}$
5.     *//ancora non ho trovato la moneta falsa; n è dispari*  
      *//e manca una moneta*  
      **return**  $x_n$

Corretto? sì!     # pesate? dipende!

nel caso peggiore?  $\lfloor n/2 \rfloor$

efficiente? ...boh?!

però meglio  
di Alg1



posso fare  
meglio?

## Alg3

peso le monete  
dividendole ogni volta in  
due gruppi



$n=7$



1 2 3 4 5 6 7

Alg3

peso le monete  
dividendole ogni volta in  
due gruppi



$n=7$



1 2 3 4 5 6 7

Alg3

peso le monete  
dividendole ogni volta in  
due gruppi

trovata!



$n=7$



1 2 3 4 5 6 7

## Alg3

peso le monete  
dividendole ogni volta in  
due gruppi



$n=10$





Alg3

peso le monete  
dividendole ogni volta in  
due gruppi



$n=10$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Alg3

peso le monete  
dividendole ogni volta in  
due gruppi



$n=10$



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10



Alg3

peso le monete  
dividendole ogni volta in  
due gruppi

trovata!



$n=10$



Alg3(X)

1. **if** ( $|X|=1$ ) **then** return unica moneta in X
2. dividi X in due gruppi  $X_1$  e  $X_2$  di (uguale) dimensione  $k = \lfloor |X|/2 \rfloor$  e se  $|X|$  è dispari una ulteriore moneta y
3. **if** peso( $X_1$ ) = peso( $X_2$ ) **then return** y
4. **if** peso( $X_1$ ) > peso( $X_2$ ) **then return** Alg3( $X_1$ )  
**else return** Alg3( $X_2$ )

Corretto? sì!

# pesate nel caso peggiore?

efficiente? ...boh?!

$\lfloor \log_2 n \rfloor$   
(da argomentare)

però meglio  
di Alg2



# Alg3: analisi della complessità

$P(n)$ : # pesate che Alg3 esegue nel caso peggiore su un'istanza di dimensione  $n$

$$P(n) = P(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$$

$$P(1) = 0$$

**Oss.:**  $P(x)$  è una funzione non decrescente in  $x$

$$\begin{aligned} P(n) &= P(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \\ &= P(\lfloor (1/2) \lfloor n/2 \rfloor \rfloor) + 2 \end{aligned}$$

$$\leq P(\lfloor n/4 \rfloor) + 2$$

$$\leq P(\lfloor n/8 \rfloor) + 3$$

$$\leq P(\lfloor n/2^i \rfloor) + i$$

per  $i = \lfloor \log_2 n \rfloor$

$$\leq P(1) + \lfloor \log_2 n \rfloor = \lfloor \log_2 n \rfloor$$

**Oss.:** vale

$$\begin{aligned} \lfloor (1/2) \lfloor n/2 \rfloor \rfloor &\leq \\ \lfloor (1/2) n/2 \rfloor &\leq \lfloor n/4 \rfloor \end{aligned}$$

quando  $\lfloor n/2^i \rfloor = 1$ ?

Una domanda: quanto è più veloce Alg3 rispetto agli altri?

assunzione: ogni pesata richiede un minuto

### TABELLA

n	10	100	1.000	10.000	100.000
Alg1	9m	~ 1h, 39m	~16 h	~7gg	~69gg
Alg2	5 m	~ 50 min	~8 h	~3,5gg	~35gg
Alg3	3 m	6m	9m	13m	16m

posso fare meglio di  
Alg3?

Alg4

posso dividere in tre  
gruppi invece di due



$n=7$



1 2 3 4 5 6 7

Alg4

posso dividere in tre  
gruppi invece di due



$n=7$



1 2 3 4 5 6 7



Alg4

posso dividere in tre  
gruppi invece di due

trovata!



$n=7$



1 2 3 4 5 6 7

Alg4

posso dividere in tre  
gruppi invece di due



$n=10$



Alg4

posso dividere in tre  
gruppi invece di due



$n=10$



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Alg4

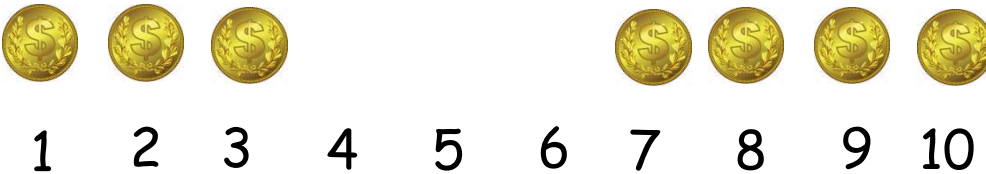
posso dividere in tre  
gruppi invece di due



trovata!



$n=10$



## Alg4 (X)

1. **if** ( $|X|=1$ ) **then** return unica moneta in X
2. dividi X in tre gruppi  $X_1, X_2, X_3$  di dimensione bilanciata  
siano  $X_1$  e  $X_2$  i gruppi che hanno la stessa dimensione (ci sono sempre)
3. **if**  $\text{peso}(X_1) = \text{peso}(X_2)$  **then return** Alg4( $X_3$ )
4. **if**  $\text{peso}(X_1) > \text{peso}(X_2)$  **then return** Alg4( $X_1$ )  
**else return** Alg4( $X_2$ )

Corretto? sì!

# pesate nel caso peggiore?

efficiente? ...boh?!

$\lceil \log_3 n \rceil$   
(da argomentare)

però meglio  
di Alg3



# Alg4: analisi della complessità

$P(n)$ : # pesate che Alg4 esegue nel caso peggiore su un'istanza di dimensione  $n$

$$P(n) = P(\lceil n/3 \rceil) + 1$$

$$P(1) = 0$$

**Oss.:**  $P(x)$  è una funzione non decrescente in  $x$

sia  $k$  il più piccolo intero tale che  $3^k \geq n$   $n' = 3^k$

$$\Rightarrow k \geq \log_3 n \xrightarrow{k \text{ intero}} k = \lceil \log_3 n \rceil$$

$$P(n) \leq P(n') = k = \lceil \log_3 n \rceil$$

$$P(n') = P(n'/3) + 1$$

$$= P(n'/9) + 2$$

$$= P(n'/3^i) + i$$

$$= P(1) + k = k \quad \text{per } i=k$$

...torniamo alla tabella: quanto è più veloce Alg4 rispetto agli altri?

assunzione: ogni pesata richiede un minuto

### TABELLA

n	10	100	1.000	10.000	100.000
Alg1	9m	~ 1h, 39m	~16 h	~6gg	~69gg
Alg2	5 m	~ 50 m	~8 h	~3,5gg	~35gg
Alg3	3 m	6m	9m	13m	16m
Alg4	3 m	5m	7m	9m	11m

posso fare meglio di  
Alg4?

Sui limiti della velocità: una  
delimitazione inferiore  
(lower bound) alla  
complessità  
del problema





## Teorema

Un qualsiasi algoritmo che correttamente individua la moneta falsa fra  $n$  monete deve effettuare nel caso peggiore almeno  $\lceil \log_3 n \rceil$  pesate.

la dimostrazione usa argomentazioni matematiche per mostrare che un generico algoritmo se è corretto deve avere almeno una certa complessità temporale nel caso peggiore.

dimostrazione elegante e non banale che usa la tecnica dell'albero di decisione di un problema (che vedremo durante il corso)

## Corollario

Alg4 è un algoritmo ottimo per il problema.



## Esercizio

Si devono cuocere  $n$  frittelle. Si ha a disposizione una padella che riesce a contenere due frittelle alla volta. Ogni frittella va cotta su tutte e due i lati e ogni lato richiede un minuto.

Progettare un algoritmo che frigge le frittelle nel minor tempo possibile. Si argomenti, se possibile, sulla ottimalità dell'algoritmo proposto.

A pair of red theater curtains is pulled back, revealing a dark stage. A spotlight illuminates the wooden floor in the center. The text "Buon inizio anno!" is written in white across the middle of the image.

Buon inizio anno!