Algoritmi e Strutture Dati

Luciano Gualà
guala@mat.uniroma2.it
www.mat.uniroma2.it/~guala

Informazioni utili

- **Orario lezioni**
  - lunedì: 11,00 – 13,00
  - giovedì: 9,00 – 11,00
- **Orario ricevimento**
  - per appuntamento (online o presenza)
  - Ufficio: dip. di matematica, piano 0, corridoio B0, stanza 206

Struttura del corso

- Corso strutturato in due moduli
  - Modulo I (vecchio Elementi di Algoritmi e Strutture Dati)
    - 6 CFU
    - Ottobre – Gennaio
  - Modulo II (vecchio Algoritmi e Strutture dati con Laboratorio)
    - 6 CFU
    - Marzo – Giugno

Prerequisiti del corso

Cosa è necessario sapere…

- programmazione di base
- strutture dati elementari
- concetto di ricorsione
- dimostrazione per induzione e calcolo infinitesimale

Propedeuticità

- programmazione
- analisi matematica
- matematica discreta

Slide e materiale didattico

http://www.mat.uniroma2.it/~guala/

Libri di testo

C. Demetrescu, I. Finocchi, G. Italiano
Algoritmi e Strutture dati (sec. ed.)
McGraw-Hill

P. Crescenzi, G. Gambosi, R. Grossi, G. Rossi
Strutture di dati e algoritmi
Pearson

S. Dasgupta, C. Papadimitriou, U. Vazirani
Algorithms , McGraw-Hill

T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein
Introduzione agli algortimi e strutture dati
McGraw-Hill

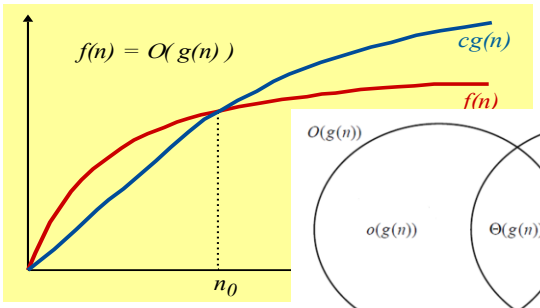
A. Bertossi, A. Montresor
Algoritmi e strutture di dati
Città Studi

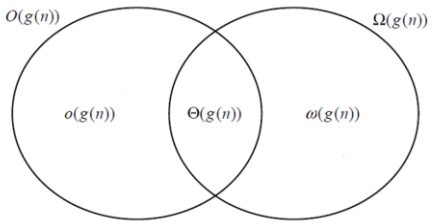
J. Kleinberg, E. Tardos
Algorithm Design
Addison Wesley

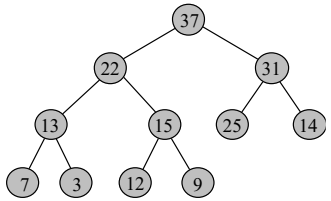
Modalità d'esame

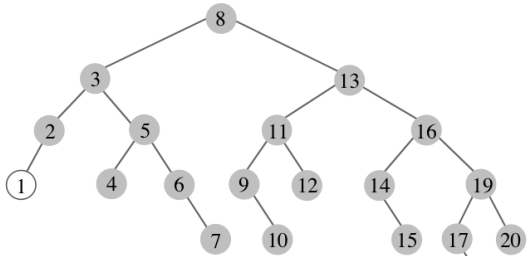
- L'esame consiste in una prova scritta e una prova orale (per ogni modulo)
- 4-6 appelli
  - 2 giugno/luglio
  - 1-2 settembre (esclusivi)
  - 1-2 gennaio/febbraio (esclusivi)
- Prova parziale a febbraio
- Per sostenere l'esame è **obbligatorio** prenotarsi online (una settimana prima) su delphi.uniroma2.it

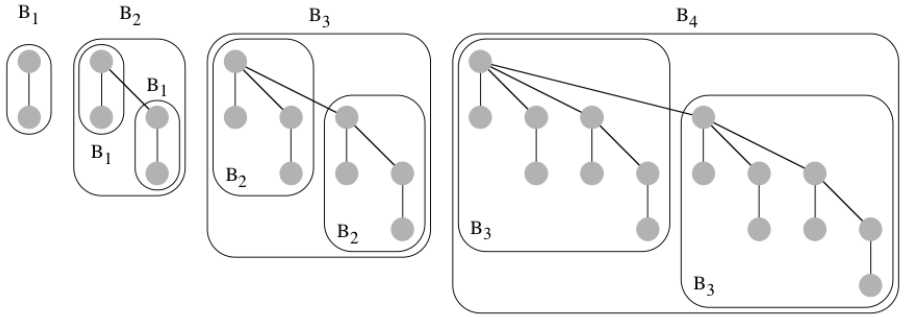
Teoria degli algoritmi piena di idee bellissime

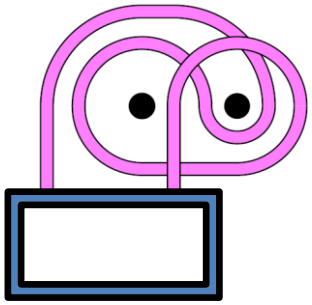


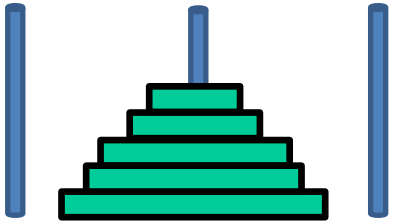


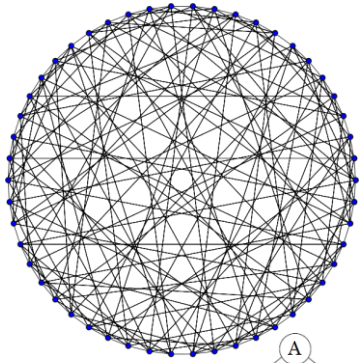


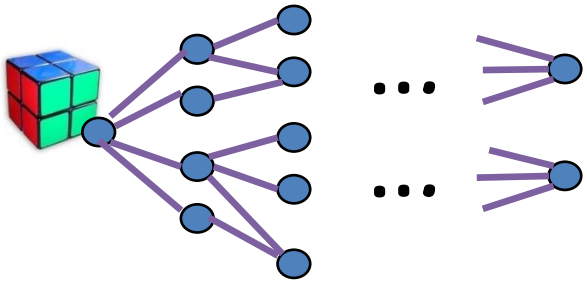


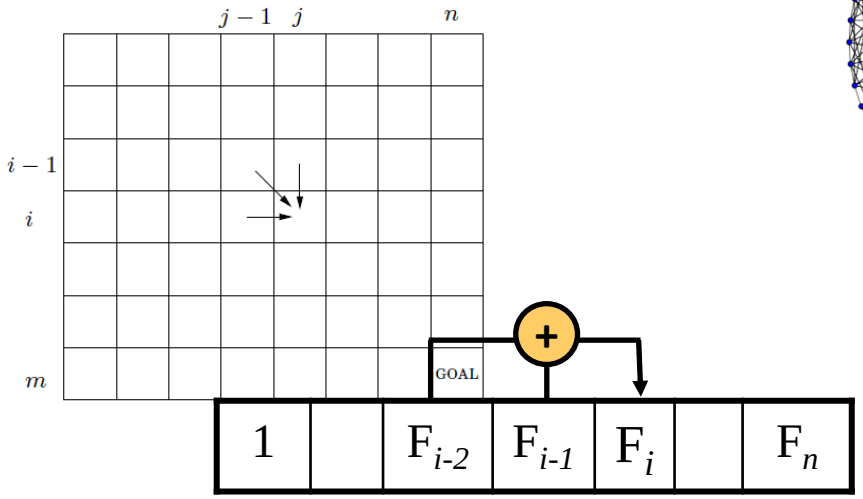


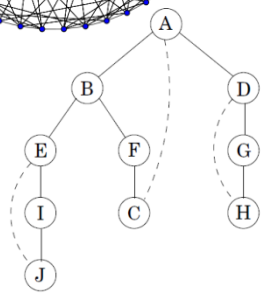


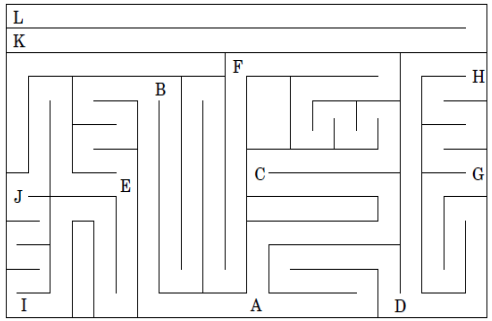








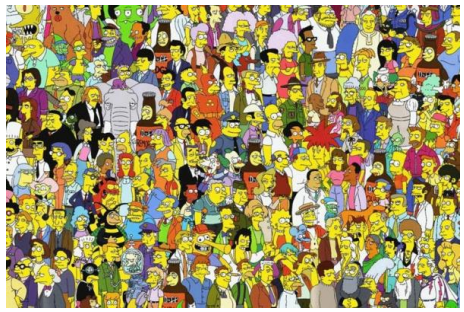




Qualche consiglio:

- Studiare giorno per giorno

- Lavorare sui problemi assegnati in gruppo



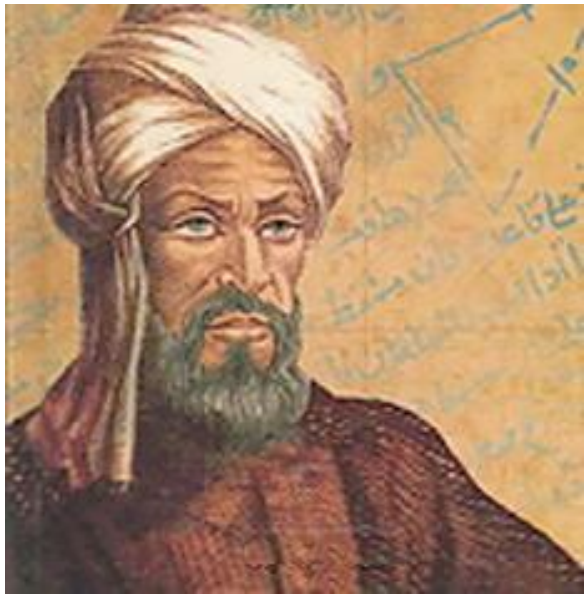
- Scrivere/formalizzare la soluzione individualmente

- Cercate di divertirvi!

Algoritmo

Procedimento che descrive una sequenza di passi ben definiti finalizzato a risolvere un dato problema (computazionale).

etimologia



Il termine *Algoritmo* deriva da *Algorismus*, traslitterazione latina del nome di un matematico persiano del IX secolo, Muhammad al-Khwarizmi, che descrisse delle procedure per i calcoli matematici

Algoritmi e programmi

- Un algoritmo può essere visto come l'essenza computazionale di un programma, nel senso che fornisce il procedimento per giungere alla soluzione di un dato problema di calcolo

- Algoritmo diverso da programma
  - programma è la codifica (in un linguaggio di programmazione) di un algoritmo
  - un algoritmo può essere visto come un programma distillato da dettagli riguardanti il linguaggio di programmazione, ambiente di sviluppo, sistema operativo
  - Algoritmo è un concetto autonomo da quello di programma

Cosa studieremo?

…ad analizzare e progettare "buoni" algoritmi

…che intendiamo per "buoni"?

- Corretti: producono correttamente il risultato desiderato
- Efficienti: usano poche risorse di calcolo, come tempo e memoria.

algoritmi veloci!

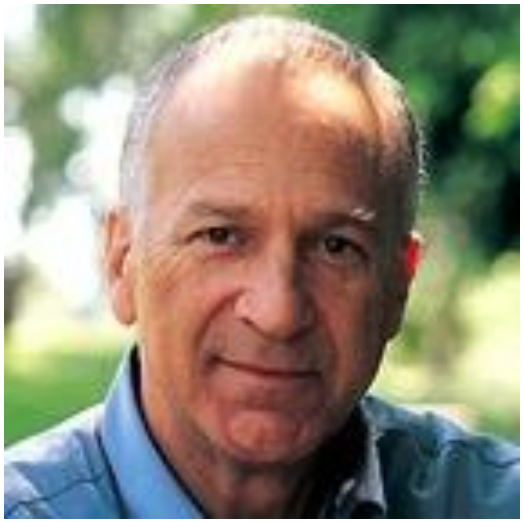
Cosa è (più) importante oltre l'efficienza?

- Correttezza
- Semplicità
- Mantenibilità
- Stabilità
- Modularità
- Sicurezza
- User-friendliness
- …

Allora perché tanta enfasi sull'efficienza?

- Veloce è bello
- A volte: o veloce o non funzionale
- Legato alla User-friendliness
- Efficienza può essere usata per "pagare" altre caratteristiche

Altri motivi per studiare gli algoritmi



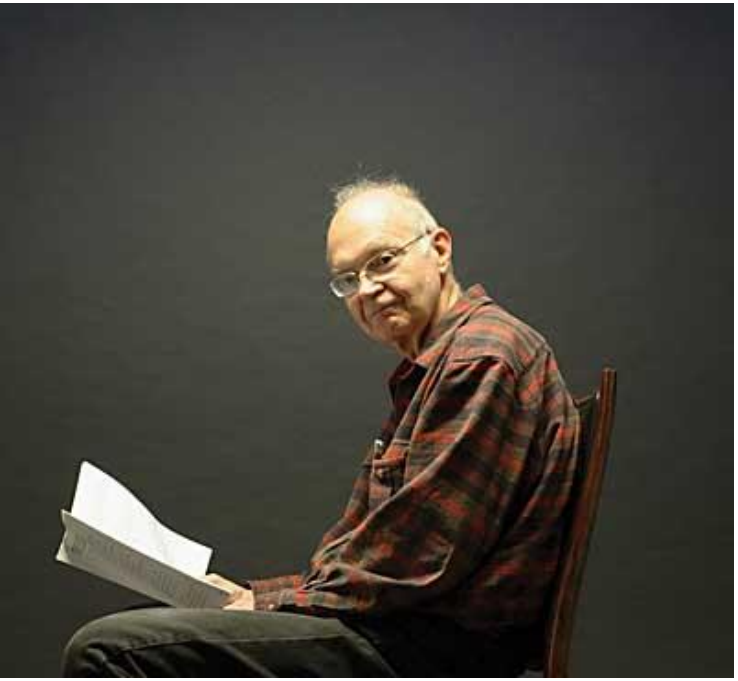
"L'algoritmica è l'anima dell'informatica."

David Harel

Le idee algoritmiche non solo trovano soluzioni a problemi ben posti, quanto costituiscono il linguaggio che porta ad esprimere chiaramente il problema soggiacente

Altri motivi per studiare gli algoritmi

importanza teorica



"Se è vero che un problema non si capisce a fondo finché non lo si deve insegnare a qualcuno altro, a maggior ragione nulla è compreso in modo più approfondito di ciò che si deve insegnare ad una macchina, ovvero di ciò che va espresso tramite un algoritmo."

Donald Knuth

In ogni algoritmo è possibile individuare due componenti fondamentali:

- l'identificazione della appropriata tecnica di progetto algoritmico (basato sulla struttura del problema);
- la chiara individuazione del nucleo matematico del problema stesso.

Altri motivi per studiare gli algoritmi

importanza pratica

"There is a saying: If you want to be a good programmer, you just program every day for two years, you will be an excellent programmer. If you want to be a world-class programmer, you can program every day for ten years. Or you can program every day for two years and take an algorithms class."

Charles E. Leiserson

Altri motivi per studiare gli algoritmi

cosa sapere per lavorare a Google ?

Preparing for Google Technical Internship Interviews

This guide is intended to help you prepare for Software Engineering internship and Engineering Practicum interviews at Google. If you have any additional questions, please don't hesitate to get in touch with your recruiter.

Recruitment Process: Software Engineering Internships

Interview Tips

Technical Preparation

Extra Prep Resources

Google

Altri motivi per studiare gli algoritmi

cosa sapere per lavorare a Google ?

Preparing for your Interview

Technical Preparation

Coding: Google Engineers primarily code in C++, Java, or Python. We ask that you use one of these languages during your interview. For phone interviews, you will be asked to write code real time in Google Docs. You may be asked to:

- Construct / traverse data structures
- Implement system routines
- Distill large data sets to single values
- Transform one data set to another

Algorithms: You will be expected to know the complexity of an algorithm and how you can improve/change it. You can find examples that will help you prepare on TopCoder. Some examples of algorithmic challenges you may be asked about include:

- Big-O analysis: understanding this is particularly important
- Sorting and hashing
- Handling obscenely large amounts of data

Sorting: We recommend that you know the details of at least one n*log(n) sorting algorithm, preferably two (say, quicksort and merge sort). Merge sort can be highly useful in situations where quicksort is impractical, so take a look at it. What common sorting functions are there? On what kind of input data are they efficient, when are they not? What does efficiency mean in these cases in terms of runtime and space used? E.g. in exceptional cases insertion-sort or radix-sort are much better than the generic QuickSort / MergeSort / HeapSort answers.

Altri motivi per studiare gli algoritmi

cosa sapere per lavorare a Google ?

Preparing for your Interview

Technical Preparation

Data structures: Study up on as many other structures and algorithms as possible. We recommend you know about the most famous classes of NP-complete problems, such as traveling salesman and the knapsack problem. Be able to recognize them when an interviewer asks you in disguise. Find out what NP-complete means. You will also need to know about Trees, basic tree construction, traversal and manipulation algorithms, hash tables, stacks, arrays, linked lists, priority queues.

Hashtables and Maps: Hashtables are arguably the single most important data structure known to mankind. You should be able to implement one using only arrays in your favorite language, in about the space of one interview. You'll want to know the O() characteristics of the standard library implementation for Hashtables and Maps in the language you choose to write in.

Trees: We recommend you know about basic tree construction, traversal and manipulation algorithms. You should be familiar with binary trees, n-ary trees, and trie-trees at the very least. You should be familiar with at least one flavor of balanced binary tree, whether it's a red/black tree, a splay tree or an AVL tree. You'll want to know how it's implemented. You should know about tree traversal algorithms: BFS and DFS, and know the difference between inorder, postorder and preorder.

Min/Max Heaps: Heaps are incredibly useful. Understand their application and O() characteristics. We probably won't ask you to implement one during an interview, but you should know when it makes sense to use one.

Google

Altri motivi per studiare gli algoritmi

cosa sapere per lavorare a Google ?

Preparing for your Interview

Technical Preparation

Graphs: To consider a problem as a graph is often a very good abstraction to apply, since well known graph algorithms for distance, search, connectivity, cycle-detection etc. will then yield a solution to the original problem. There are 3 basic ways to represent a graph in memory (objects and pointers, matrix, and adjacency list); familiarize yourself with each representation and its pros/cons. You should know the basic graph traversal algorithms, breadth-first search and depth-first search. Know their computational complexity, their tradeoffs and how to implement them in real code.

Recursion: Many coding problems involve thinking recursively and potentially coding a recursive solution. Prepare for recursion, which can sometimes be tricky if not approached properly. Practice some problems that can be solved iteratively, but a more elegant solution is recursion.

Operating systems: You should understand processes, threads, concurrency issues, locks, mutexes, semaphores, monitors and how they all work. Understand deadlock, livelock and how to avoid them. Know what resources a process needs and a thread needs. Understand how context switching works, how it's initiated by the operating system and underlying hardware. Know a little about scheduling. The world is rapidly moving towards multi-core, so know the fundamentals of "modern" concurrency constructs.

Mathematics: Some interviewers ask basic discrete math questions. This is more prevalent at Google than at other companies because counting problems, probability problems and other Discrete Math 101 situations surrounds us. Spend some time before the interview refreshing your memory on (or teaching yourself) the essentials of elementary probability theory and combinatorics. You should be familiar with n-choose-k problems and their ilk – the more the better.

Still want more info?

Tech interviews @ Google

Distributed systems & parallel programming

Scalable Web Architecture & Distributed systems

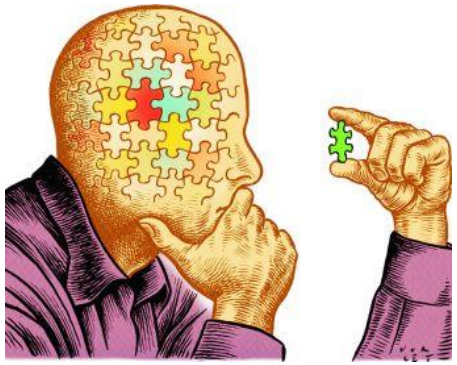
How search works

Google

Altri motivi per studiare gli algoritmi

Potenzia le capacità di:

- ***Critical Thinking***:
  - un modo di decidere se un certo enunciato è sempre vero, vero a volte, parzialmente vero, o falso



- ***Problem Solving***:
  - insieme dei processi atti ad analizzare, affrontare e risolvere positivamente problemi

complessità
temporale

alcuni concetti di cui non è sempre facile parlare

algoritmo

istanza

efficienza

problema

modello di
calcolo

dimensione
dell'istanza

caso
peggiore

correttezza

un puzzle può aiutare; eccone uno famoso

n monete tutte identiche d'aspetto
una delle monete è falsa e pesa
leggermente più delle altre

ho a disposizione solo una
bilancia a due piatti

obiettivo: individuare la moneta falsa
(facendo poche pesate)

tornando ai concetti fondamentali

problema: individuare una moneta falsa fra n monete

istanza: n specifiche monete; quella falsa è una di queste; può essere la "prima", la "seconda", ecc.

dimensione dell'istanza: il valore n

modello di calcolo: bilancia a due piatti; specifica quello che si può fare

algoritmo: strategia di pesatura. La descrizione deve essere "comprensibile" e "compatta". Deve descrivere la sequenza di operazioni sul modello di calcolo eseguite per una generica istanza

correttezza dell'algoritmo: la strategia di pesatura deve funzionare (individuare la moneta falsa) per una generica istanza, ovvero indipendentemente da quante monete sono, e se la moneta falsa è la "prima", la "seconda", ecc.

tornando ai concetti fondamentali

complessità temporale (dell'algoritmo): # di pesate che esegue prima di individuare la moneta falsa. Dipende dalla dimensione dell'istanza e dall'istanza stessa.

complessità temporale nel caso peggiore: # massimo di pesate che esegue su una istanza di una certa dimensione. E' una delimitazione superiore a quanto mi "costa" risolvere una generica istanza. Espressa come funzione della dimensione dell'istanza.

efficienza (dell'algoritmo): l'algoritmo deve fare poche pesate, deve essere cioè veloce. Ma veloce rispetto a che? quando si può dire che un algoritmo è veloce?

Alg1

uso la prima moneta e la confronto con le altre

n=7

1 2 3 4 5 6 7

Alg1

uso la prima moneta e la confronto con le altre

n=7

1 2 3 4 5 6 7

Alg1

uso la prima moneta e la confronto con le altre

n=7

1 2 3 4 5 6 7

Alg1

uso la prima moneta e la confronto con le altre

n=7

1 2 3 4 5 6 7

Alg1

uso la prima moneta e la confronto con le altre

n=7

1 2 3 4 5 6 7

Alg1

uso la prima moneta e la confronto con le altre

n=7

1 2 3 4 5 6 7

Alg1

uso la prima moneta e la confronto con le altre

n=7

1 2 3 4 5 6 7

Alg1

uso la prima moneta e la confronto con le altre

n=7

1 2 3 4 5 6 7

due parole sui costrutti:
sequenziamento, condizionale, ciclo

Alg1 ($X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$)

1. **for** i=2 **to** n **do**
2. **if** peso(x_1) > peso(x_i) **then return** x_1
3. **if** peso(x_1) < peso(x_i) **then return** x_i

Corretto? sì! # pesate? dipende!

nel caso peggiore? n-1

efficiente? …boh?!

posso fare meglio?

Oss: l'ultima pesata non serve ➡ n-2 pesate

…mah!

Alg2

peso le monete a coppie

n=7

1 2 3 4 5 6 7

Alg2

peso le monete a coppie

n=7

1 2 3 4 5 6 7

Alg2

peso le monete a coppie

n=7

1 2 3 4 5 6 7

Alg2

peso le monete a coppie

n=7

1 2 3 4 5 6 7

Alg2

peso le monete a coppie

n=7

1 2 3 4 5 6 7

Alg2

peso le monete a coppie

n=7

1 2 3 4 5 6 7

Alg2

peso le monete a coppie

n=7

1 2 3 4 5 6 7

Alg2

peso le monete a coppie

n=7

1 2 3 4 5 6 7

Alg2 ($X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$)

1. $k=\lfloor n/2 \rfloor$
2. **for** i=1 **to** k **do**
3. **if** peso(x_{2i-1}) > peso(x_{2i}) **then return** x_{2i-1}
4. **if** peso(x_{2i-1}) < peso(x_{2i}) **then return** x_{2i}
5. *//ancora non ho trovato la moneta falsa; n è dispari*
   //e manca una moneta
   return x_n

Corretto? sì! # pesate? dipende!

nel caso peggiore? $\lfloor n/2 \rfloor$

efficiente? ...boh?!

però meglio di *Alg1* ☺

posso fare meglio?

Alg3

peso le monete
dividendole ogni volte in
due gruppi

n=7

1 2 3 4 5 6 7

Alg3

peso le monete
dividendole ogni volte in
due gruppi

n=7

1 2 3 4 5 6 7

Alg3

peso le monete
dividendole ogni volte in
due gruppi

n=7

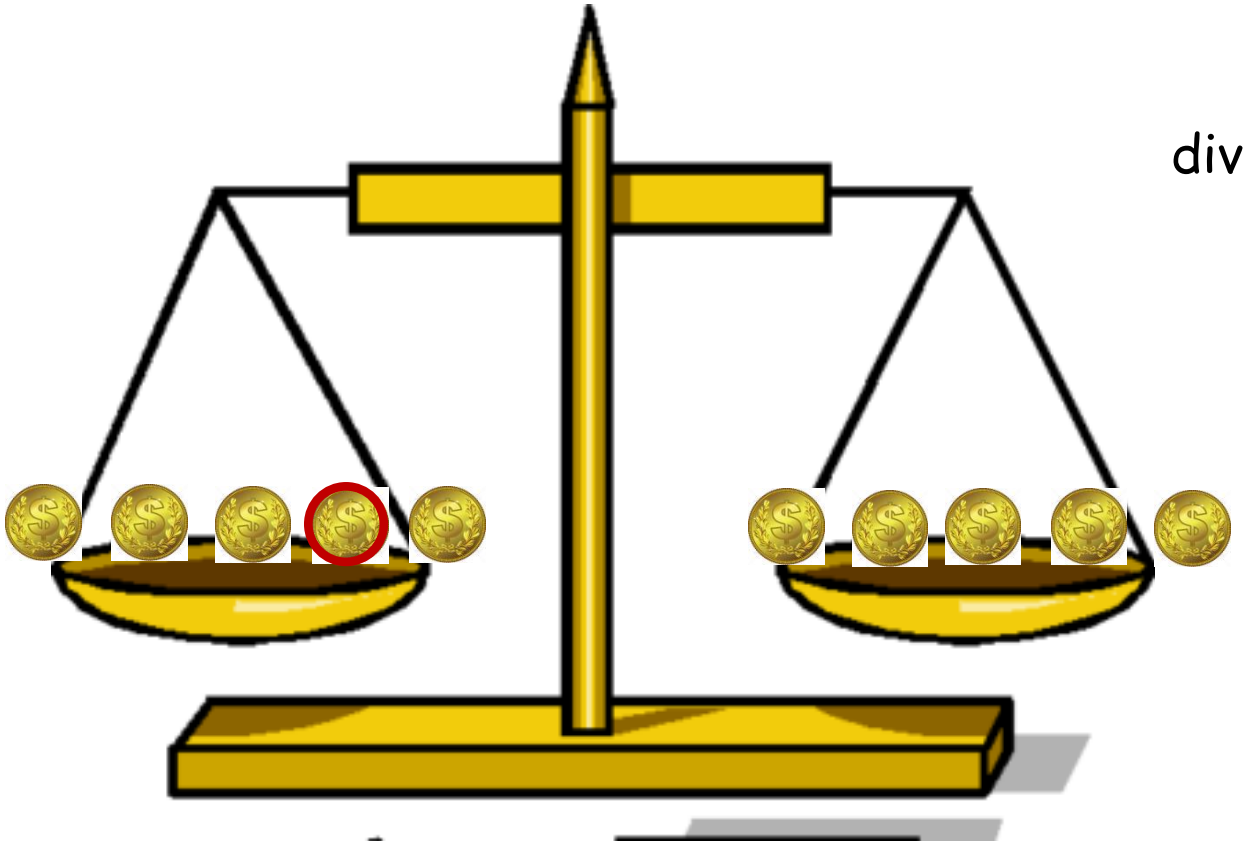
1 2 3 4 5 6 7

Alg3

peso le monete
dividendole ogni volte in
due gruppi

n=10

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10



Alg3

peso le monete
dividendole ogni volte in
due gruppi

n=10

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Alg3

peso le monete
dividendole ogni volte in
due gruppi

n=10

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Alg3

peso le monete
dividendole ogni volte in
due gruppi

n=10

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Alg3(X)

1. **if** (|X|=1) **then** return unica moneta in X
2. dividi X in due gruppi X_1 e X_2 di (uguale) dimensione $k = \lfloor |X|/2 \rfloor$ e se |X| è dispari una ulteriore moneta y
3. **if** peso(X_1) = peso(X_2) **then return** y
4. **if** peso(X_1) > peso(X_2) **then return** Alg3(X_1)
   else return Alg3(X_2)

Corretto? sì!

pesate nel caso peggiore? $\lfloor \log_2 n \rfloor$ (da argomentare)

efficiente? ...boh?!

però meglio di *Alg2*

☺

Alg3: analisi della complessità

P(n): # pesate che Alg3 esegue nel caso peggiore su un'istanza di dimensione n

$P(n) = P(\lfloor n/2 \rfloor) + 1$ $\qquad$ $P(1)=0$

Oss.: P(x) è una funzione non decrescente in x

$$
\begin{aligned}
P(n) &= P(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \\
&= P(\lfloor (1/2)\lfloor n/2 \rfloor \rfloor) + 2 \\
&\leq P(\lfloor n/4 \rfloor) + 2 \\
&\leq P(\lfloor n/8 \rfloor) + 3 \\
&\leq P(\lfloor n/2^i \rfloor) + i \qquad \text{per } i = \lfloor \log_2 n \rfloor \\
&\leq P(1) + \lfloor \log_2 n \rfloor = \lfloor \log_2 n \rfloor
\end{aligned}
$$

Oss.: vale
$\lfloor (1/2)\lfloor n/2 \rfloor \rfloor \leq \lfloor (1/2)\, n/2 \rfloor \leq \lfloor n/4 \rfloor$

quando $\lfloor n/2^i \rfloor = 1$?

Una domanda: quanto è più veloce Alg3 rispetto agli altri?

assunzione: ogni pesata richiede un minuto

TABELLA

n	10	100	1.000	10.000	100.000
Alg1	9m	~ 1h, 39m	~16 h	~7gg	~69gg
Alg2	5 m	~ 50 min	~8 h	~3,5gg	~35gg
Alg3	3 m	6m	9m	13m	16m

posso fare meglio di Alg3?

Alg4

posso dividere in tre gruppi invece di due

n=7

1 2 3 4 5 6 7

Alg4

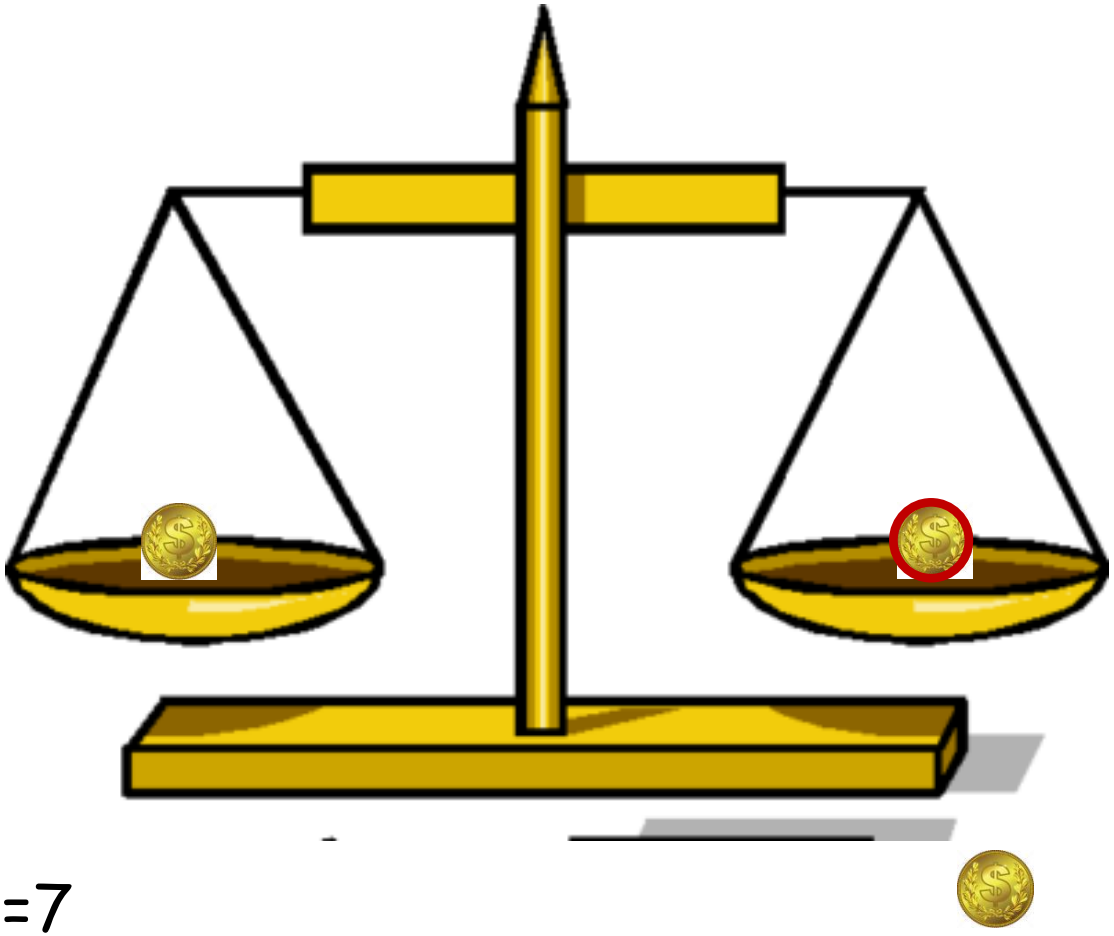
posso dividere in tre gruppi invece di due

n=7

1 2 3 4 5 6 7

Alg4

posso dividere in tre gruppi invece di due



n=7

1 2 3 4 5 6 7

Alg4

posso dividere in tre gruppi invece di due

n=10

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Alg4

posso dividere in tre gruppi invece di due

n=10

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Alg4

posso dividere in tre gruppi invece di due

n=10

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Alg4 (X)

1. **if** (|X|=1) **then** return unica moneta in X
2. dividi X in tre gruppi X_1, X_2, X_3 di dimensione bilanciata siano X_1 e X_2 i gruppi che hanno la stessa dimensione (ci sono sempre)
3. **if** peso(X_1) = peso(X_2) **then return** Alg4(X_3)
4. **if** peso(X_1) > peso(X_2) **then return** Alg4(X_1)
   else return Alg4(X_2)

Corretto? sì!

pesate nel caso peggiore? $\lceil \log_3 n \rceil$ (da argomentare)

efficiente? …boh?!

però meglio di *Alg3*

☺

Alg4: analisi della complessità

P(n): # pesate che Alg4 esegue nel caso peggiore su un'istanza di dimensione n

$P(n) = P(\lceil n/3 \rceil) + 1$ $\qquad$ $P(1)=0$

Oss.: P(x) è una funzione non decrescente in x

sia k il più piccolo intero tale che $3^k \geq n$ $\qquad$ $n'=3^k$

$\Rightarrow \quad k \geq \log_3 n \quad \xrightarrow{\text{k intero}} \quad k = \lceil \log_3 n \rceil$

$P(n) \leq P(n') = k = \lceil \log_3 n \rceil$

$P(n') = P(n'/3) + 1$

$= P(n'/9) + 2$

$= P(n'/3^i) + i$

$= P(1) + k = k$ $\qquad$ per i=k

…torniamo alla tabella: quanto è più veloce Alg4 rispetto agli altri?

assunzione: ogni pesata richiede un minuto

TABELLA

n	10	100	1.000	10.000	100.000
Alg1	9m	~ 1h, 39m	~16 h	~6gg	~69gg
Alg2	5 m	~ 50 m	~8 h	~3,5gg	~35gg
Alg3	3 m	6m	9m	13m	16m
Alg4	3 m	5m	7m	9m	11m

posso fare meglio di Alg4?

Sui limiti della velocità: una delimitazione inferiore (lower bound) alla complessità del problema

Teorema

Un qualsiasi algoritmo che correttamente individua la moneta falsa fra n monete deve effettuare nel caso peggiore almeno $\lceil \log_3 n \rceil$ pesate.

la dimostrazione usa argomentazioni matematiche per mostrare che un generico algoritmo se è corretto deve avere almeno una certa complessità temporale nel caso peggiore.

dimostrazione elegante e non banale che usa la tecnica dell'albero di decisione di un problema (che vedremo durante il corso)

Corollario

Alg4 è un algoritmo ottimo per il problema.

Esercizio

Si devono cuocere n frittelle. Si ha a disposizione una padella che riesce a contenere due frittelle alla volta. Ogni frittella va cotta su tutte e due i lati e ogni lato richiede un minuto.
Progettare un algoritmo che frigge le frittelle nel minor tempo possibile. Si argomenti, se possibile, sulla ottimalità dell'algoritmo proposto.


Buon inizio anno!