Esercizi svolti in aula per il corso di EASD

20 marzo 2008

Esercizio 1
Dimostrare formalmente (usando la definizione di $\Theta(\cdot)$) la seguente proposizione: per ogni costante $k > 0$ e funzione $f(n)$, vale: $kf(n) = \Theta(f(n))$.

Soluzione
L'applicazione della definizione di Θ richiede di trovare tre costanti $c_1, c_2 > 0, n_0 \geq 0$ che soddisfano la seguente relazione:

$$c_1 f(n) \leq kf(n) \leq c_2 f(n) \;\; \forall n \geq n_0.$$

E' sufficiente scegliere $c_1 = c_2 = k$, e $n_0 = 0$.

Esercizio 2
Dimostrare formalmente (usando la definizione di $O(\cdot)$ e di $\Omega(\cdot)$) la seguente proprietà (simmetria traposta): $f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$.

Soluzione
Dimostriamo separatamente i due versi dell'implicazione, ovvero: $f(n) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) = \Omega(f(n))$ e $f(n) = O(g(n)) \Leftarrow g(n) = \Omega(f(n))$.
($\Rightarrow$) Per mostrare che $g(n) = \Omega(f(n))$, è sufficiente trovare due costanti $c > 0, n_0 \geq 0$, tali che

$$g(n) \geq cf(n), \;\; \forall n \geq n_0.$$

Per ipotesi sappiamo che $f(n) = O(g(n))$, quindi esistono due costanti $c' > 0, n'_0 \geq 0$, tali che

$$f(n) \leq c'g(n) \;\; \forall n \geq n'_0,$$

da cui segue:

$$g(n) \geq \frac{1}{c'} f(n) \;\; \forall n \geq n'_0.$$

E' quindi sufficiente scegliere $n_0 = n'_0$ e $c = 1/c'$.
($\Leftarrow$) La dimostrazione di questo verso dell'implicazione è del tutto simile ed è lasciata come esercizio allo studente.

Esercizio 3
Dimostrare formalmente (usando la definizione di $O(\cdot)$) la seguente proprietà (transitività della relazione $O(\cdot)$): $f(n) = O(g(n))$ e $g(n) = O(h(n)) \Rightarrow f(n) = O(h(n))$.

Soluzione
Per mostrare che $f(n) = O(h(n))$ dobbiamo trovare due costanti $c > 0, n_0 \geq 0$ tale che

$$f(n) \leq c\, h(n) \;\; \forall n \geq n_0.$$

Per ipotesi sappiamo che esistono quattro costranti $c_1, c_2 > 0, n_0', n_0'' \geq 0$ tali che:

$$\begin{array}{l} f(n) \leq c_1 g(n) \ \forall n \geq n_0' \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \quad f(n) \leq c_1 g(n) \leq c_1 c_2 h(n) \ \forall n \geq \max\{n_0', n_0''\} \\ g(n) \leq c_2 h(n) \ \forall n \geq n_0'' \end{array}$$

da cui segue che è sufficiente scegliere $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$ e $c = c_1 c_2$.

Esercizio 4

Ordinare le seguenti funzioni in base alla velocità di crescita asintotica (dalla più "lenta" alla più "veloce").

- $n\sqrt{n}$
- $n^2 \log n$
- n^{100}
- $\log n^4$
- 2^{500}
- $\log^4 n$
- $n^{\frac{5}{2}}$
- $2^{\frac{n}{2}}$
- $\pi \log n + 100$
- 2^n
- $\sqrt{\log n}$
- 5

Soluzione

$2^{500} = \Theta(5) = \Theta(1) = o(\sqrt{\log n}) = o(\pi \log n + 100) = \Theta(\log n^4) = o(\log^4 n) = o(n\sqrt{n}) = o(n^2 \log n) = o(n^{\frac{5}{2}}) = o(n^{100}) = o(2^{\frac{n}{2}}) = o(2^n)$