Esercizi svolti in aula per il corso di EASD

26 maggio 2008

Esercizio 1
Siano $f(n), g(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ due funzioni. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

(a) Se $f(n) \leq g(n)$ per ogni $n \geq 0$, allora $f(n) = O(g(n))$.

(b) Se $f(n) = O(g(n))$, allora $f(n) \leq g(n)$ per ogni $n \geq 0$.

(c) Se $f(n) = O(g(n))$, allora esiste un valore $\bar{n} \geq 0$ tale che $f(\bar{n}) \leq g(\bar{n})$.

Soluzione

(a) Vera. Per definizione $f(n) = O(g(n))$ se esistono due costanti $c > 0, n_0 \geq 0$ tale che $f(n) \leq cg(n)$ per ogni $n \geq n_0$. Basta scegliere $c = 1$ e $n_0 = 0$.

(b) Falsa. Un controesempio è il seguente: $f(n) = n + 2$ e $g(n) = n^2$. Vale che $n + 2 = O(n^2)$, ma $f(1) = 3 > 1 = g(1)$.

(c) Falsa. Un controesempio è il seguente: $f(n) = n + 1$ e $g(n) = n$. Vale che $n + 1 = O(n)$, ma $f(n) > g(n)$ per ogni $n \geq 0$.

Esercizio 2
Siano $f(n), g(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ due funzioni. Dimostrare o confutare la seguente affermazione:

- Se esiste un $\bar{n} \geq 0$ e una costante $k > 0$ tale che $f(n) \leq g(n) + k$ per ogni $n \geq \bar{n}$, allora $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$.

Soluzione
Vera. E' sufficiente mostrare che esistono due costanti $c > 0, n_0 \geq 0$ tale che $2^{f(n)} \leq c2^{g(n)}$ per ogni $n \geq n_0$. Per ipotesi sappiamo che per ogni $n \geq \bar{n}$ vale: $2^{f(n)} \leq 2^{g(n)+k} = 2^k \cdot 2^{g(n)}$. Da cui segue la tesi scegliendo $n_0 = \bar{n}$ e $c = 2^k$.

Esercizio 3
Siano $f(n), g(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ due funzioni. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

(a) Se $f(n) = o(g(n))$, allora $g(n) - f(n) = \Omega(g(n))$.

(b) Se $f(n) = o(g(n))$, allora $g(n) - f(n) = \Theta(g(n))$.

Soluzione

(b) Vera. Infatti, per definizione di $f(n) = o(g(n))$, si ha che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0,$$

da cui segue che:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{g(n) - f(n)}{g(n)} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{f(n)}{g(n)}\right) = 1,$$

per cui $g(n) - f(n) = \Theta(g(n))$.

(a) Vera. Segue banalmente dal fatto che vale la proprietà (b).