

Algoritmi e Strutture Dati

Capitolo 13
Cammini minimi:
algoritmo di Dijkstra

Cammini minimi in grafi:
cammini minimi a singola sorgente
(senza pesi negativi)

Cammini minimi in grafi pesati

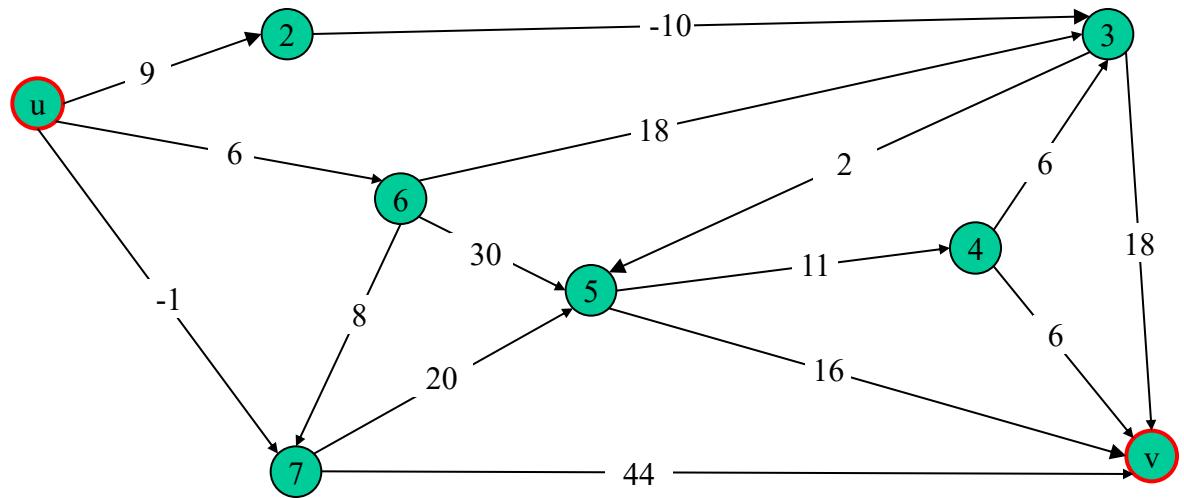
Sia $G=(V,E,w)$ un grafo orientato o non orientato con pesi w reali sugli archi. Il **costo** o **lunghezza** di un cammino $\pi = \langle v_0, v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ è:

$$w(\pi) = \sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_i)$$

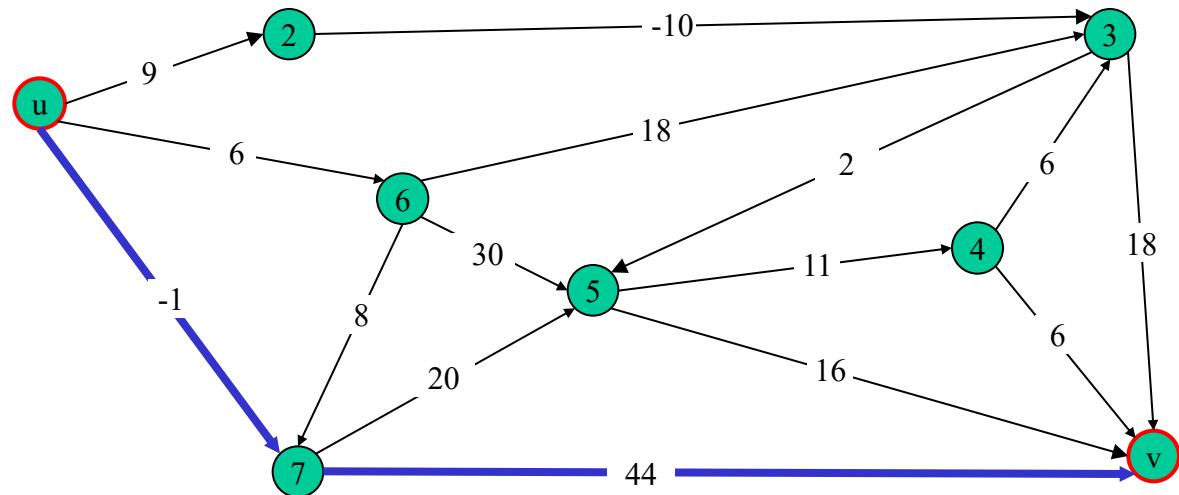
Un **cammino minimo** tra una coppia di vertici x e y è un cammino avente **costo minore o uguale** a quello di ogni altro cammino tra gli stessi vertici.

NOTA: Il cammino minimo non è necessariamente unico.

Esempio: cammino minimo su un grafo pesato

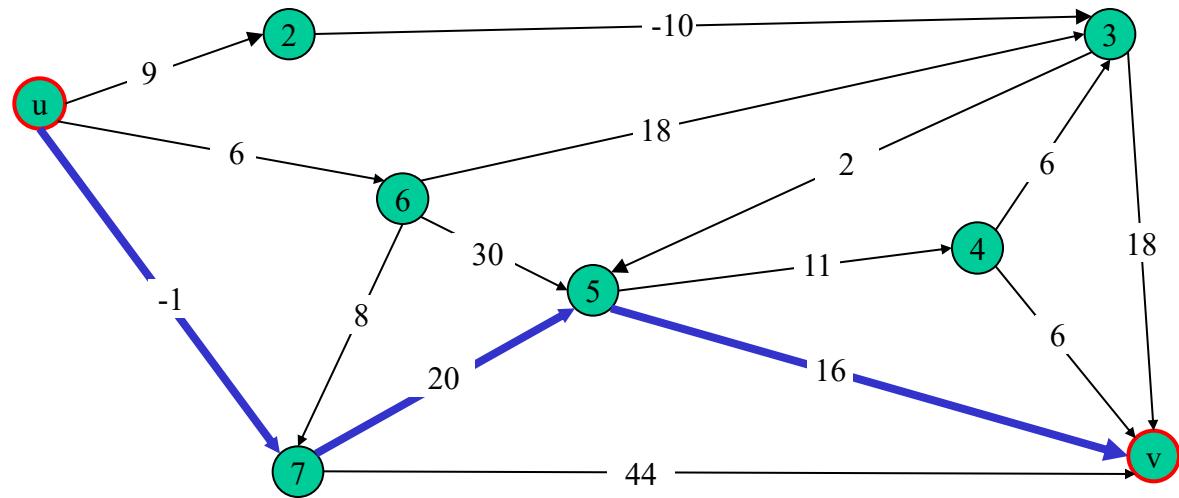


Esempio: cammino minimo su un grafo pesato



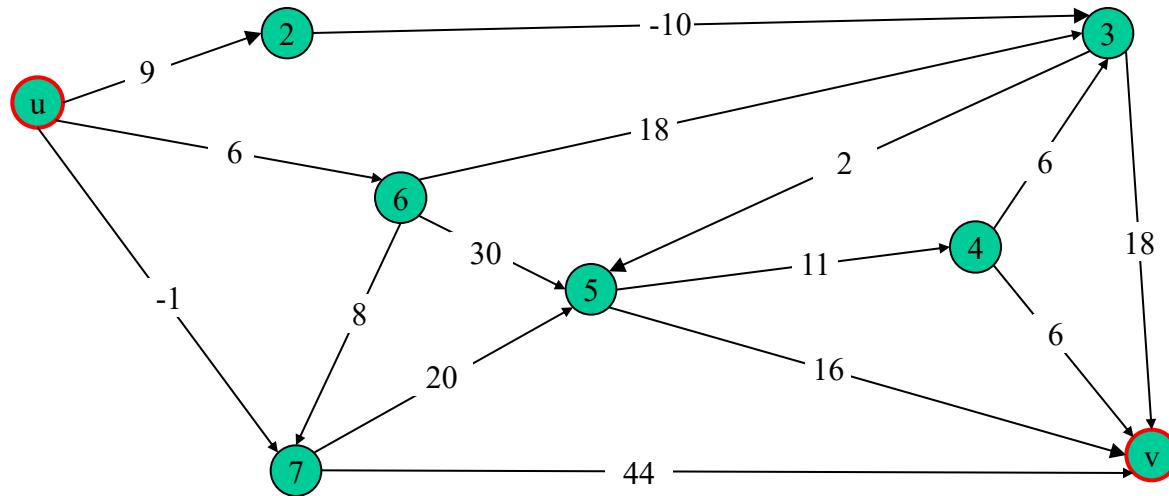
cammino di
lunghezza
43

Esempio: cammino minimo su un grafo pesato



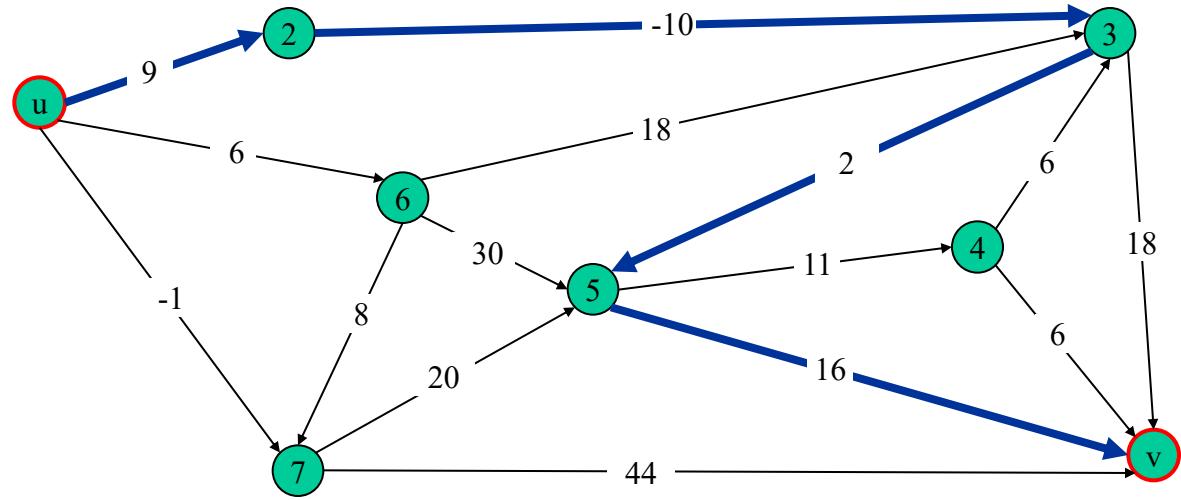
cammino di
lunghezza
35

Esempio: cammino minimo su un grafo pesato



la **distanza** $d_G(u,v)$ da **u** a **v** in **G** è il costo di un qualsiasi **cammino minimo** da **u** a **v**.

Esempio: cammino minimo su un grafo pesato

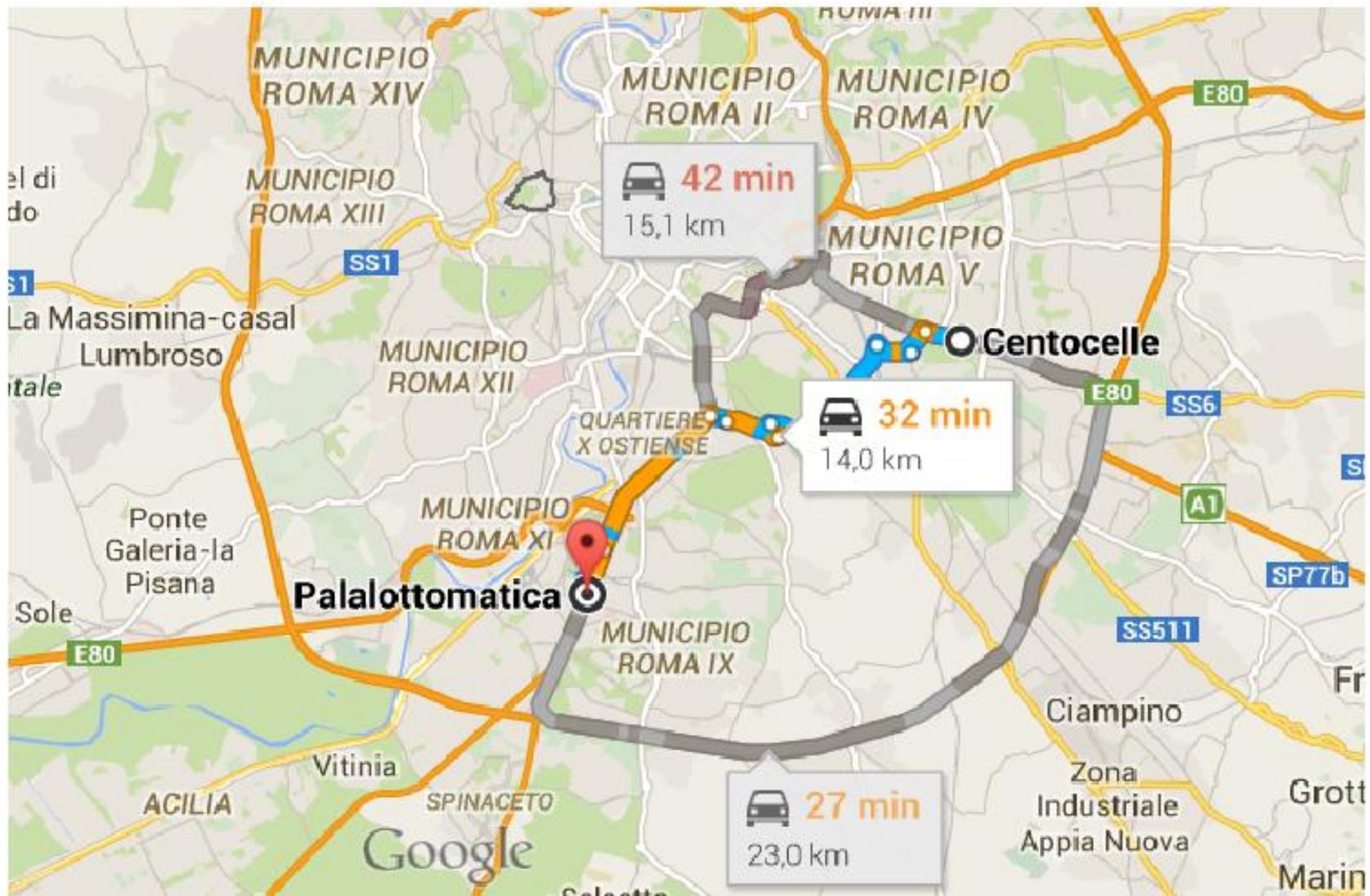


la **distanza** $d_G(u,v)$ da **u** a **v** in **G** è il costo di un qualsiasi **cammino minimo** da **u** a **v**.

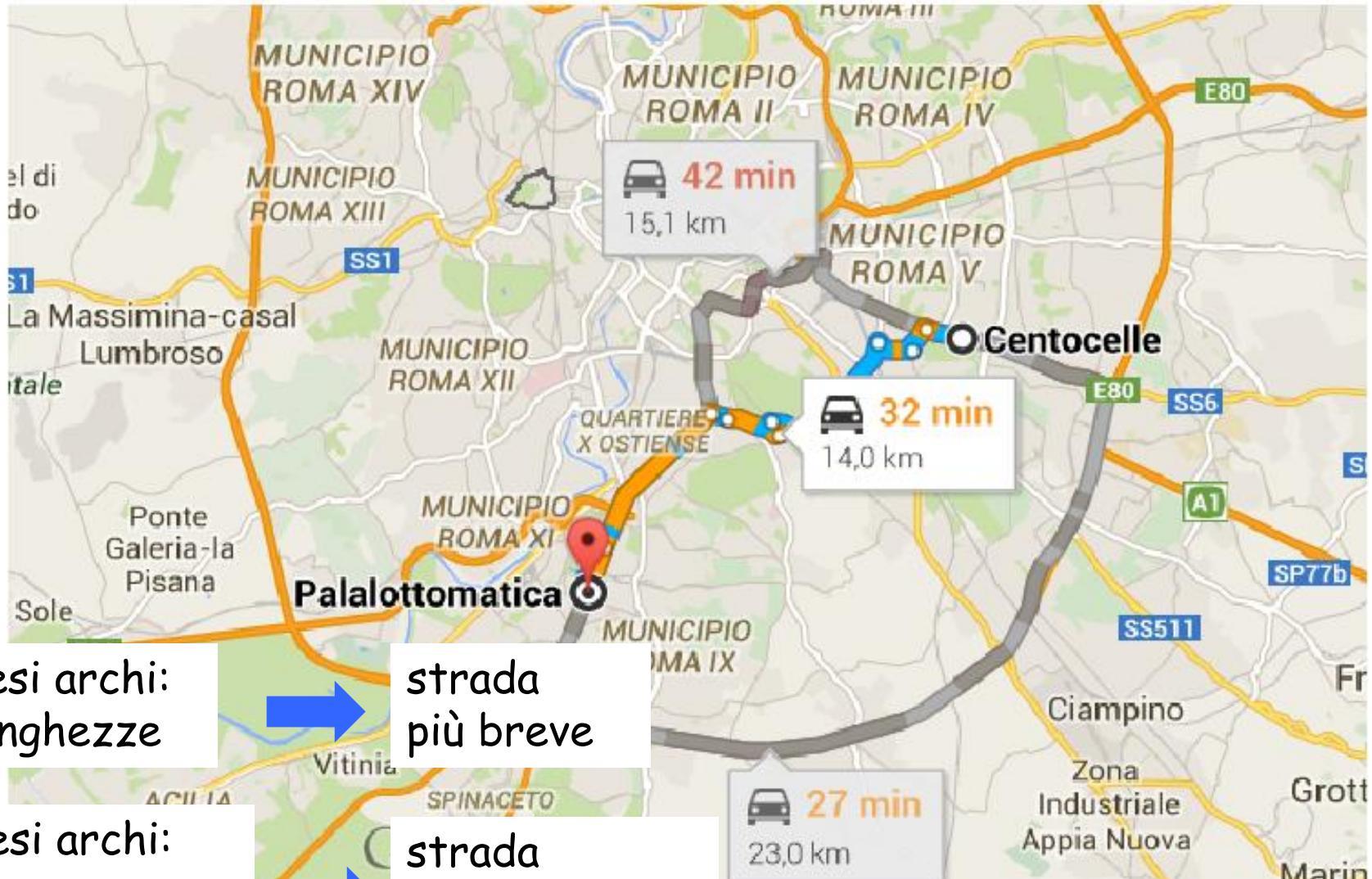
$$d_G(u,v)=17$$

Problema: dati **u** e **v**, trovare un cammino minimo (e/o **distanza**) da **u** a **v**

problema:
trovare il cammino minimo fra due nodi



problema:
trovare il cammino minimo fra due nodi



pesi archi:
lunghezze

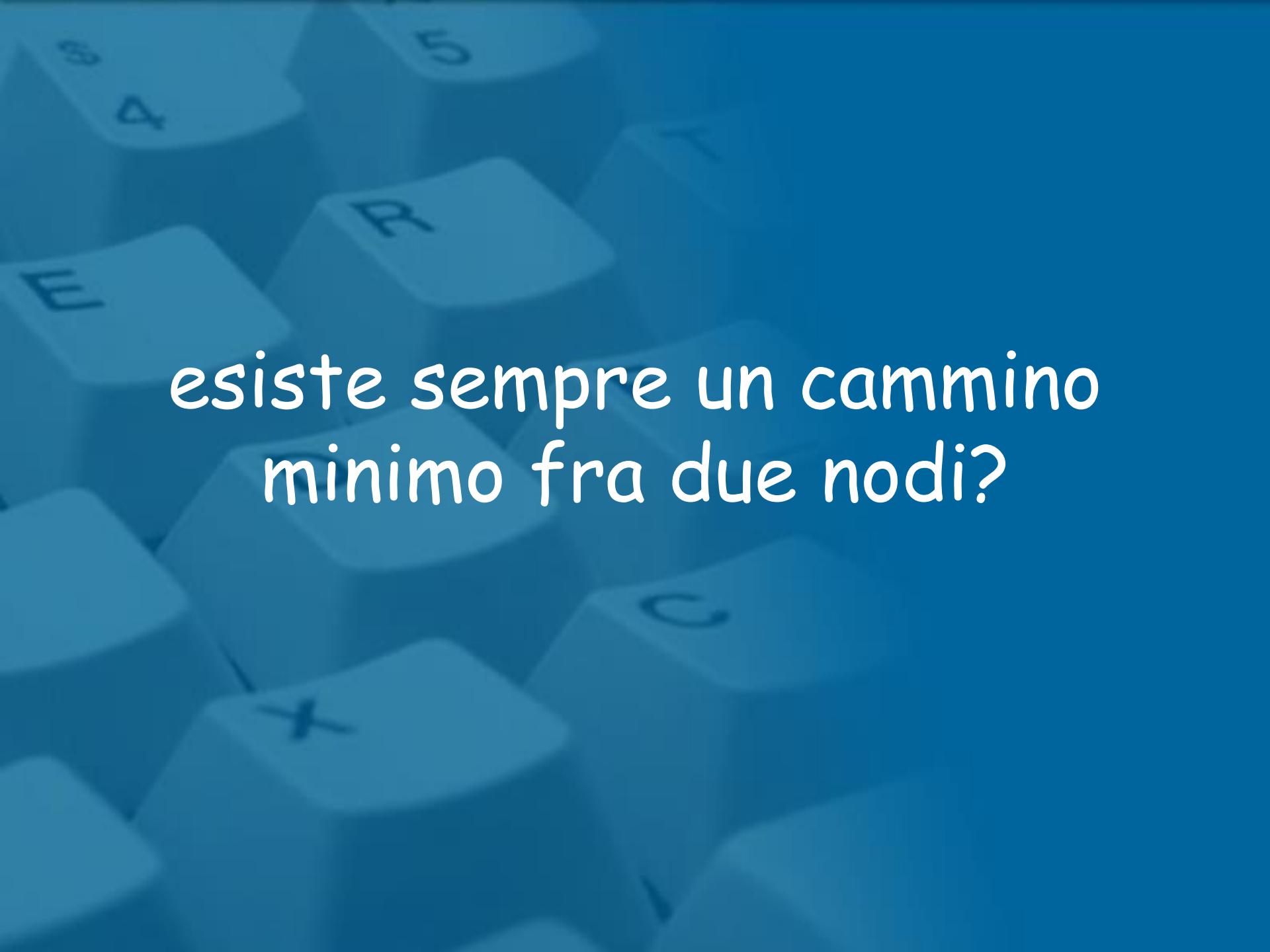


strada
più breve

pesi archi:
tempo
percorrenza



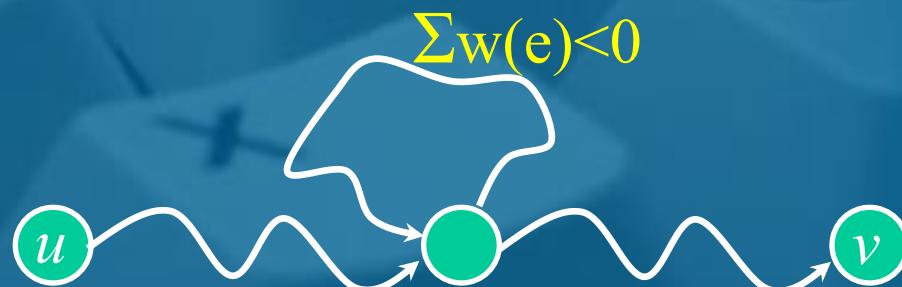
strada
più veloce



esiste sempre un cammino
minimo fra due nodi?

...no!

- se non esiste nessun cammino da u a v
 - $d(u,v)=+\infty$
- se c'è un cammino che contiene un **ciclo** (raggiungibile) il cui **costo** è **negativo**
 - $d(u,v)=-\infty$



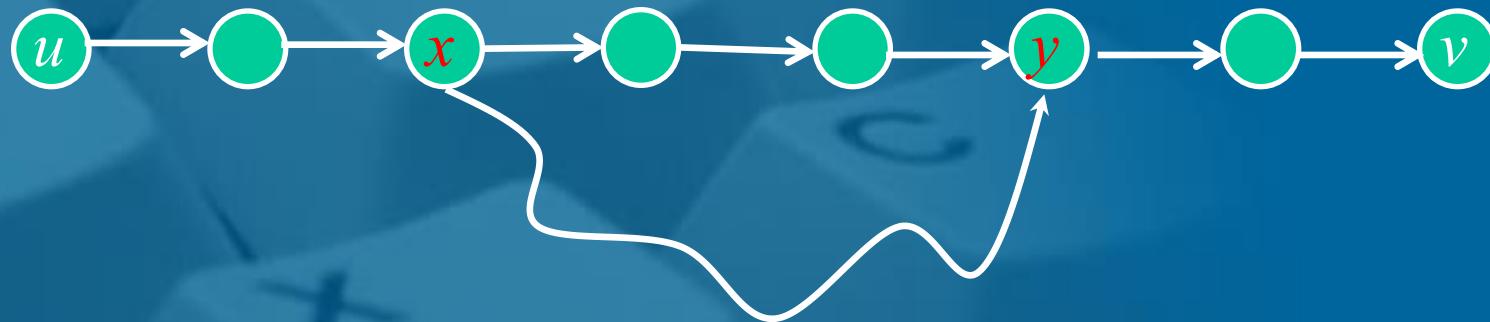
Oss: se G non contiene cicli negativi, esistono cammini minimi che sono cammini **semplici**

non contiene
nodi ripetuti

sottostruttura ottima

Ogni **sottocammino** di un cammino minimo è un cammino minimo.

dim: tecnica **cut&paste**



ipotetico cammino
più corto da x a y

allora il cammino
da u a v non era minimo!

diseguaglianza triangolare

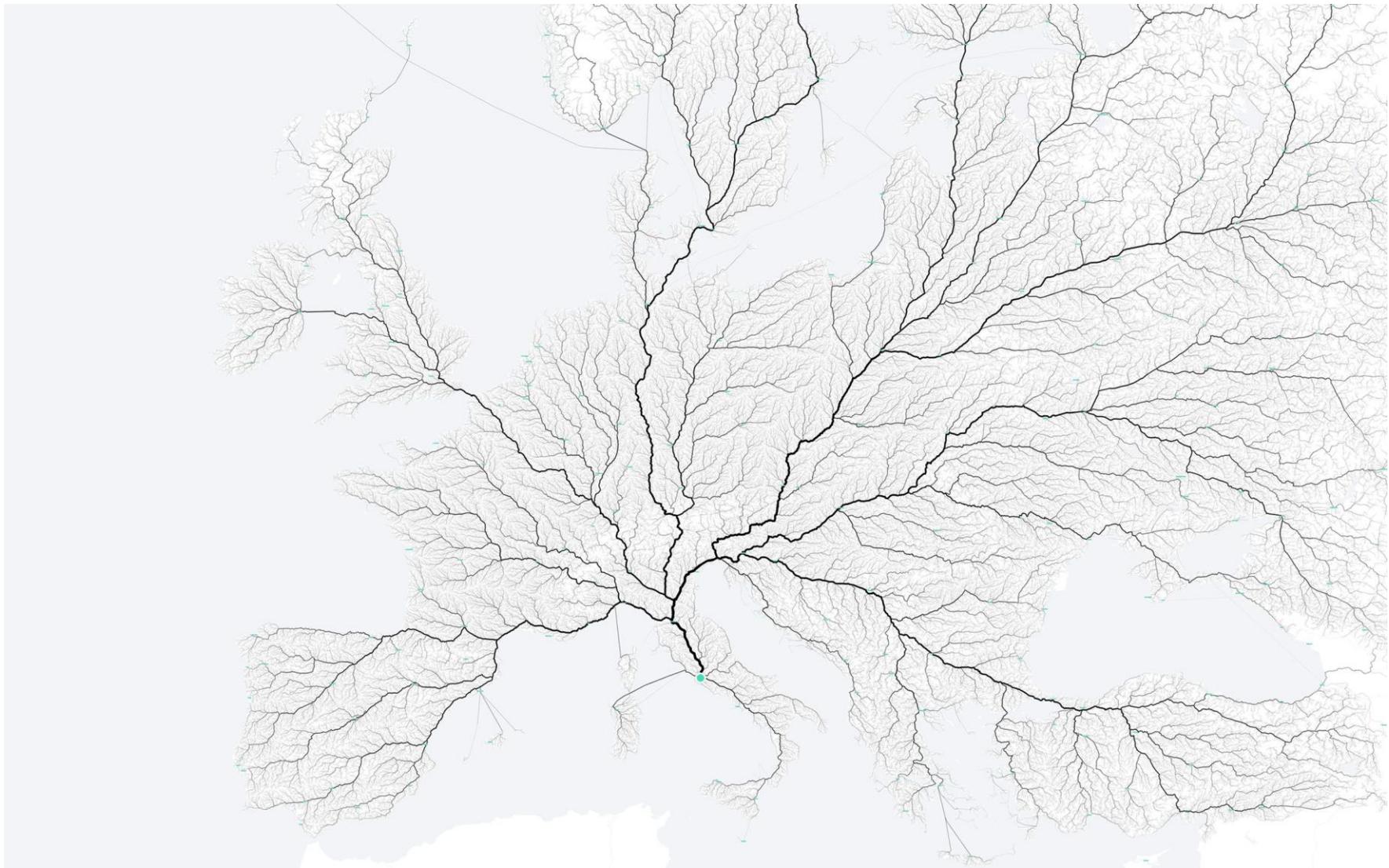
per ogni $u, v, x \in V$, vale:

$$d(u,v) \leq d(u,x) + d(x,v)$$



il cammino da u a v che passa per x è un cammino nel grafo
e quindi il suo costo è almeno il costo
del cammino minimo da u a v

Cammini minimi a singola sorgente



Problema del calcolo dei cammini minimi a singola sorgente

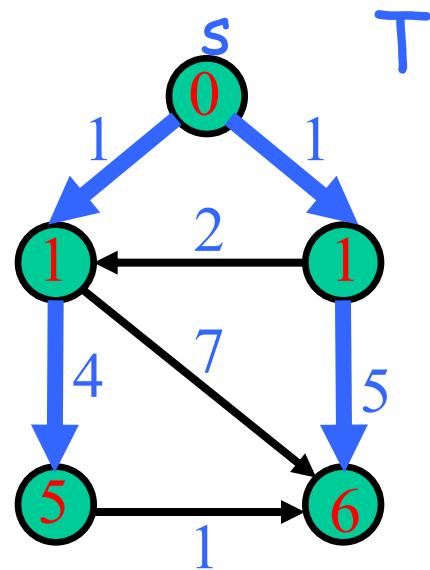
Due varianti:

- Dato $G=(V,E,w)$, $s \in V$, calcola le distanze di tutti i nodi da s , ovvero, $d_G(s,v)$ per ogni $v \in V$
- Dato $G=(V,E,w)$, $s \in V$, calcola l'*albero dei cammini minimi* di G radicato in s

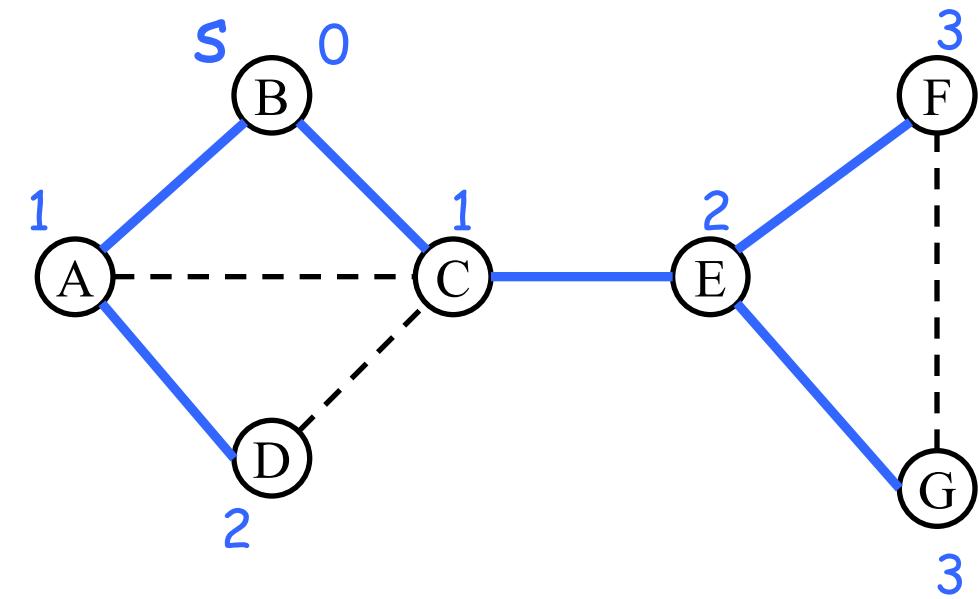
Albero dei cammini minimi (o Shortest Path Tree - SPT)

T è un albero dei cammini minimi con sorgente s di un grafo $G=(V,E,w)$ se:

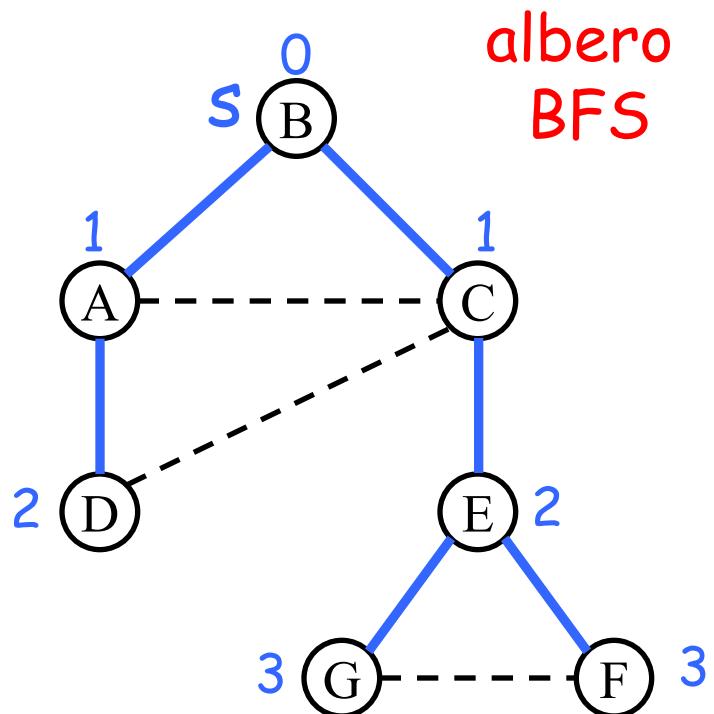
- T è un albero radicato in s
- per ogni $v \in V$, vale:
 $d_T(s,v) = d_G(s,v)$



Albero dei cammini minimi (o Shortest Path Tree - SPT)



per grafi non pesati:
SPT radicato in s
=
Albero BFS radicato in s



Esercizio

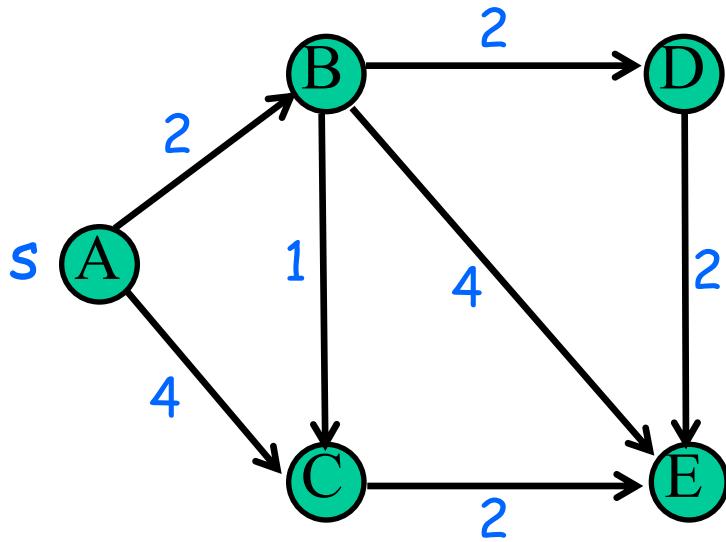
1. Progettare un algoritmo che, dato un grafo diretto e pesato $G=(V,E,w)$ e un suo albero dei cammini minimi radicato in un nodo s , calcola in tempo lineare (nella dimensione del grafo) le distanze di ogni nodo da s .
2. Progettare un algoritmo che, dato un grafo diretto e pesato $G=(V,E,w)$ e le distanze di ogni nodo da un nodo s , calcola in tempo lineare (nella dimensione del grafo) un albero dei cammini minimi di G radicato in s .

Osservazione: le due varianti del problema sono essenzialmente equivalenti

Algoritmo di Dijkstra

Assunzione: tutti gli archi hanno peso non negativo, ovvero ogni arco (u,v) del grafo ha peso $w(u,v) \geq 0$

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

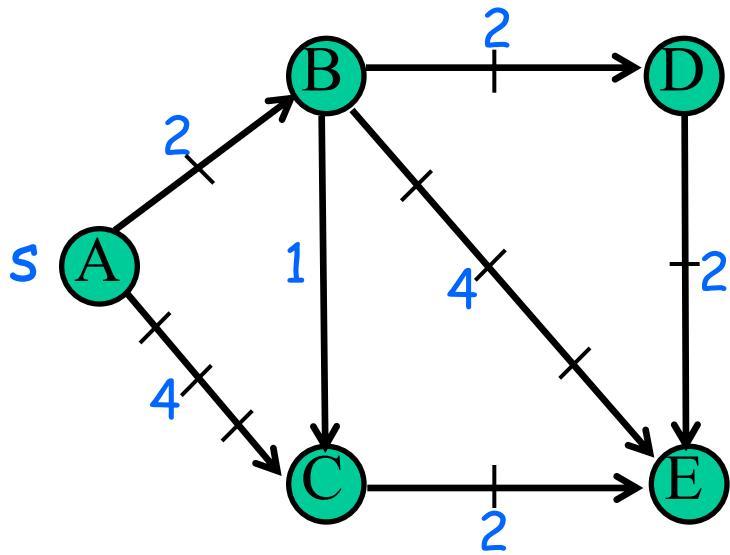


archi come tubi

peso degli archi
come lunghezza

acqua scorre a
velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

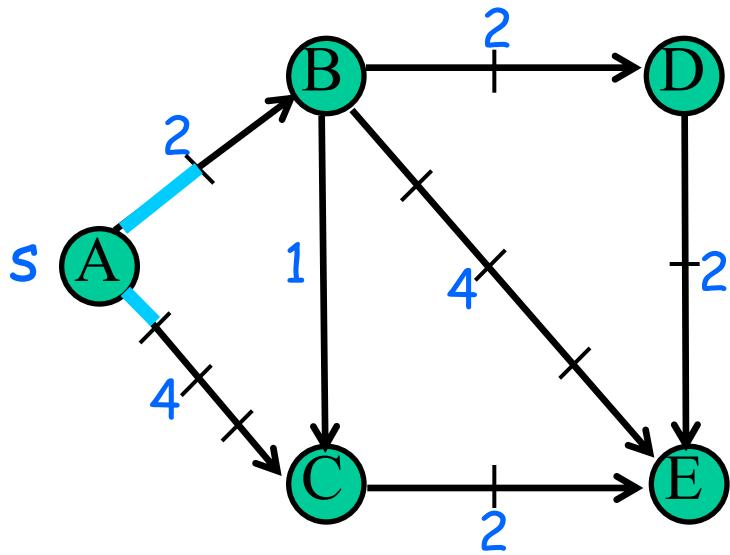


archi come tubi

peso degli archi
come lunghezza

acqua scorre a
velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

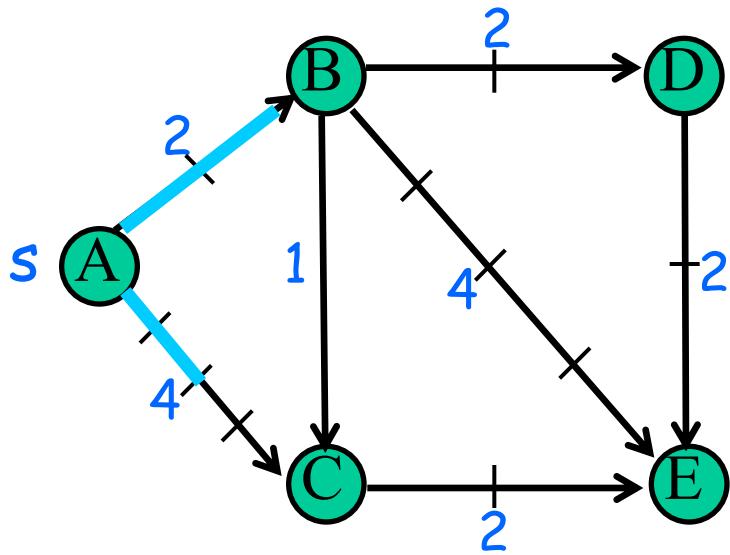


archi come tubi

peso degli archi
come lunghezza

acqua scorre a
velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

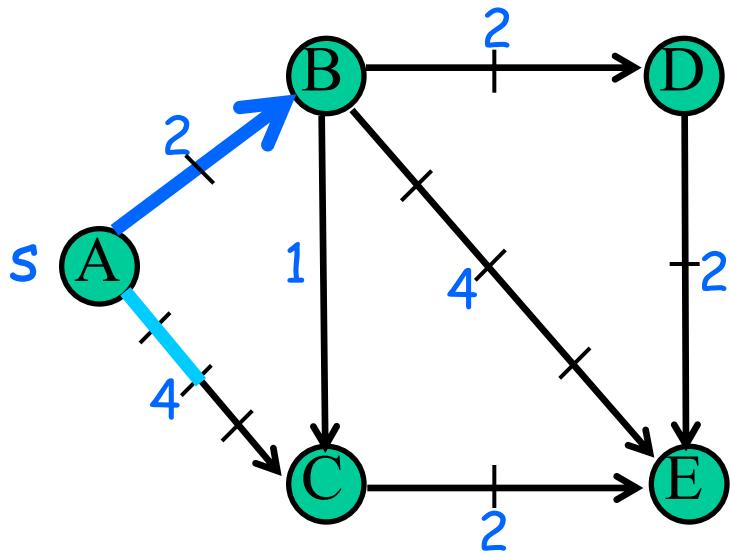


archi come tubi

peso degli archi
come lunghezza

acqua scorre a
velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

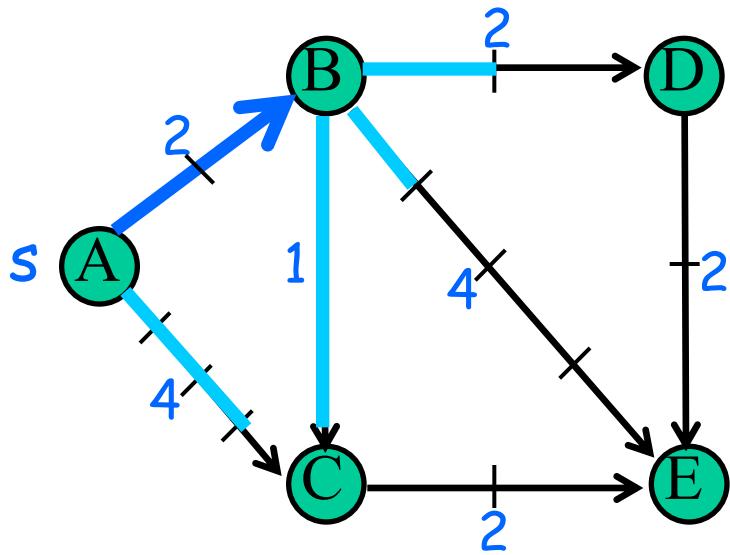


archi come tubi

peso degli archi
come lunghezza

acqua scorre a
velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

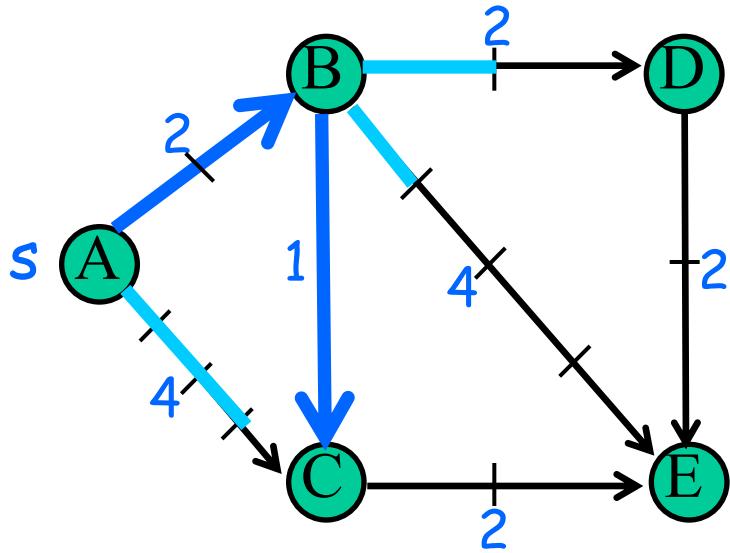


archi come tubi

peso degli archi
come lunghezza

acqua scorre a
velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

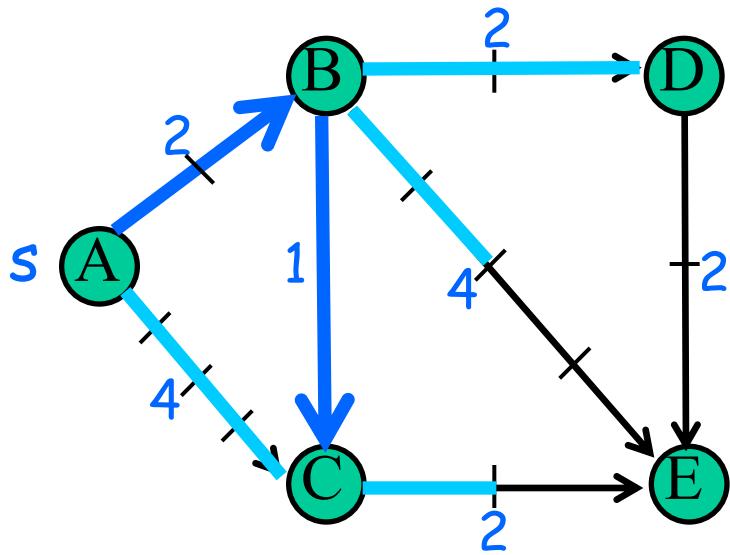


archi come tubi

peso degli archi
come lunghezza

acqua scorre a
velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

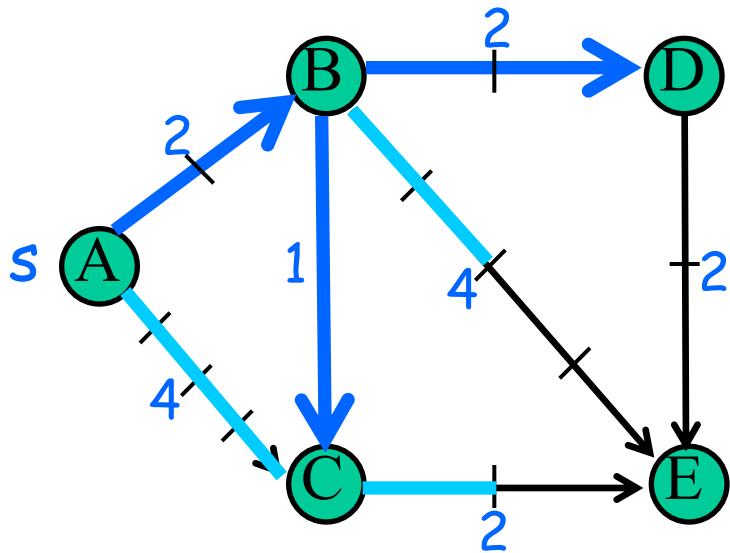


archi come tubi

peso degli archi
come lunghezza

acqua scorre a
velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

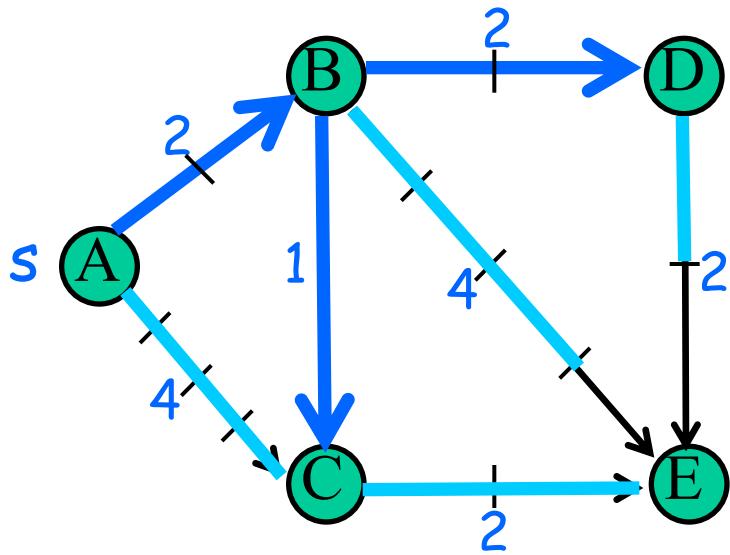


archi come tubi

peso degli archi
come lunghezza

acqua scorre a
velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

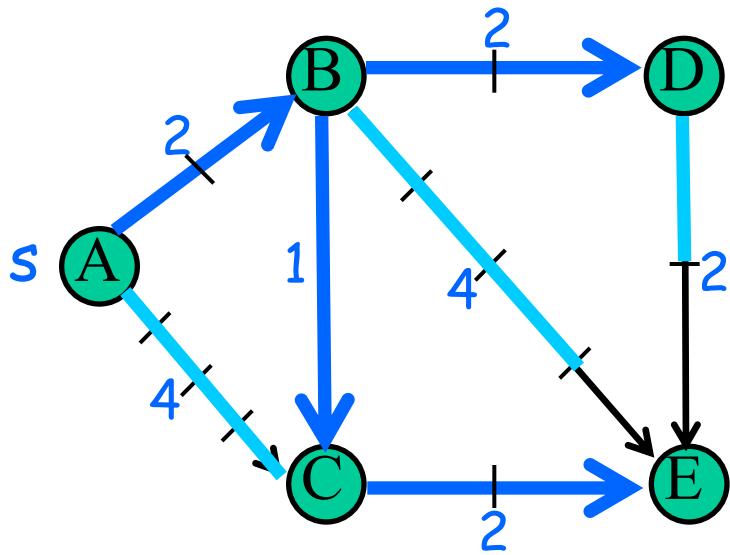


archi come tubi

peso degli archi
come lunghezza

acqua scorre a
velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

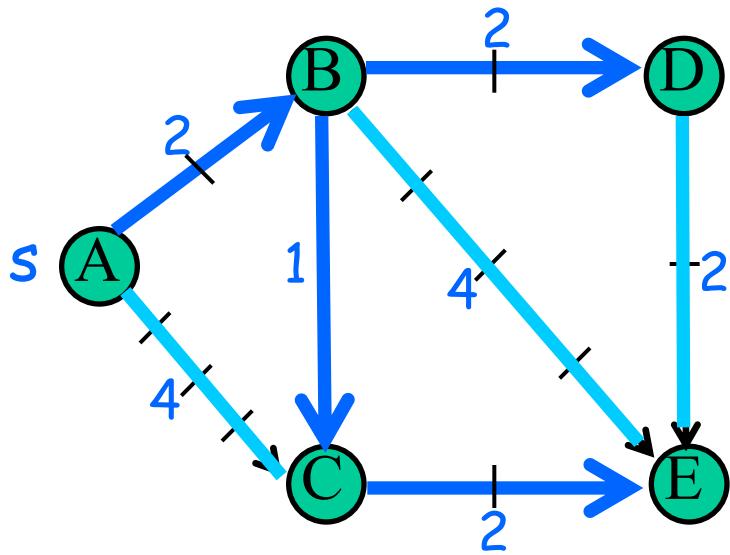


archi come tubi

peso degli archi
come lunghezza

acqua scorre a
velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

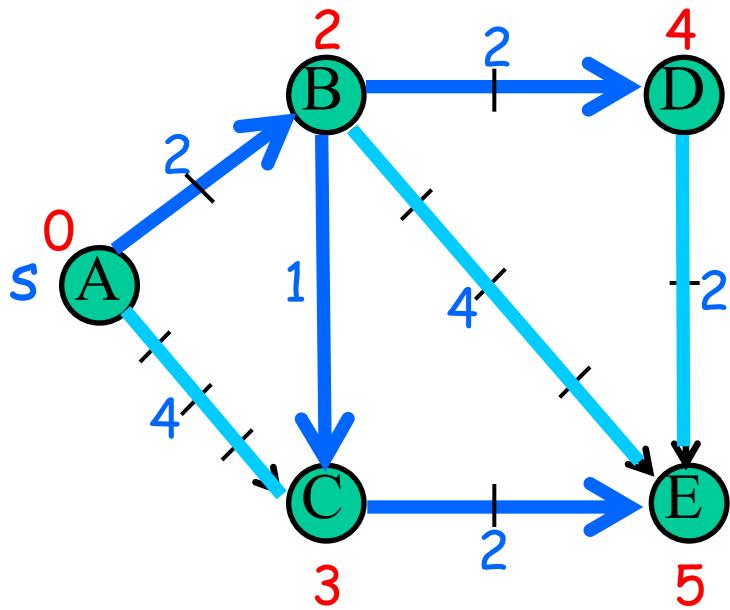


archi come tubi

peso degli archi
come lunghezza

acqua scorre a
velocità costante

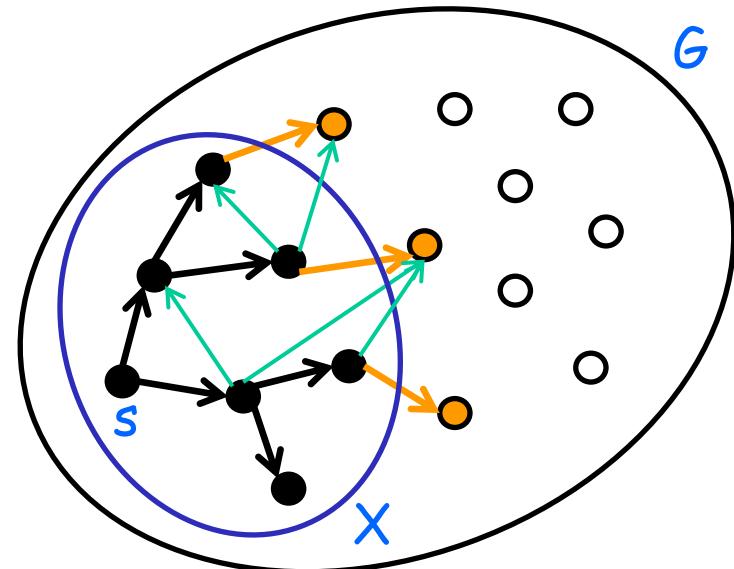
Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente



archi come tubi
peso degli archi
come lunghezza
acqua scorre a
velocità costante

Verso l'algoritmo: approccio greedy (goloso)

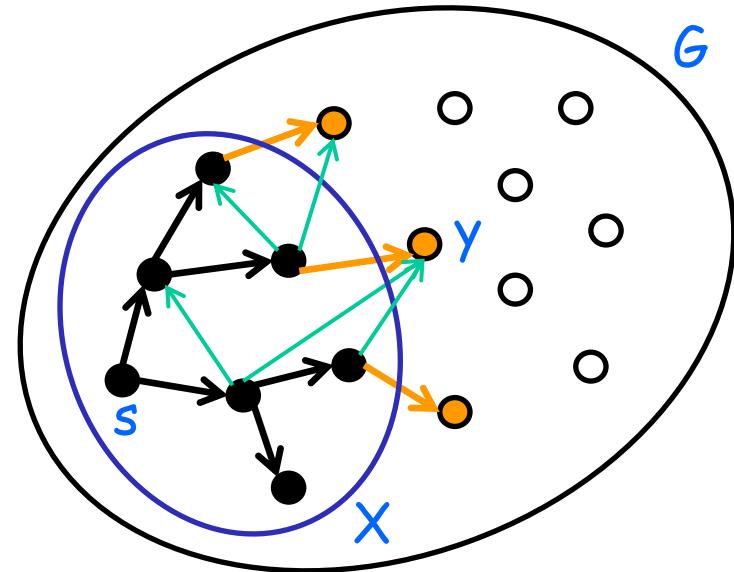
1. mantiene per ogni nodo v una **stima** (per eccesso) D_{sv} alla distanza $d(s,v)$. Inizialmente, unica stima finita $D_{ss}=0$.
2. mantiene un insieme X di nodi per cui le stime sono **esatte**; e anche un albero T dei cammini minimi verso nodi in X (albero nero). Inizialmente $X=\{s\}$, T non ha archi.
3. ad ogni passo aggiunge a X il nodo u in $V-X$ la cui stima è minima; aggiunge a T uno specifico arco (arancione) entrante in u
4. aggiorna le stime guardando i nodi adiacenti a u



I nodi da aggiungere progressivamente a X (e quindi a T) sono mantenuti in una **coda di priorità**, associati ad un **unico arco (arco arancione)** che li connette a T.

la stima per un nodo $y \in V-X$ è:
 $D_{sy} = \min \{ D_{sx} + w(x,y) : (x,y) \in E, x \in X \}$.
L'arco che fornisce il minimo è l'arco arancione.

Se y è in coda con arco (x,y) associato, e se dopo aver aggiunto u a T troviamo un arco (u,y) tale che
 $D_{su} + w(u,y) < D_{sx} + w(x,y)$, allora rimpiazziamo (x,y) con (u,y) , ed aggiorniamo D_{sy}

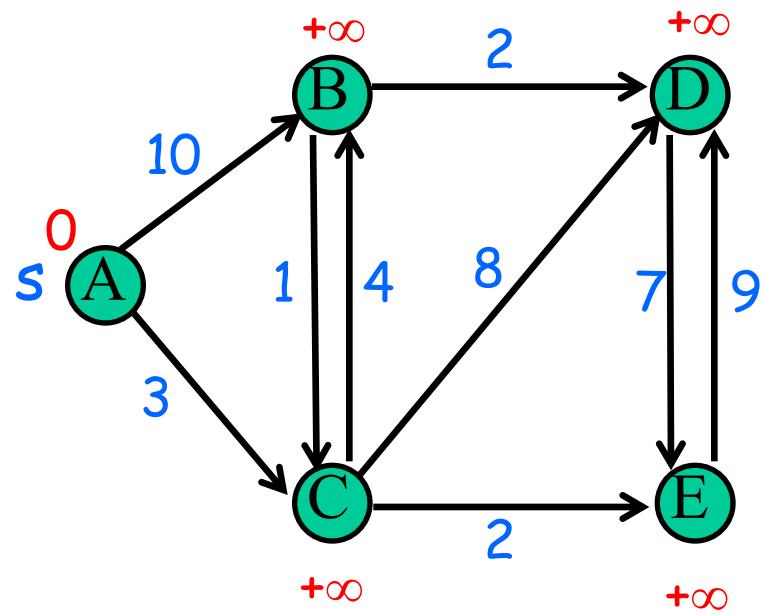


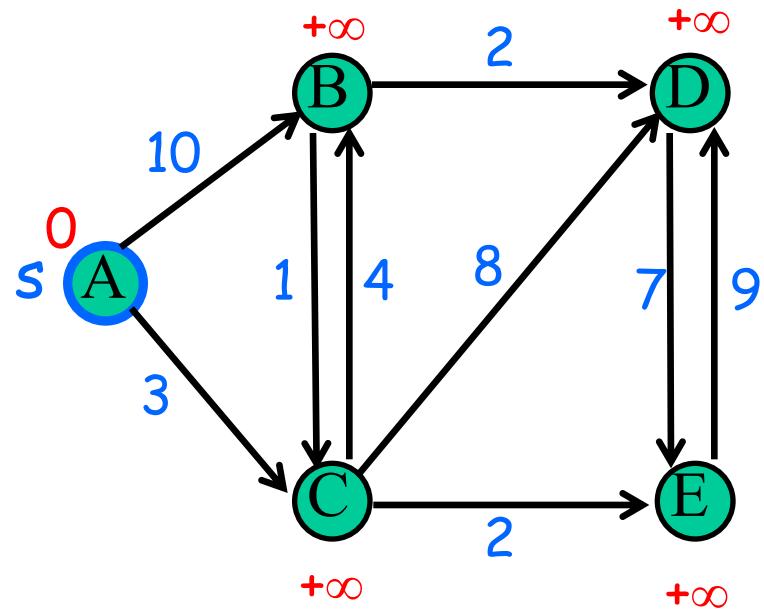
- nodi per i quali non è stato "scoperto" nessun cammino; $\text{stima} = +\infty$
- nodi "scoperti"; hanno $\text{stima} < +\infty$ sono mantenuti in una coda con priorità insieme al "miglior" arco entrante (arancione)

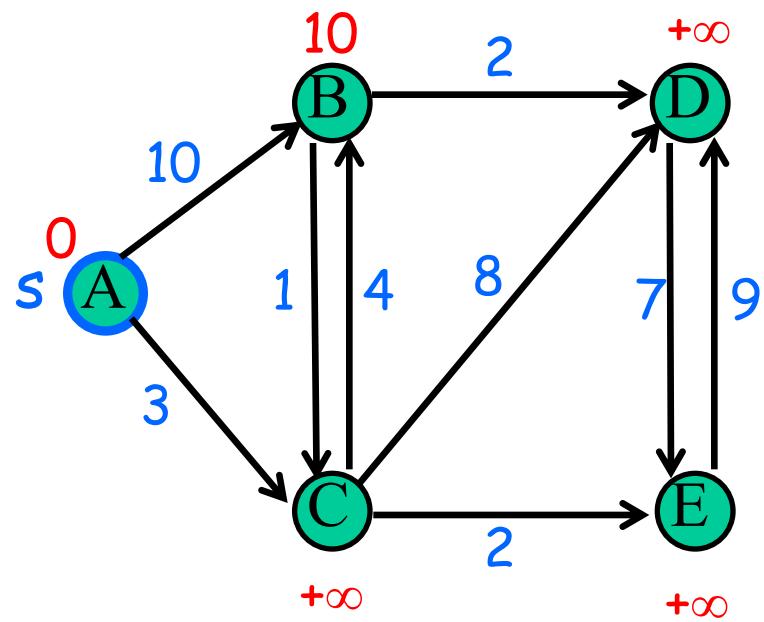
Pseudocodice

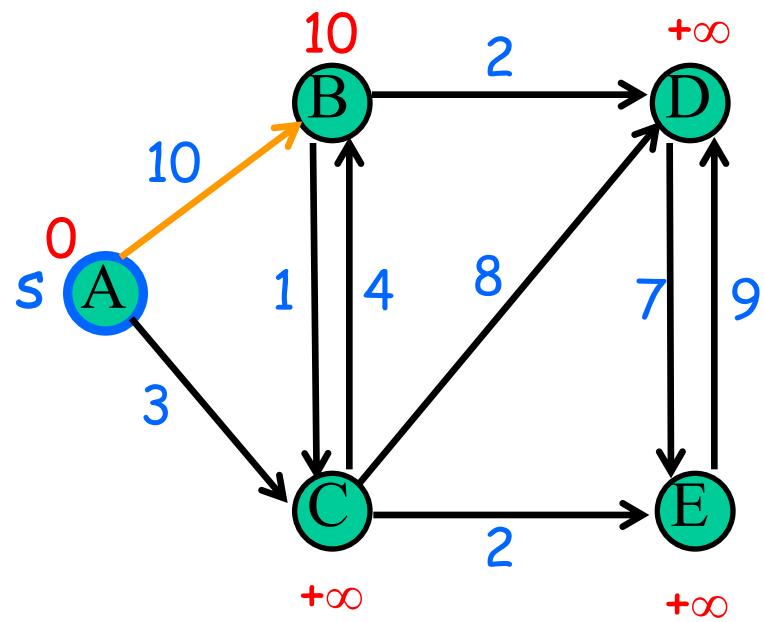
```
algoritmo Dijkstra(grafo G, vertice s)  $\rightarrow$  albero
  for each ( vertice  $u$  in  $G$  ) do  $D_{su} \leftarrow +\infty$ 
   $\hat{T} \leftarrow$  albero formato dal solo nodo  $s$ ;  $X \leftarrow \emptyset$ 
  CodaPriorita  $S$ 
   $D_{ss} \leftarrow 0$ 
   $S.\text{insert}(s, 0)$ 
  while ( not  $S.\text{isEmpty}()$  ) do
     $u \leftarrow S.\text{deleteMin}(); X \leftarrow X \cup \{u\}$ 
    for each ( arco  $(u, v)$  in  $G$  ) do
      if ( $D_{sv} = +\infty$ ) then
         $S.\text{insert}(v, D_{su} + w(u, v))$ 
         $D_{sv} \leftarrow D_{su} + w(u, v)$ 
        rendi  $u$  padre di  $v$  in  $\hat{T}$ 
      else if ( $D_{su} + w(u, v) < D_{sv}$ ) then
         $S.\text{decreaseKey}(v, D_{sv} - D_{su} - w(u, v))$ 
         $D_{sv} \leftarrow D_{su} + w(u, v)$ 
        rendi  $u$  nuovo padre di  $v$  in  $\hat{T}$ 
  return  $\hat{T}$ 
```

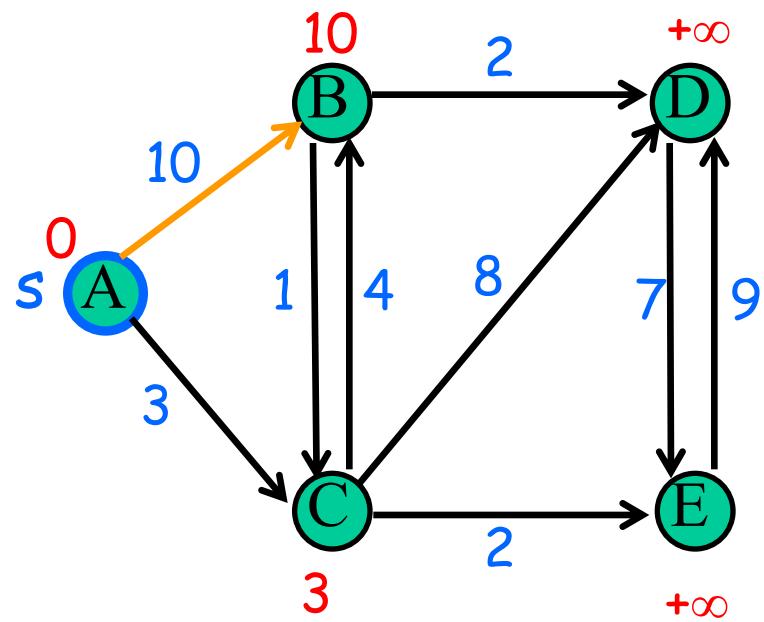
Nota: \hat{T} è un albero che contiene tutti i nodi in X più i nodi correntemente contenuti nella coda di priorità (nodi arancioni); è composto cioè dagli archi di T (albero dei cammini minimi ristretto ai nodi in X) più gli archi arancioni (potenziali archi da aggiungere a T)

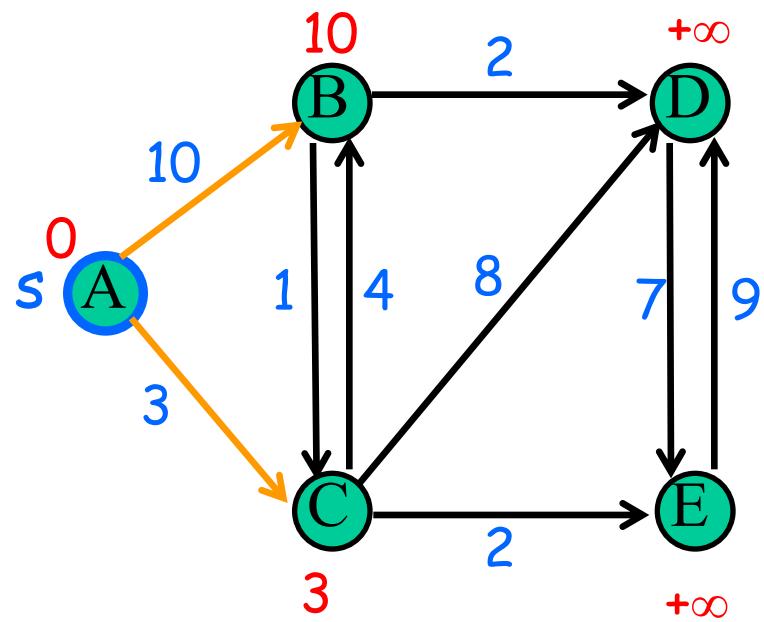


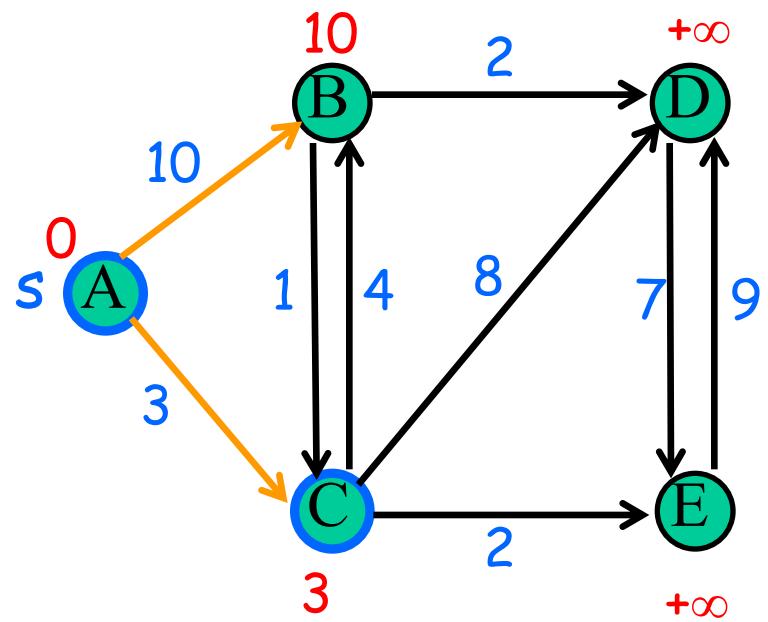


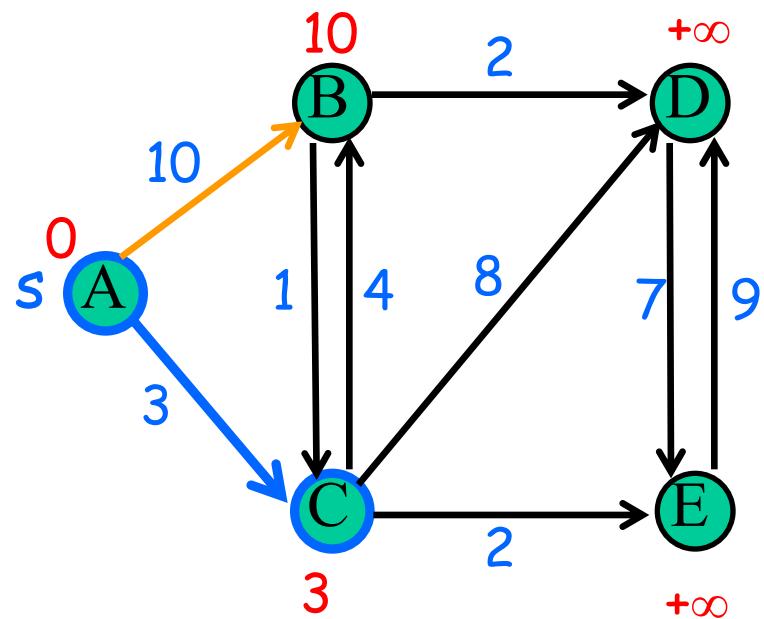


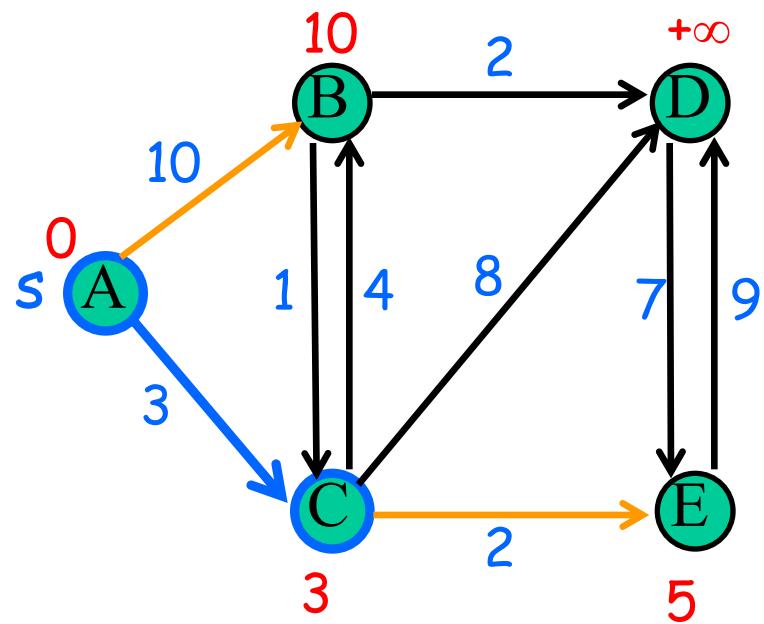


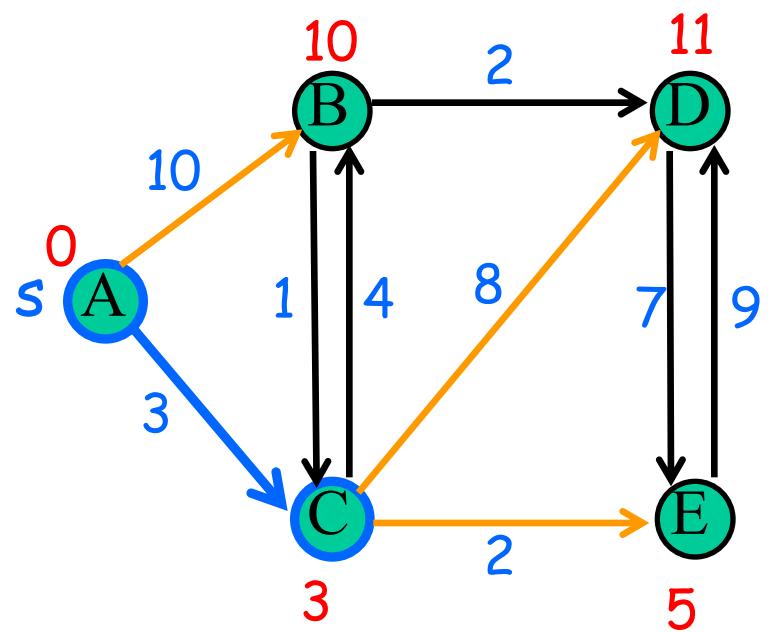


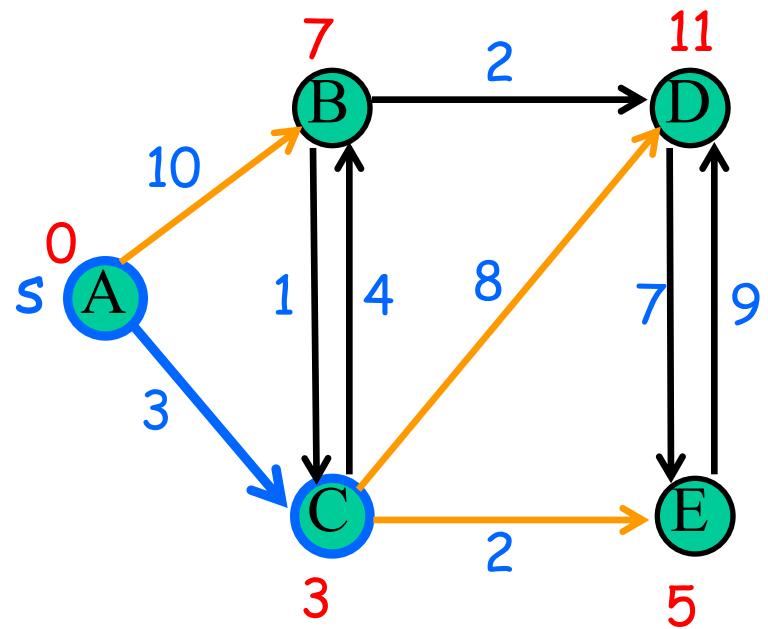


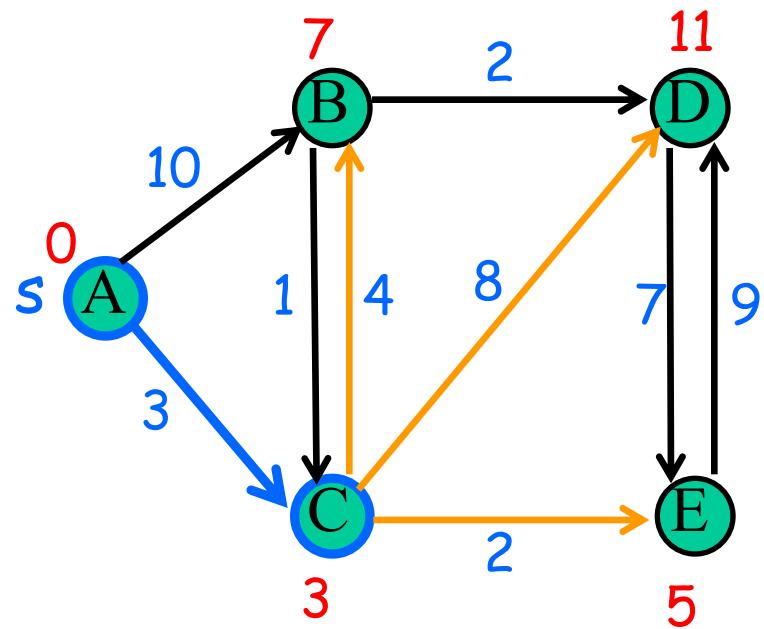


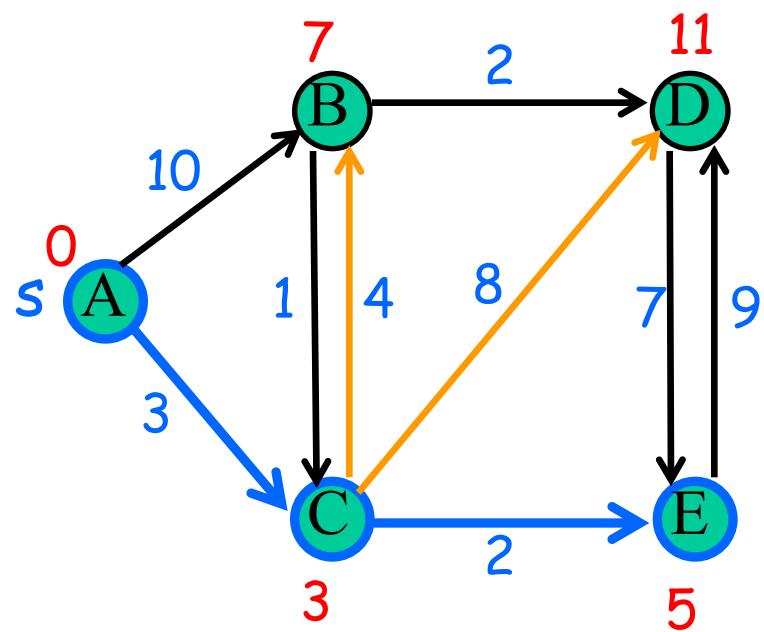


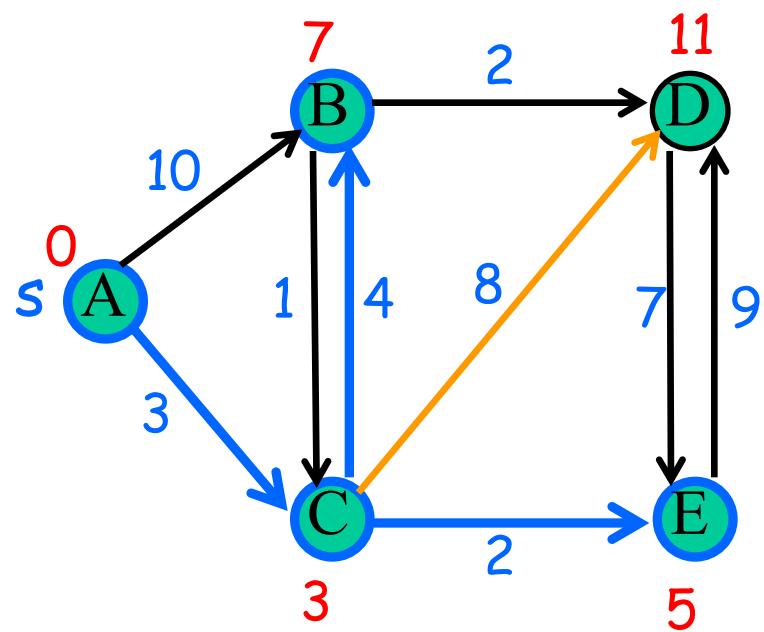


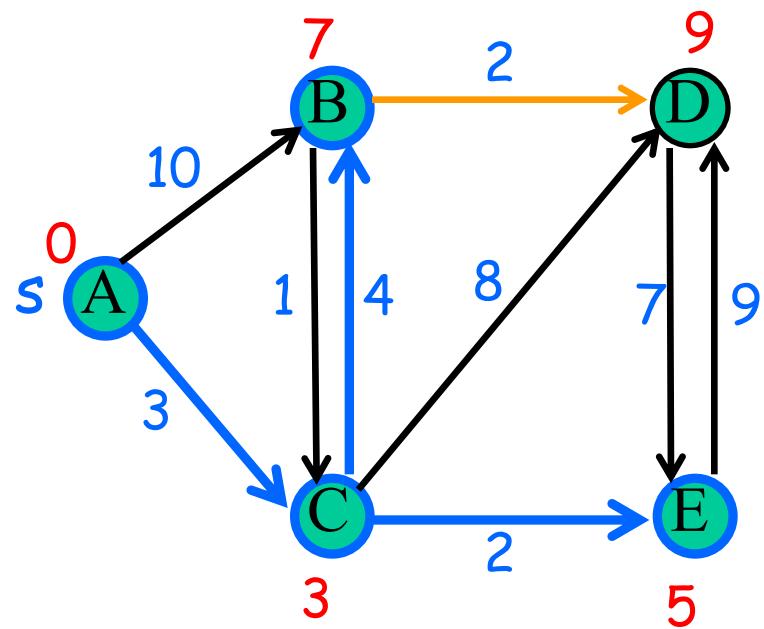


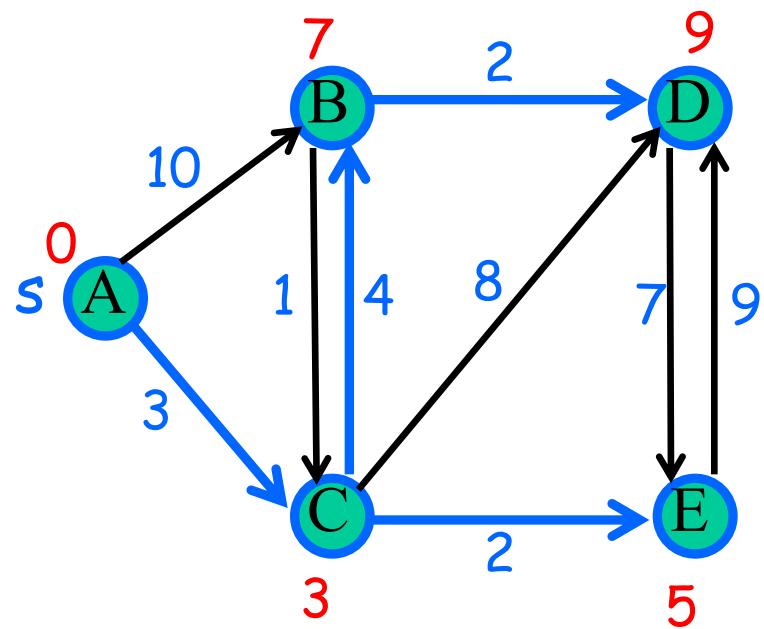


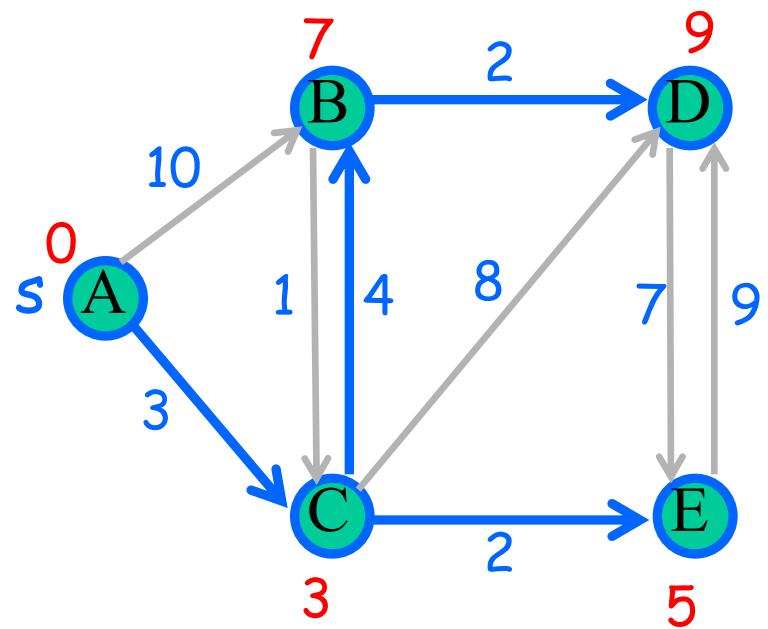














correttezza

Lemma

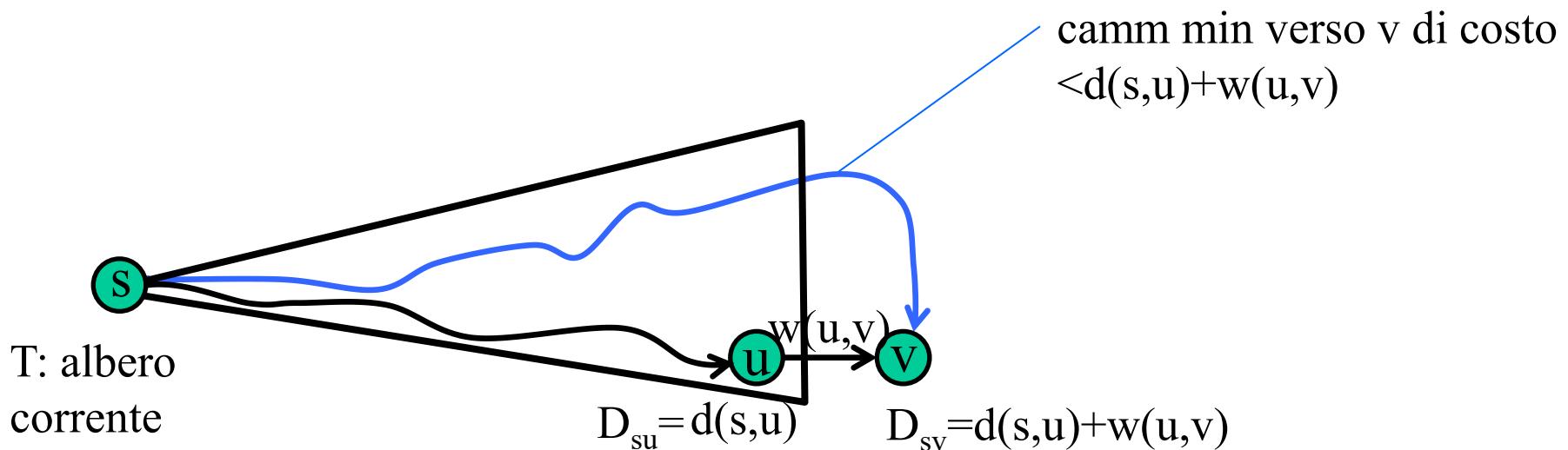
Quando il nodo v viene estratto dalla coda con priorità vale:

- $D_{sv} = d(s, v)$ (stima esatta)
- il cammino da s a v nell'albero corrente ha costo $d(s, v)$ (camm. min in G)

dim (per assurdo)

Sia v il primo nodo per cui l'alg sbaglia

sia (u, v) l'arco aggiunto all'albero corrente (arco arancione)



Lemma

Quando il nodo v viene estratto dalla coda con priorità vale:

- $D_{sv} = d(s, v)$ (stima esatta)
- il cammino da s a v nell'albero corrente ha costo $d(s, v)$ (camm. min in G)

dim (per assurdo)

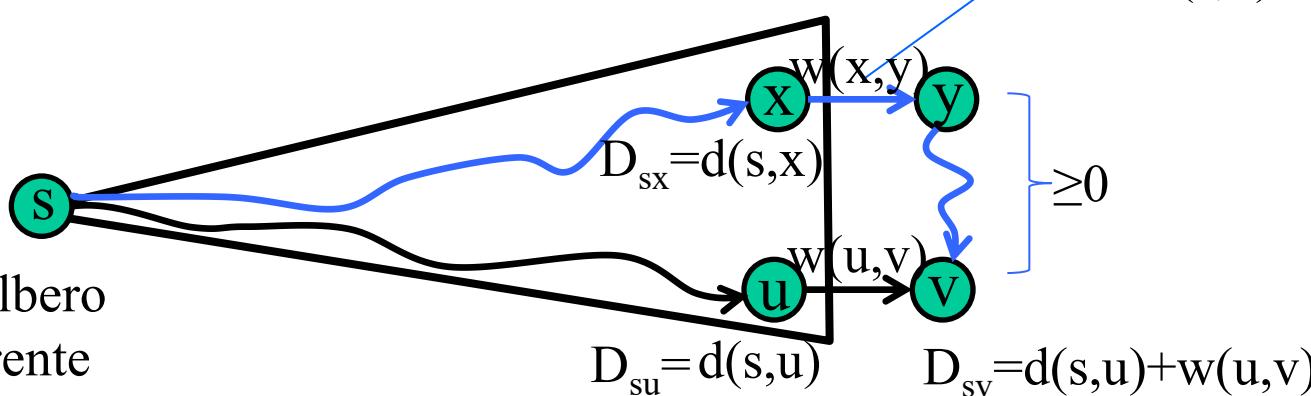
Sia v il primo nodo per cui l'alg sbaglia

sia (u, v) l'arco aggiunto all'albero corrente (arco arancione)

(x, y) : primo arco del cammino t.c $x \in T$ e $y \notin T$

camm min verso v di costo
 $< d(s, u) + w(u, v)$

T : albero
corrente



Lemma

Quando il nodo **v** viene estratto dalla coda con priorità vale:

- $D_{sv} = d(s, v)$ (stima esatta)
 - il cammino da s a v nell'albero corrente ha costo $d(s, v)$ (camm. min in G)

dim (per assurdo)

Sia v il primo nodo per cui l'alg sbaglia

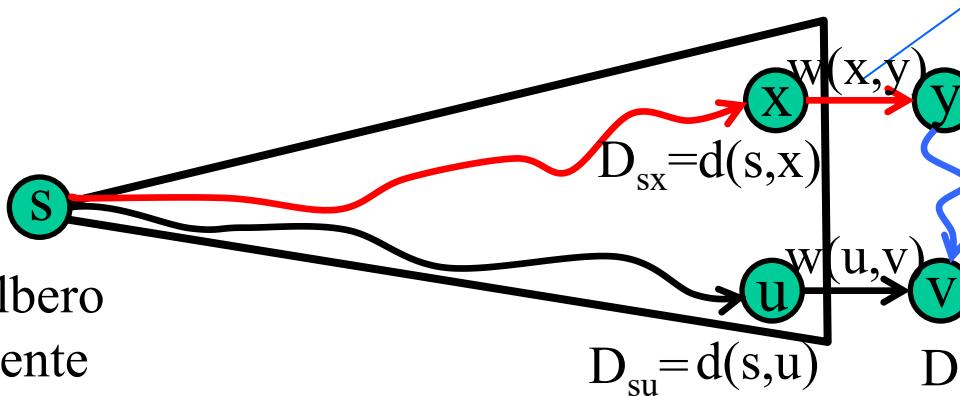
sia (u, v) l'arco aggiunto all'albero corrente (arco arancione)

(x, y) : primo arco del cammino t.c $x \in T$ e $y \notin T$

- ✓ camm min verso v di costo
 $< d(s,u) + w(u,v)$

to $d(s, x) + w(x, y)$
 $< d(s, u) + w(u, v)$

T: albero
corrente



$$D_{sy} \leq d(s,x) + w(x,y) < d(s,u) + w(u,v)$$

assurdo: l'alg avrebbe estratto y e non v

(se $y=v$, v avrebbe avuto una stima più piccola)





analisi della complessità

```

algoritmo Dijkstra(grafo  $G$ , vertice  $s$ )  $\rightarrow$  albero
  for each ( vertice  $u$  in  $G$  ) do  $D_{su} \leftarrow +\infty$ 
   $\hat{T} \leftarrow$  albero formato dal solo nodo  $s$ ;  $X \leftarrow \emptyset$ 
  CodaPriorita  $S$ 
   $D_{ss} \leftarrow 0$ 
   $S.\text{insert}(s, 0)$ 
  while ( not  $S.\text{isEmpty}()$  ) do
     $u \leftarrow S.\text{deleteMin}(); X \leftarrow X \cup \{u\}$ 
    for each ( arco  $(u, v)$  in  $G$  ) do
      if ( $D_{sv} = +\infty$ ) then
         $S.\text{insert}(v, D_{su} + w(u, v))$ 
         $D_{sv} \leftarrow D_{su} + w(u, v)$ 
        rendi  $u$  padre di  $v$  in  $\hat{T}$ 
      else if ( $D_{su} + w(u, v) < D_{sv}$ ) then
         $S.\text{decreaseKey}(v, D_{sv} - D_{su} - w(u, v))$ 
         $D_{sv} \leftarrow D_{su} + w(u, v)$ 
        rendi  $u$  nuovo padre di  $v$  in  $\hat{T}$ 
    return  $\hat{T}$ 

```

se si escludono le operazioni sulla coda con priorità:

tempo
 $O(m+n)$

quanto costano le operazioni sulla coda con priorità?

Tempo di esecuzione: implementazioni elementari

Supponendo che il grafo G sia rappresentato tramite liste di adiacenza, e supponendo che tutti i nodi siano connessi ad s , avremo n insert, n deleteMin e al più m decreaseKey nella coda di priorità, al costo di:

	Insert	DelMin	DecKey
Array non ord.	$O(1)$	$O(n)$	$O(1)$
Array ordinato	$O(n)$	$O(1)$	$O(n)$
Lista non ord.	$O(1)$	$O(n)$	$O(1)$
Lista ordinata	$O(n)$	$O(1)$	$O(n)$

- 
- $n \cdot O(1) + n \cdot O(n) + O(m) \cdot O(1) = O(n^2)$ con array non ordinati
 - $n \cdot O(n) + n \cdot O(1) + O(m) \cdot O(n) = O(m \cdot n)$ con array ordinati
 - $n \cdot O(1) + n \cdot O(n) + O(m) \cdot O(1) = O(n^2)$ con liste non ordinate
 - $n \cdot O(n) + n \cdot O(1) + O(m) \cdot O(n) = O(m \cdot n)$ con liste ordinate

Tempo di esecuzione: implementazioni efficienti

Supponendo che il grafo G sia rappresentato tramite liste di adiacenza, e supponendo che tutti i nodi siano connessi ad s , avremo n `insert`, n `deleteMin` e al più m `decreaseKey` nella coda di priorità, al costo di:

	Insert	DelMin	DecKey
Heap binario	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
Heap Binom.	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
Heap Fibon.	$O(1)$	$O(\log n)^*$ (ammortizzata)	$O(1)^*$ (ammortizzata)

- $n \cdot O(\log n) + n \cdot O(\log n) + O(m) \cdot O(\log n) = O(m \cdot \log n)$ utilizzando heap binari o binomiali
- $n \cdot O(1) + n \cdot O(\log n)^* + O(m) \cdot O(1)^* = O(m + n \cdot \log n)$ utilizzando heap di Fibonacci

soluzione migliore: mai peggiore,
a volte meglio delle altre

Tempo di esecuzione: implementazioni efficienti

Supponendo che il grafo G sia rappresentato tramite liste di adiacenza, e supponendo che tutti i nodi siano connessi ad s , avremo n insert, n deleteMin e al più m decreaseKey nella coda di priorità, al costo di:

	Insert	DelMin	DecKey
Heap binario	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
Heap Binom.	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
Heap Fibon.	$O(1)$	$O(\log n)^*$ (ammortizzata)	$O(1)^*$ (ammortizzata)

- $n \cdot O(\log n)$ utilizzando heap binario
- $n \cdot O(1)$ utilizzando heap fibonacciano

tempo

$O(m+n \log n)$

soluzione migliore, ma peggiore, a volte meglio delle altre

$\log n)$ utilizzando

Osservazione sulla `decreaseKey`

- Ricordiamo che le complessità computazionali esposte per la `decreaseKey` sono valide supponendo di avere un **puntatore diretto** all'elemento su cui eseguire l'operazione. Come possiamo garantire tale condizione?
- Semplicemente mantenendo un puntatore tra il nodo **v** nell'array dei nodi della lista di adiacenza del grafo e l'elemento nella coda di priorità associato al nodo **v**; tale puntatore viene inizializzato nella fase di inserimento di quest'ultimo all'interno della coda.