Algoritmi e Strutture Dati

Capitolo 13
Cammini minimi:
algoritmo di Dijkstra

Cammini minimi in grafi:

cammini minimi a singola sorgente (senza pesi negativi)

Cammini minimi in grafi pesati

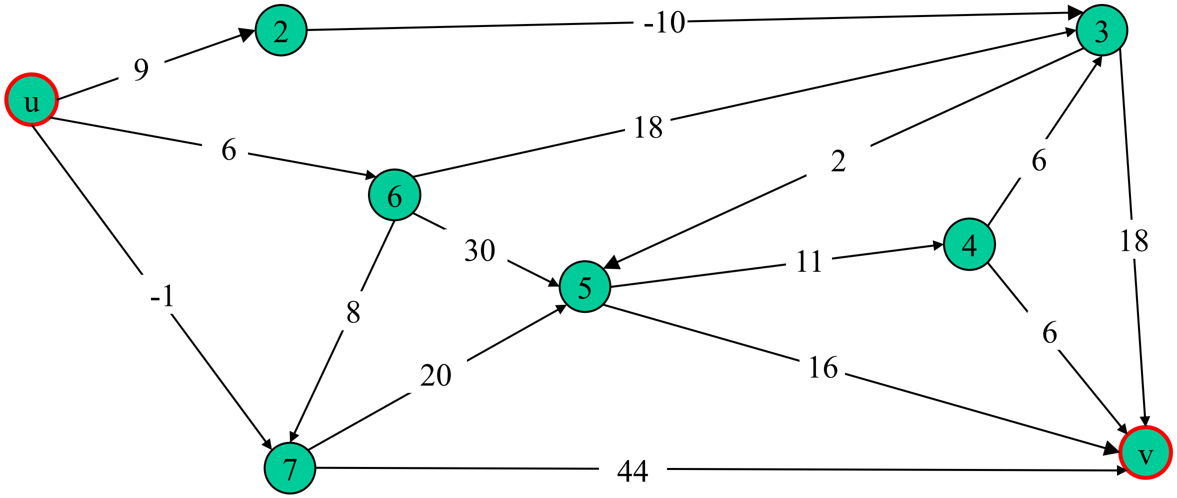
Sia $G=(V,E,w)$ un grafo orientato o non orientato con pesi w reali sugli archi. Il costo o lunghezza di un cammino $\pi=<v_0,v_1,v_2,\dots,v_k>$ è:

$$w(\pi) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$$

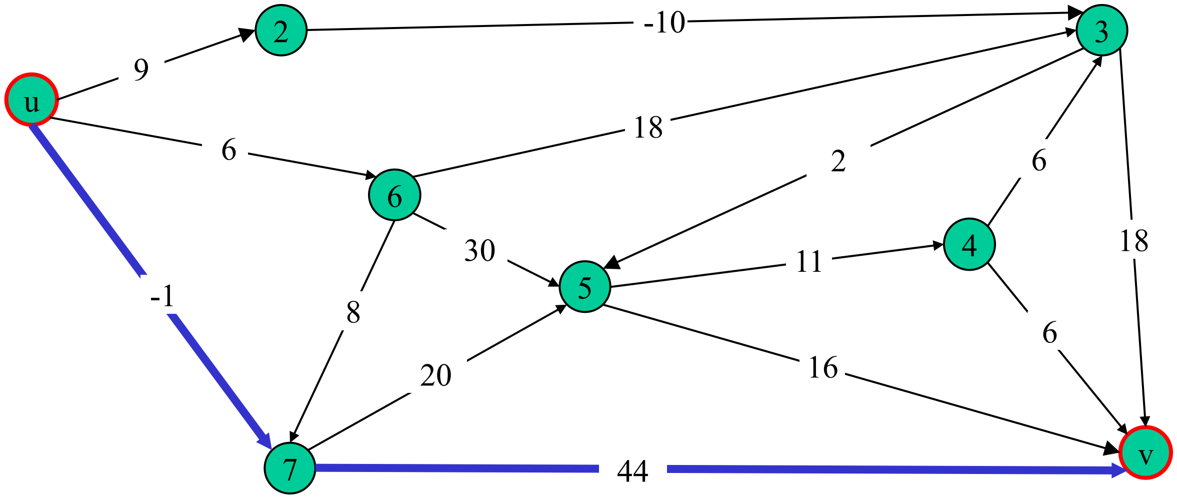
Un cammino minimo tra una coppia di vertici x e y è un cammino avente costo minore o uguale a quello di ogni altro cammino tra gli stessi vertici.

NOTA: Il cammino minimo non è necessariamente unico.

Esempio: cammino minimo su un grafo pesato

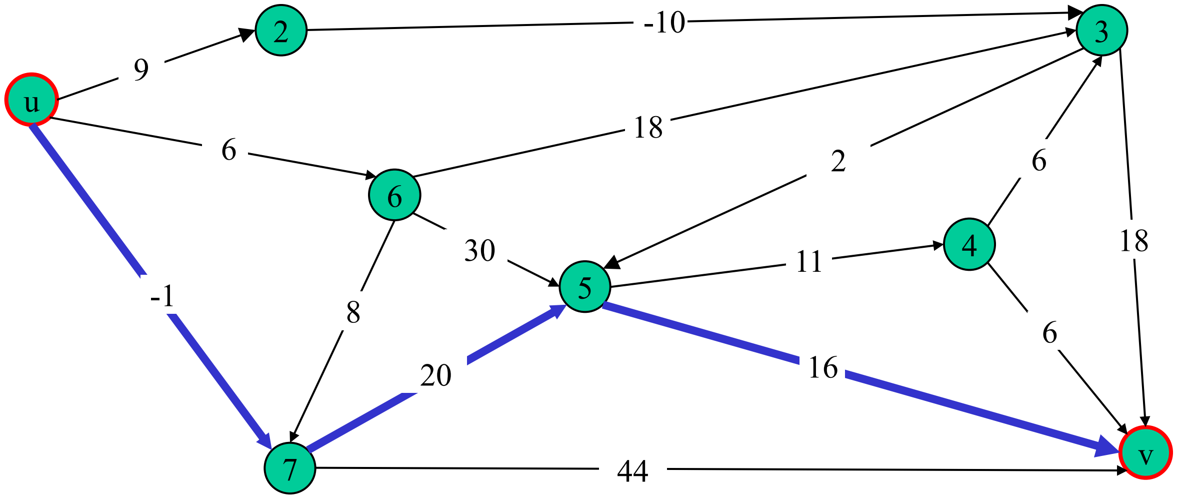


Esempio: cammino minimo su un grafo pesato



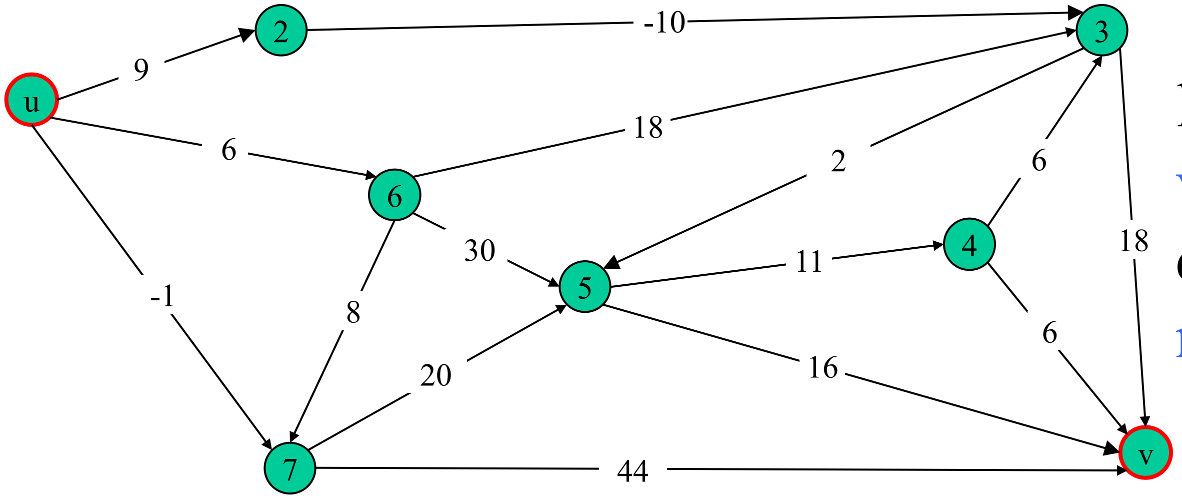
cammino di lunghezza 43

Esempio: cammino minimo su un grafo pesato



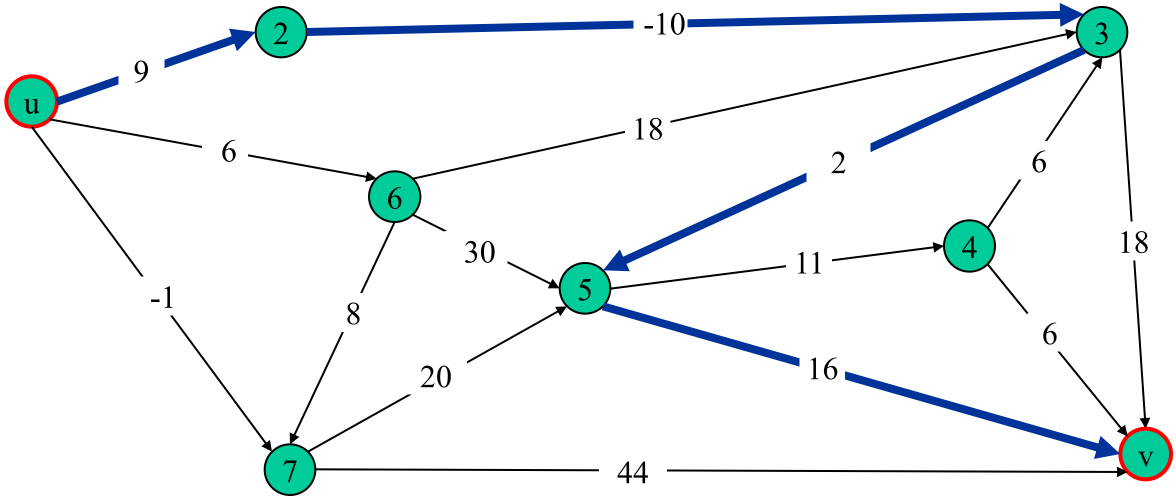
cammino di lunghezza
35

Esempio: cammino minimo su un grafo pesato



la distanza $d_G(u,v)$ da u a v in G è il costo di un qualsiasi cammino minimo da u a v.

Esempio: cammino minimo su un grafo pesato

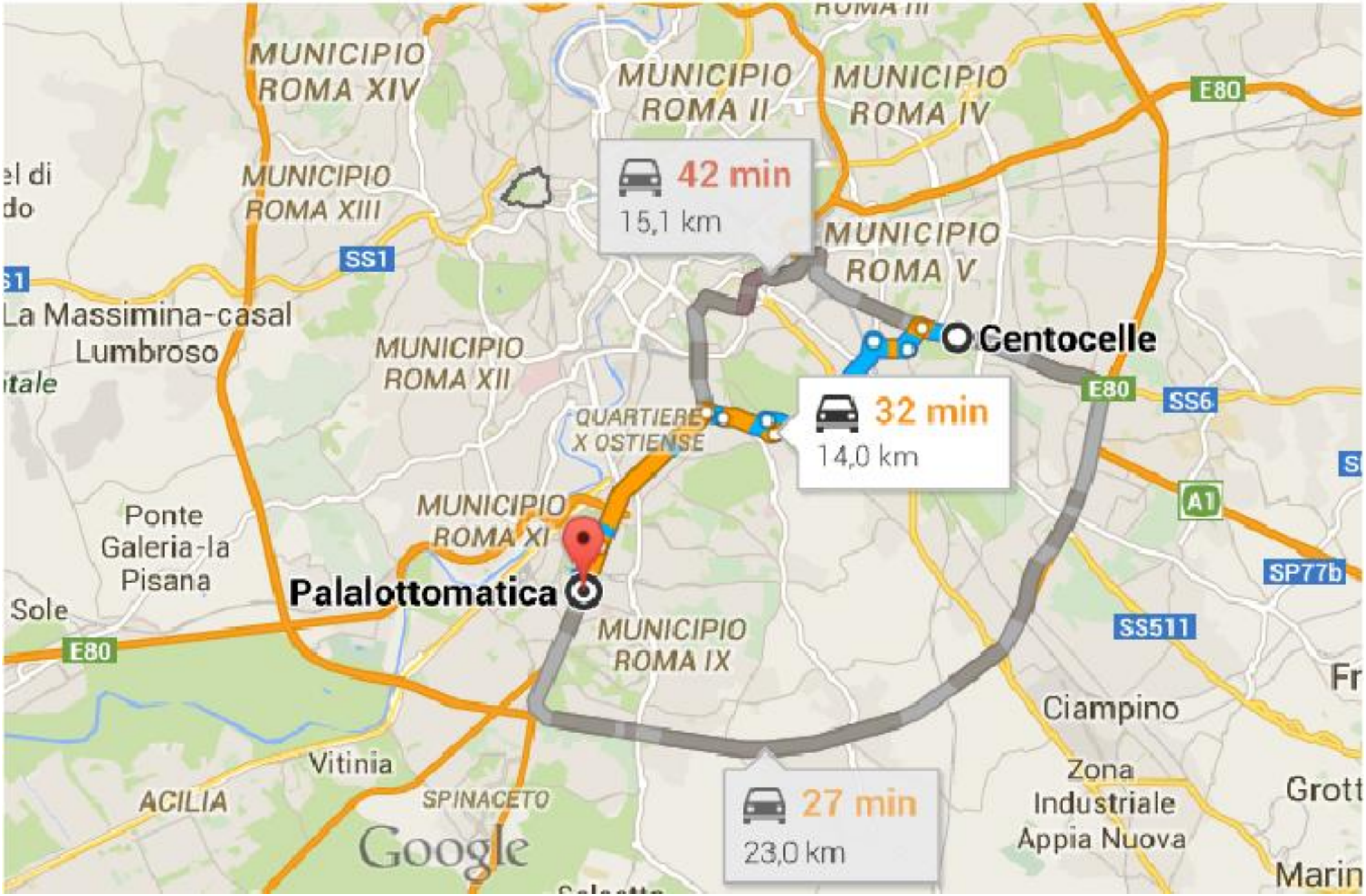


la distanza $d_G(u,v)$ da u a v in G è il costo di un qualsiasi cammino minimo da u a v.

$d_G(u,v)=17$

Problema: dati *u* e *v*, trovare un cammino minimo (e/o distanza) da *u* a *v*

problema:
trovare il cammino minimo fra due nodi



problema:
trovare il cammino minimo fra due nodi

pesi archi:
lunghezze

→ strada
più breve

pesi archi:
tempo
percorrenza

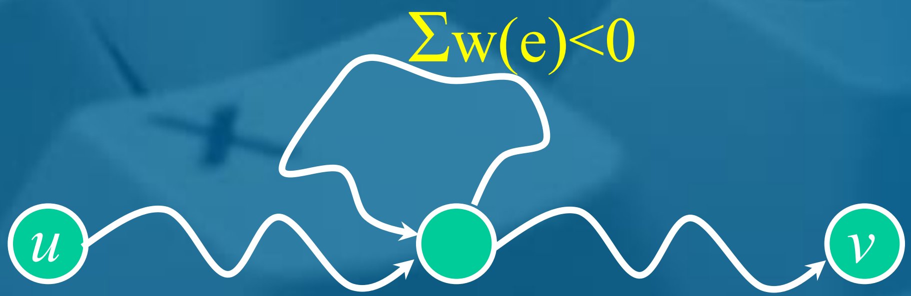
→ strada
più veloce

esiste sempre un cammino minimo fra due nodi?

…no!

- se non esiste nessun cammino da u a v
  - d(u,v)=+∞

- se c'è un cammino che contiene un ciclo (raggiungibile) il cui costo è negativo
  - d(u,v)=-∞



Oss: se G non contiene cicli negativi, esistono cammini minimi che sono cammini semplici

non contiene nodi ripetuti

sottostruttura ottima

Ogni sottocammino di un cammino minimo è un cammino minimo.

dim: tecnica cut&paste

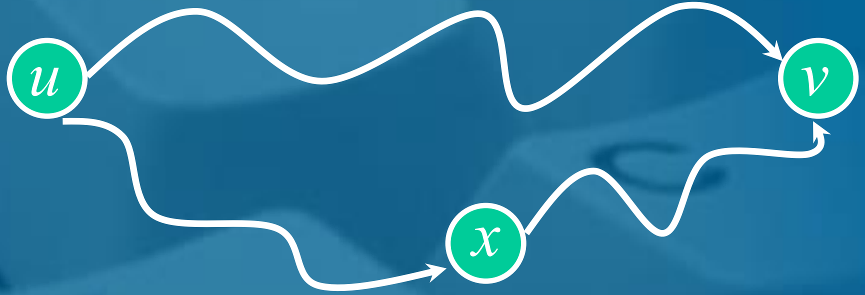
ipotetico cammino
più corto da x a y

allora il cammino
da u a v non era minimo!

disuguaglianza triangolare

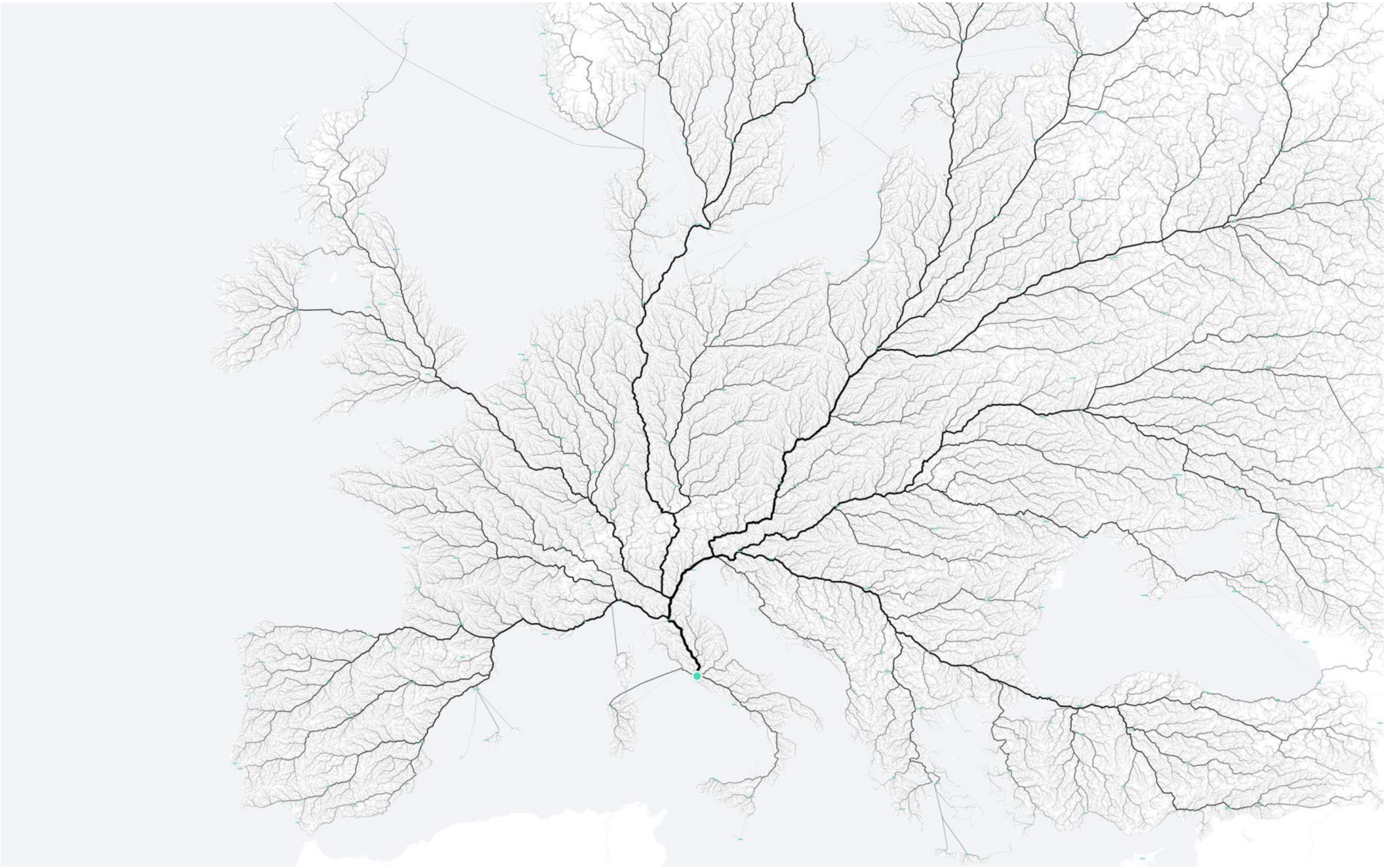
per ogni u, v, x $\in$ V, vale:

$$d(u,v) \leq d(u,x) + d(x,v)$$



il cammino da u a v che passa per x è un cammino nel grafo e quindi il suo costo è almeno il costo del cammino minimo da u a v

Cammini minimi a singola sorgente



Problema del calcolo dei cammini minimi a singola sorgente

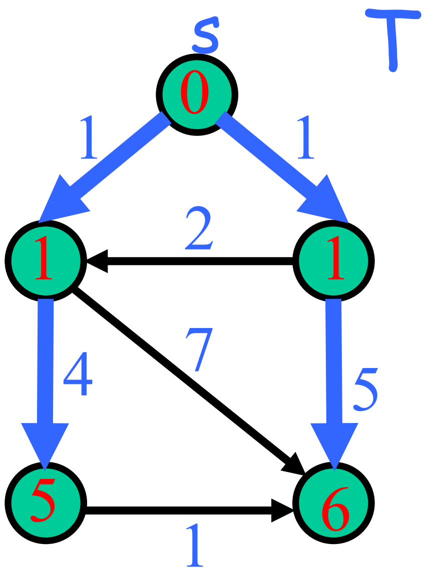
Due varianti:

- Dato $G=(V,E,w)$, $s \in V$, calcola le distanze di tutti i nodi da s, ovvero, $d_G(s,v)$ per ogni $v \in V$
- Dato $G=(V,E,w)$, $s \in V$, calcola l'*albero dei cammini minimi* di G radicato in s

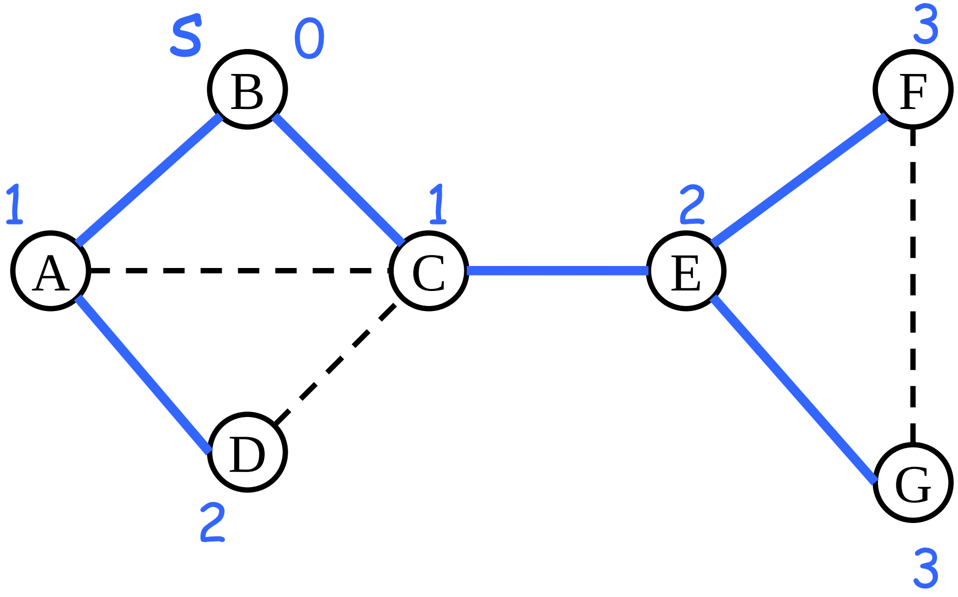
Albero dei cammini minimi
(o Shortest Path Tree - SPT)

T è un albero dei cammini minimi con sorgente s di un grafo $G=(V,E,w)$ se:

- T è un albero radicato in s
- per ogni $v \in V$, vale:
$$d_T(s,v)=d_G(s,v)$$



Albero dei cammini minimi
(o Shortest Path Tree - SPT)

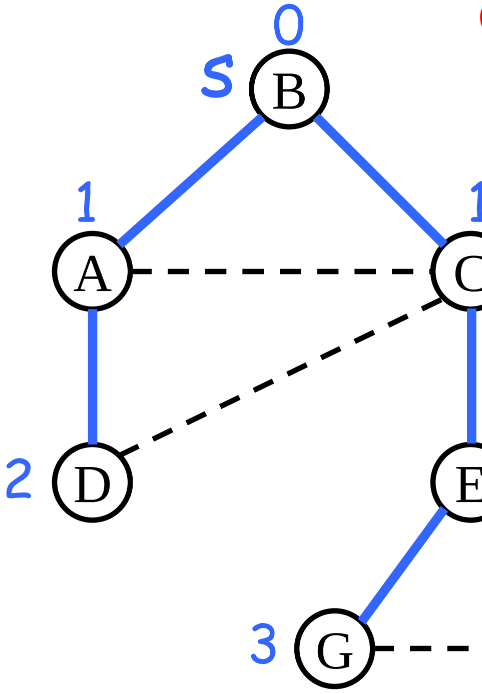


per grafi non pesati:

SPT radicato in s

=

Albero BFS radicato in s



albero
BFS

Esercizio

1. Progettare un algoritmo che, dato un grafo diretto e pesato G=(V,E,w) e un suo albero dei cammini minimi radicato in un nodo s, calcola in tempo lineare (nella dimensione del grafo) le distanze di ogni nodo da s.

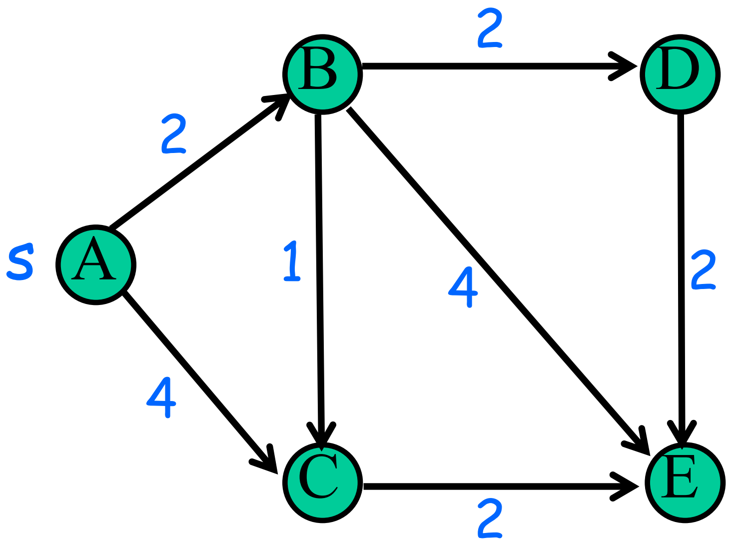
2. Progettare un algoritmo che, dato un grafo diretto e pesato G=(V,E,w) e le distanze di ogni nodo da un nodo s, calcola in tempo lineare (nella dimensione del grafo) un albero dei cammini minimi di G radicato in s.

Osservazione: le due varianti del problema sono essenzialmente equivalenti

Algoritmo di Dijkstra

Assunzione: tutti gli archi hanno peso non negativo, ovvero ogni arco (u,v) del grafo ha peso $w(u,v) \geq 0$

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

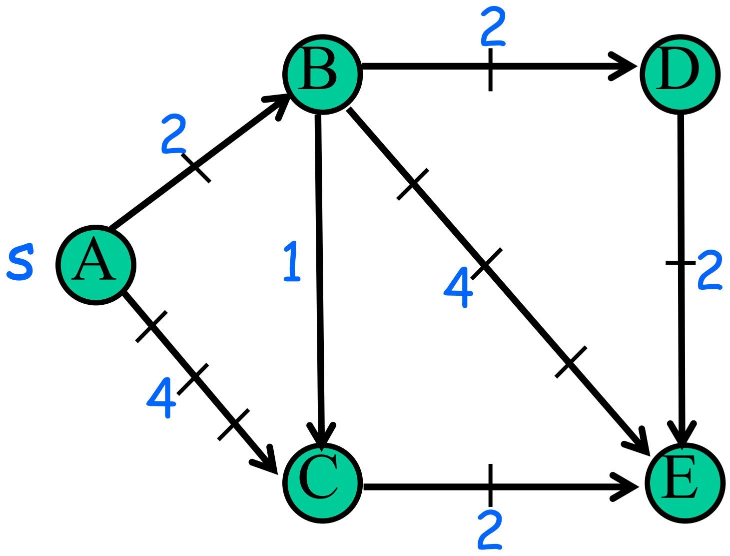


archi come tubi

peso degli archi come lunghezza

acqua scorre a velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

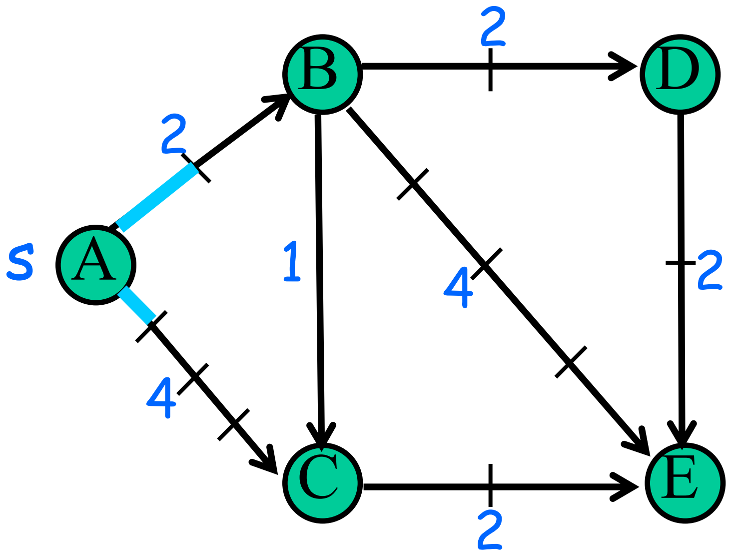


archi come tubi

peso degli archi come lunghezza

acqua scorre a velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

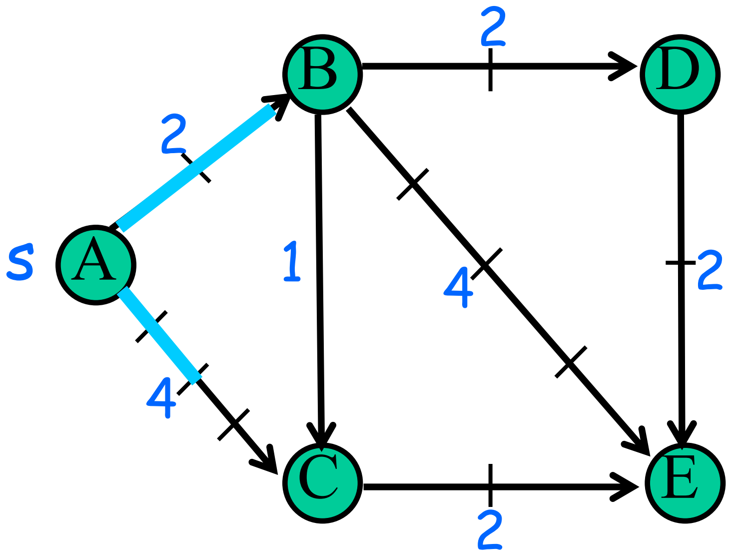


archi come tubi

peso degli archi come lunghezza

acqua scorre a velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

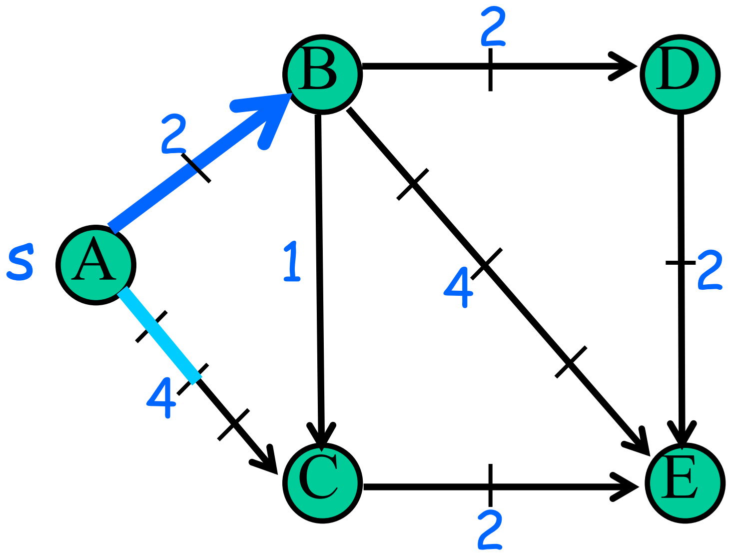


archi come tubi

peso degli archi come lunghezza

acqua scorre a velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

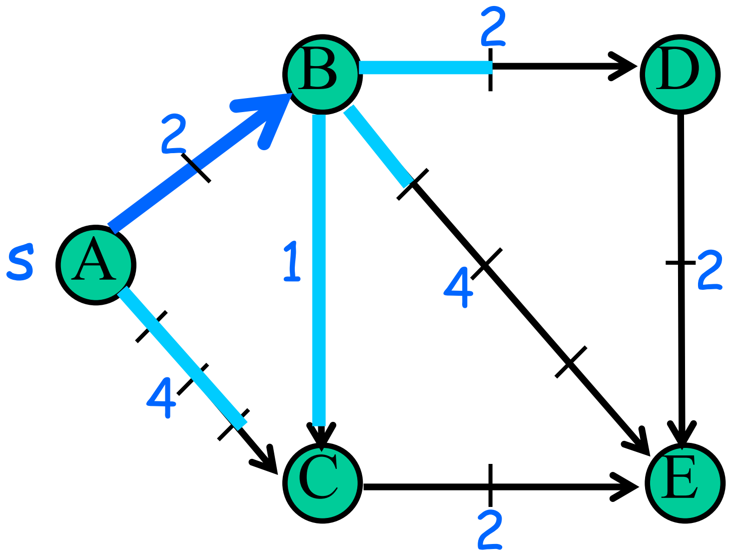


archi come tubi

peso degli archi come lunghezza

acqua scorre a velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

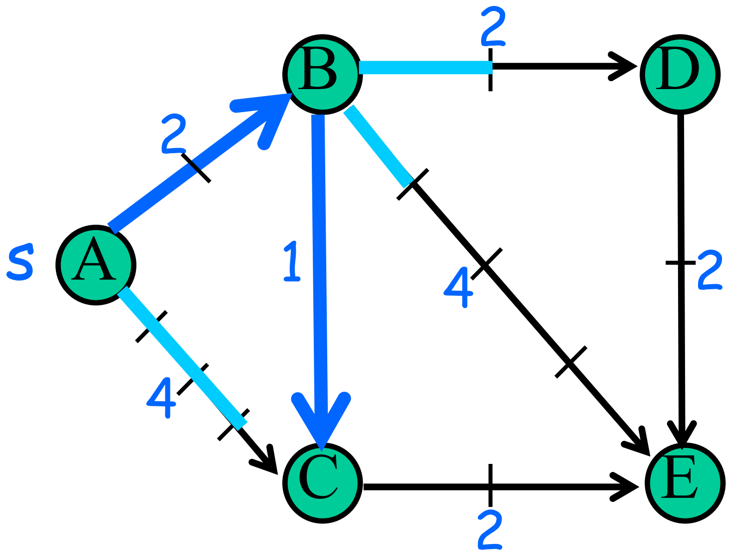


archi come tubi

peso degli archi come lunghezza

acqua scorre a velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

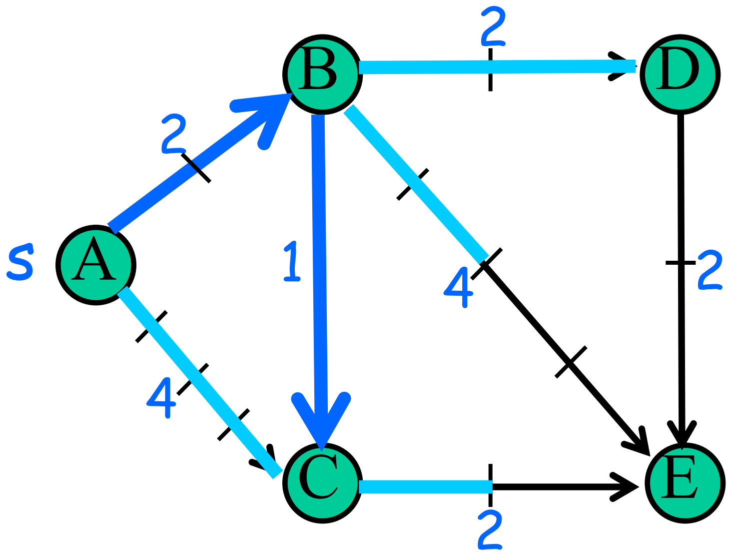


archi come tubi

peso degli archi come lunghezza

acqua scorre a velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

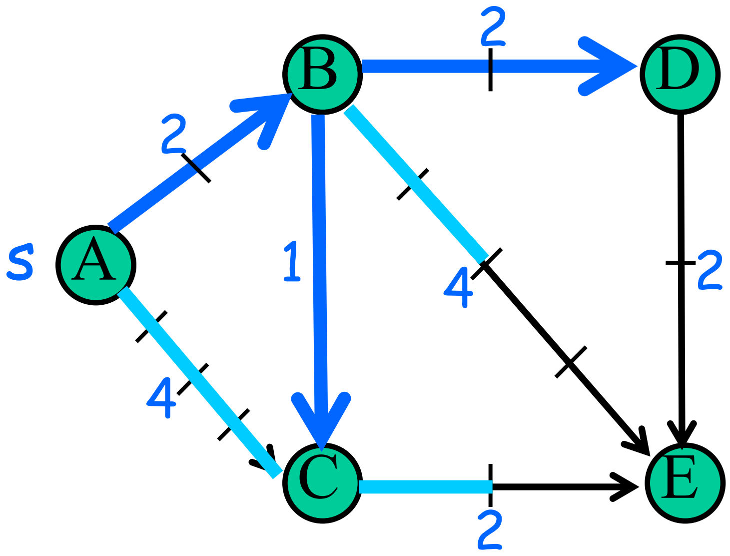


archi come tubi

peso degli archi come lunghezza

acqua scorre a velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

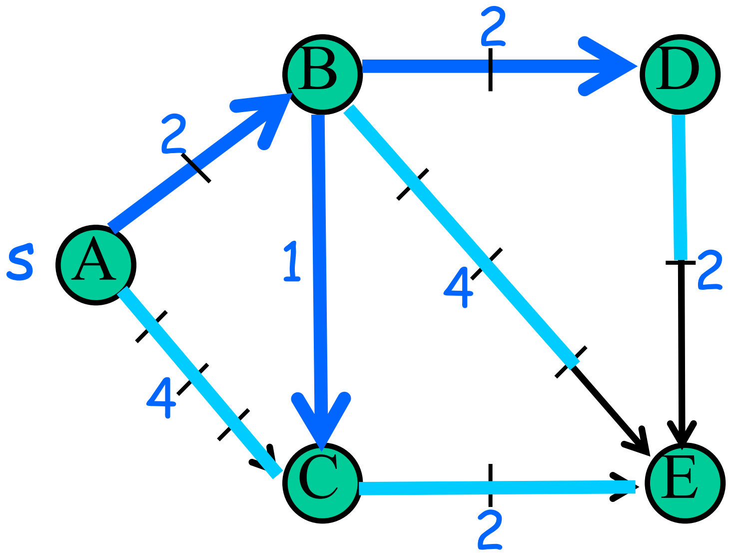


archi come tubi

peso degli archi come lunghezza

acqua scorre a velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

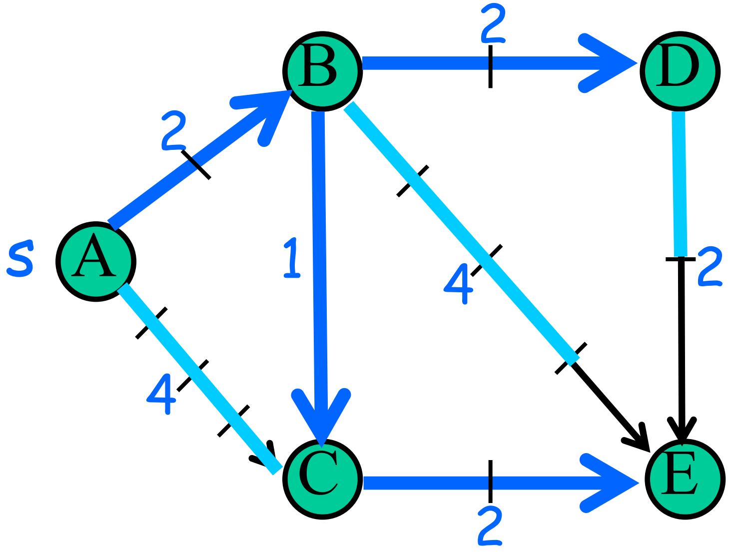


archi come tubi

peso degli archi come lunghezza

acqua scorre a velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

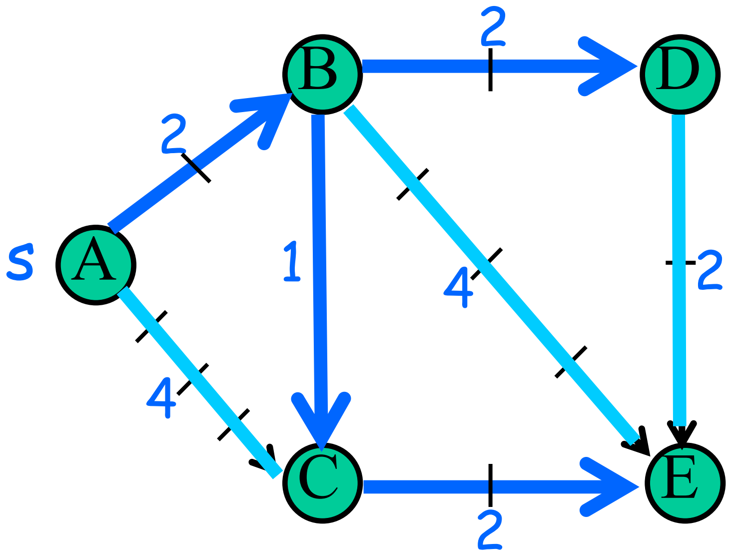


archi come tubi

peso degli archi come lunghezza

acqua scorre a velocità costante

Idea intuitiva dell’algoritmo: pompare acqua nella sorgente

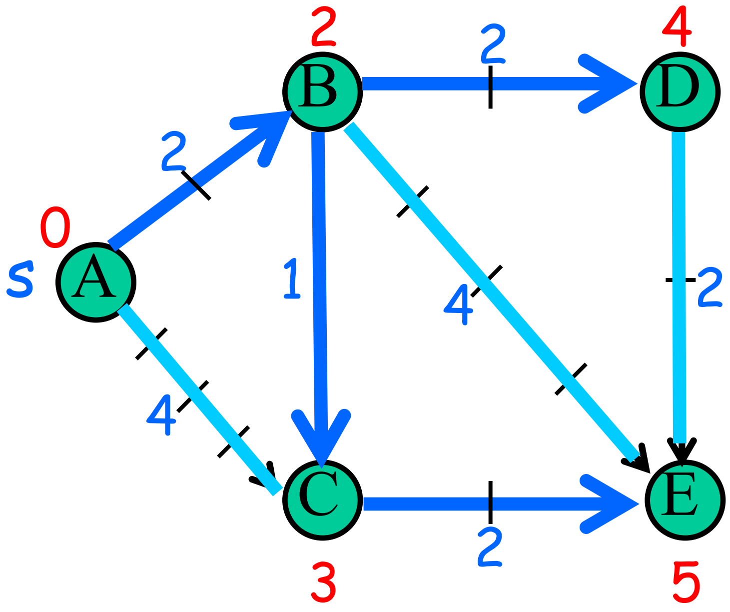


archi come tubi

peso degli archi come lunghezza

acqua scorre a velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente



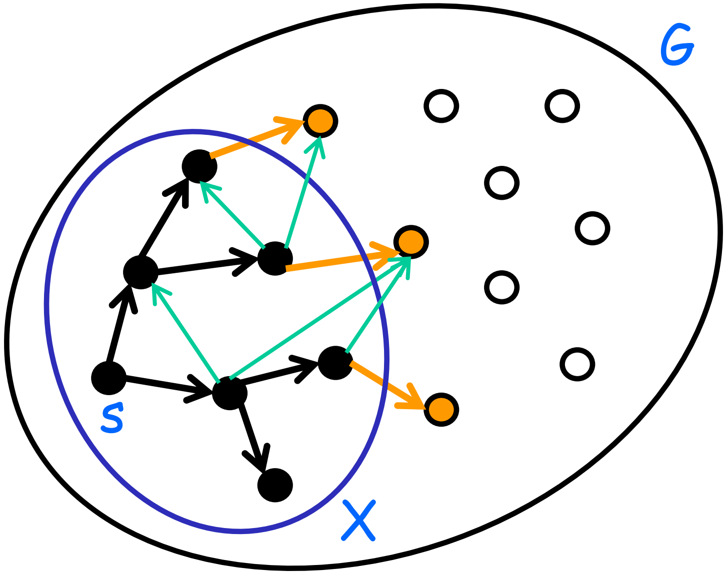
archi come tubi

peso degli archi come lunghezza

acqua scorre a velocità costante

Verso l'algoritmo: approccio greedy (goloso)

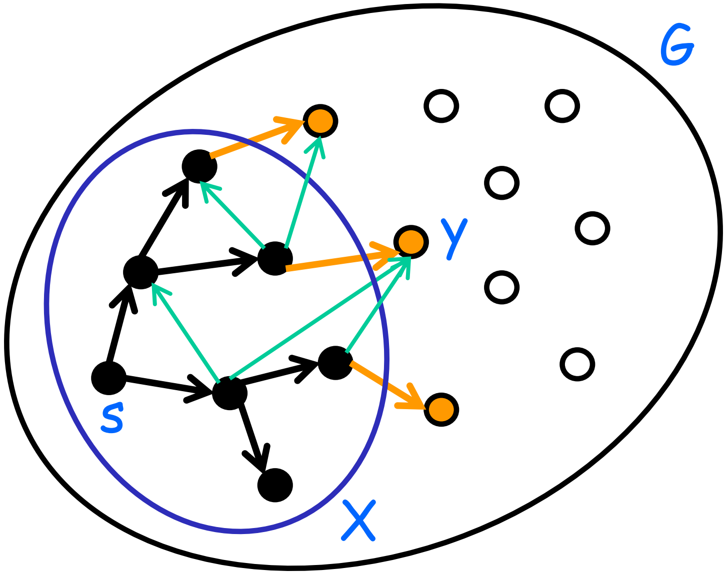
1. mantiene per ogni nodo v una stima (per eccesso) D_{sv} alla distanza d(s,v). Inizialmente, unica stima finita D_{ss}=0.
2. mantiene un inseme X di nodi per cui le stime sono esatte; e anche un albero T dei cammini minimi verso nodi in X (albero nero). Inizialmente X={s}, T non ha archi.
3. ad ogni passo aggiunge a X il nodo u in V-X la cui stima è minima; aggiunge a T uno specifico arco (arancione) entrante in u
4. aggiorna le stime guardando i nodi adiacenti a u



I nodi da aggiungere progressivamente a X (e quindi a T) sono mantenuti in una coda di priorità, associati ad un unico arco (arco arancione) che li connette a T.

la stima per un nodo $y \in V-X$ è:
$D_{sy}=\min\{D_{sx}+w(x,y) : (x,y)\in E, x\in X\}$.
L'arco che fornisce il minimo è l'arco arancione.

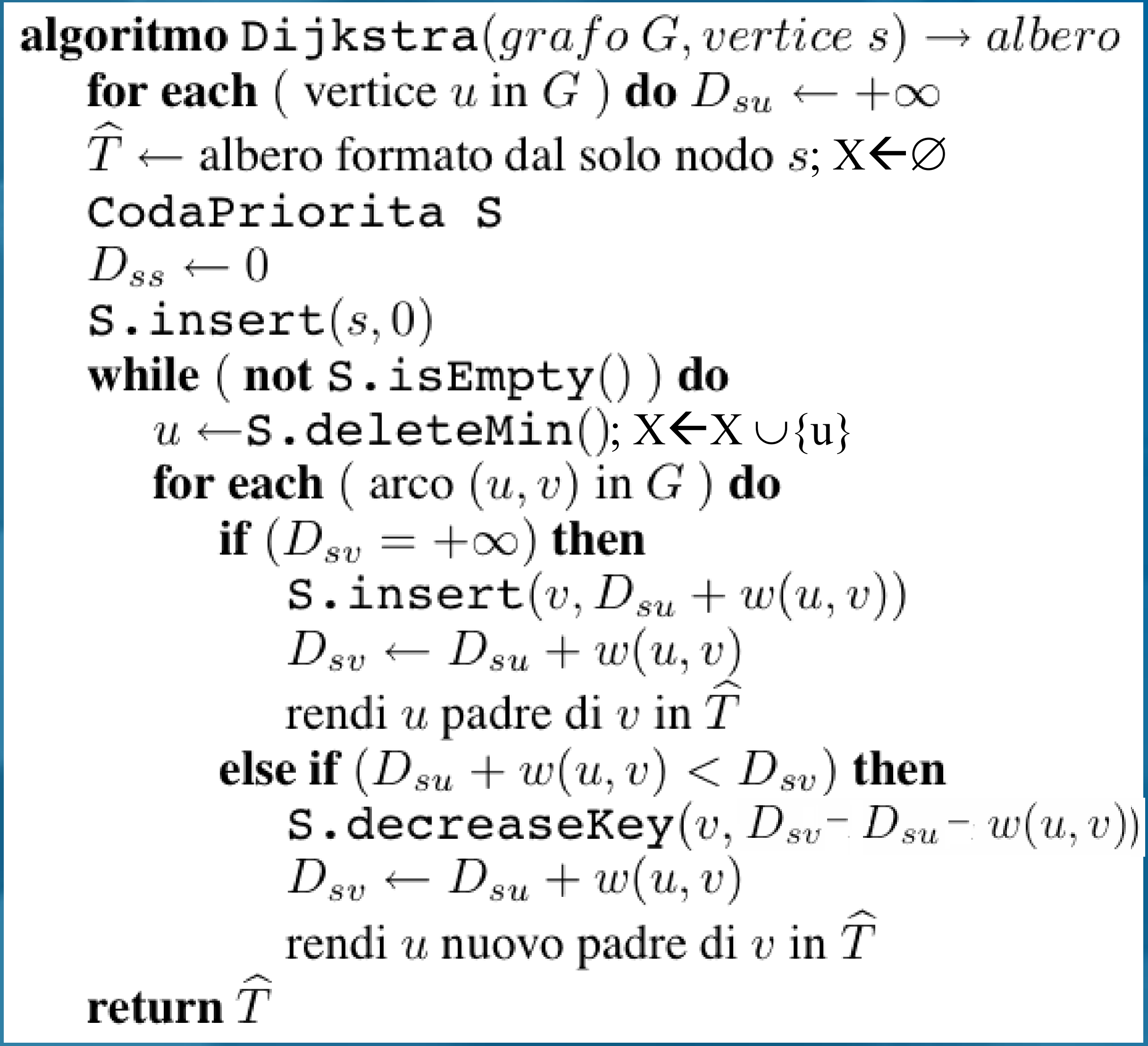
Se y è in coda con arco (x,y) associato, e se dopo aver aggiunto u a T troviamo un arco (u,y) tale che $D_{su}+w(u,y) < D_{sx}+w(x,y)$, allora rimpiazziamo (x,y) con (u,y), ed aggiorniamo D_{sy}



○ nodi per i quali non è stato "scoperto" nessun cammino; stima=+∞

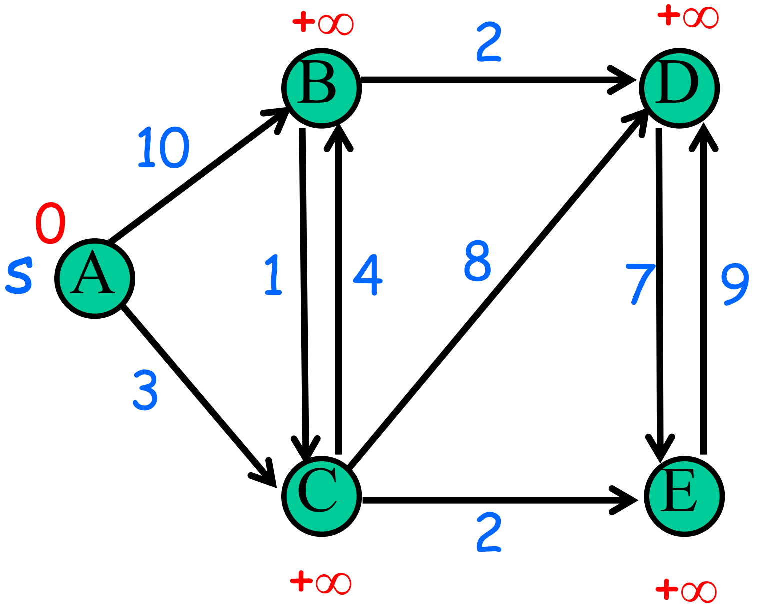
● nodi "scoperti"; hanno stima<+∞ sono mantenuti in una coda con priorità insieme al "miglior" arco entrante (arancione)

Pseudocodice

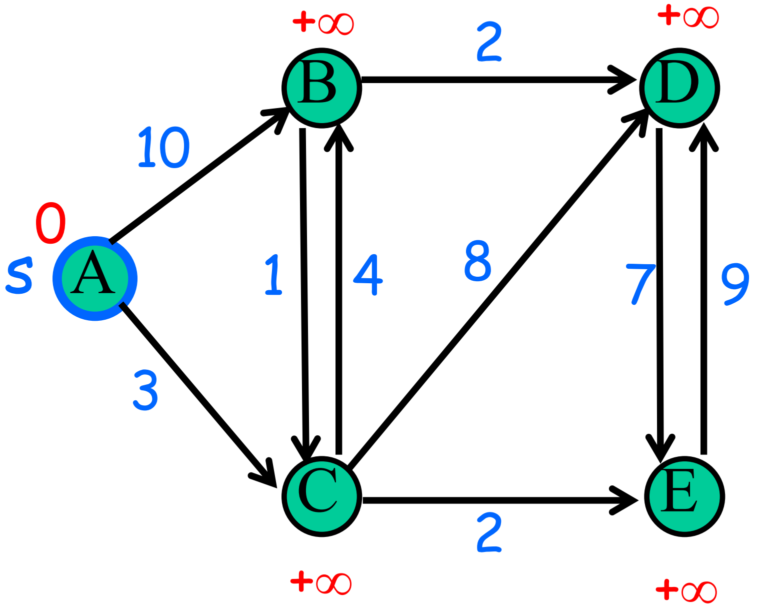


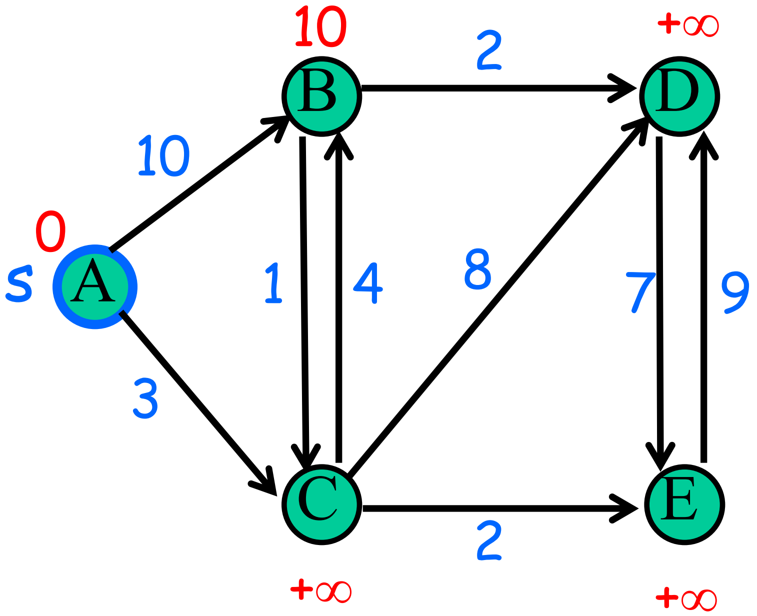
```
algoritmo Dijkstra(grafo G, vertice s) → albero
    for each ( vertice $u$ in $G$ ) do $D_{su} \leftarrow +\infty$
    $\widehat{T} \leftarrow$ albero formato dal solo nodo $s$; X←∅
    CodaPriorita S
    $D_{ss} \leftarrow 0$
    S.insert($s$, 0)
    while ( not S.isEmpty() ) do
        $u \leftarrow$S.deleteMin(); X←X ∪{u}
        for each ( arco $(u, v)$ in $G$ ) do
            if ($D_{sv} = +\infty$) then
                S.insert($v$, $D_{su} + w(u, v)$)
                $D_{sv} \leftarrow D_{su} + w(u, v)$
                rendi $u$ padre di $v$ in $\widehat{T}$
            else if ($D_{su} + w(u, v) < D_{sv}$) then
                S.decreaseKey($v$, $D_{sv} - D_{su} - w(u, v)$)
                $D_{sv} \leftarrow D_{su} + w(u, v)$
                rendi $u$ nuovo padre di $v$ in $\widehat{T}$
    return $\widehat{T}$
```

Nota: $\hat{T}$ è un albero che contiene tutti i nodi in X più i nodi correntemente contenuti nella coda di priorità (nodi arancioni); è composto cioè dagli archi di T (albero dei cammini minimi ristretto ai nodi in X) più gli archi arancioni (potenziali archi da aggiungere a T)

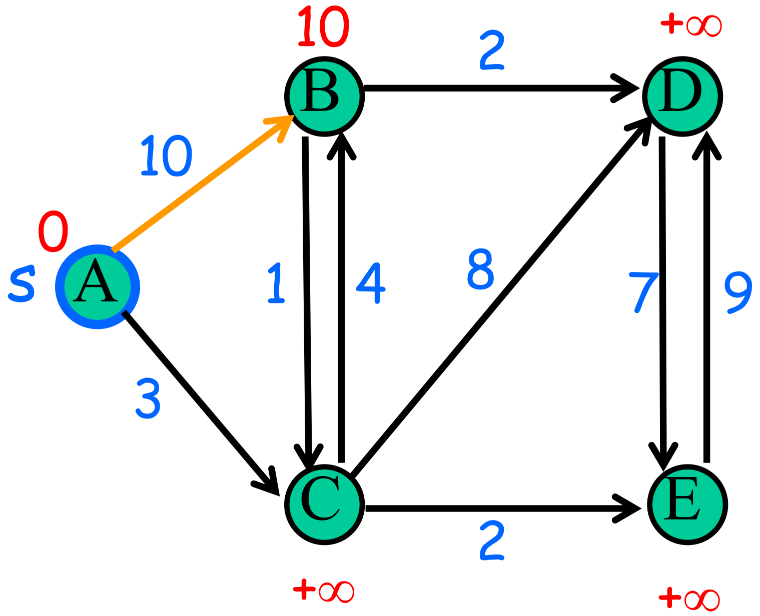


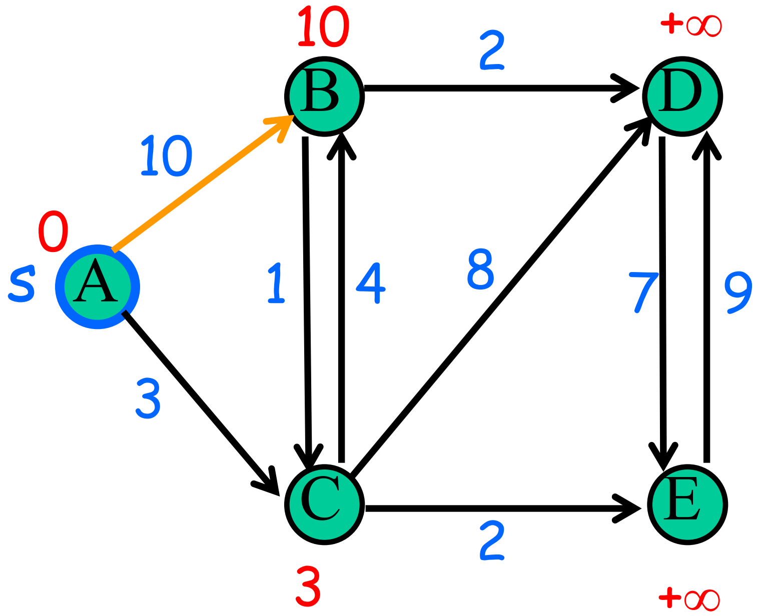
+∞
2
+∞
B
D
10
0
s
A
1
4
8
7
9
3
C
E
2
+∞
+∞


0
s
A
10
3
+∞
B
2
+∞
D
1
4
8
7
9
C
2
E
+∞
+∞

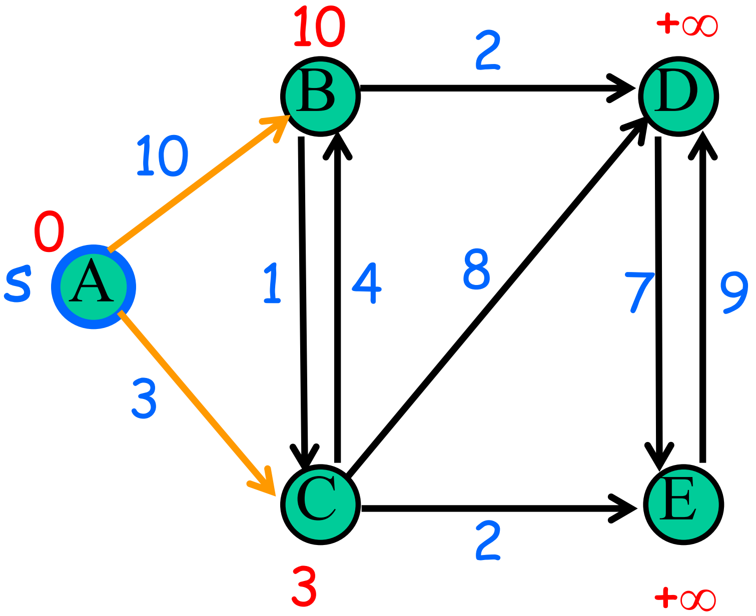


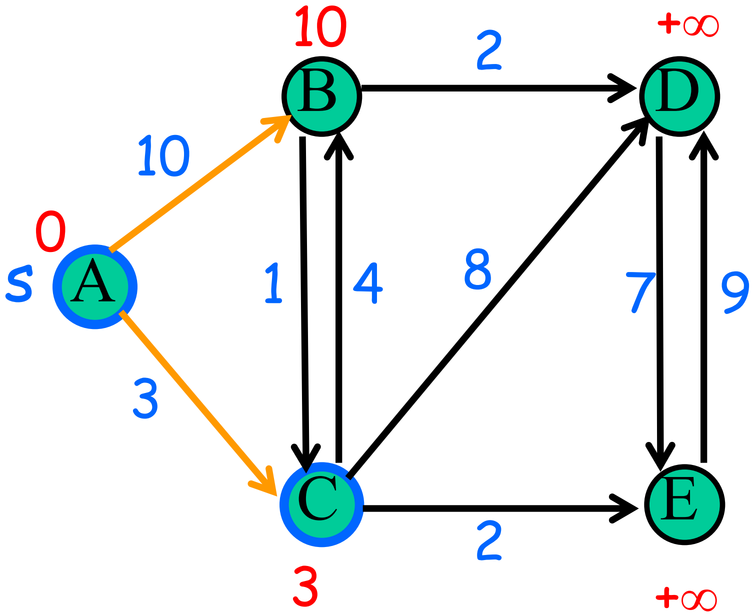
10
+∞
2
B
D
10
0
s
A
1
4
8
7
9
3
C
E
2
+∞
+∞

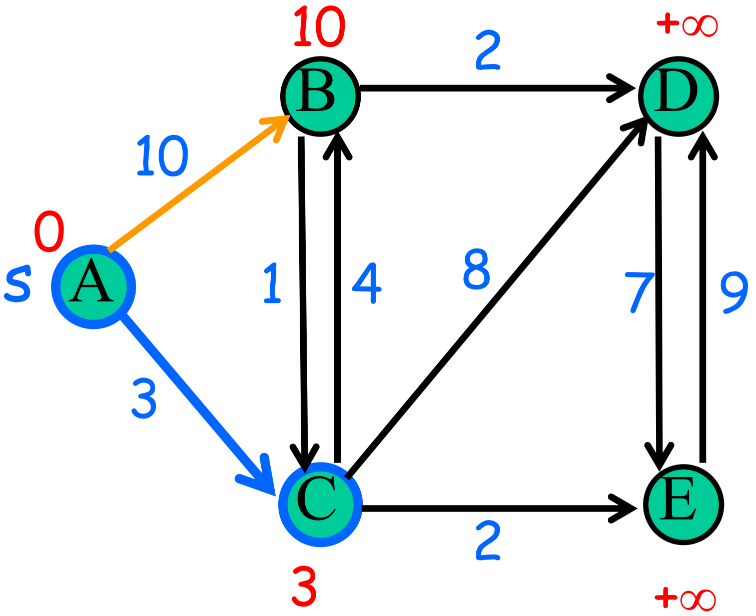

0
s
A
10
B
2
+∞
D
10
1
4
8
7
9
3
C
2
E
+∞
+∞

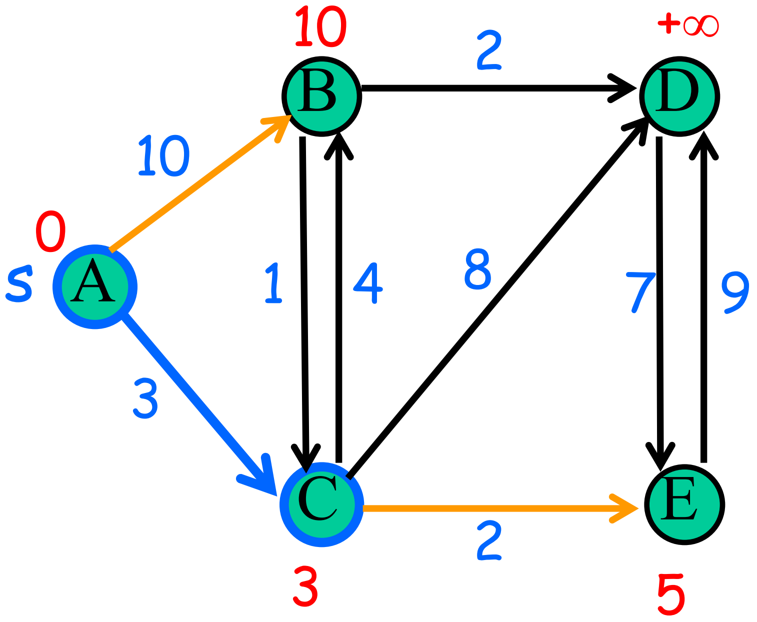


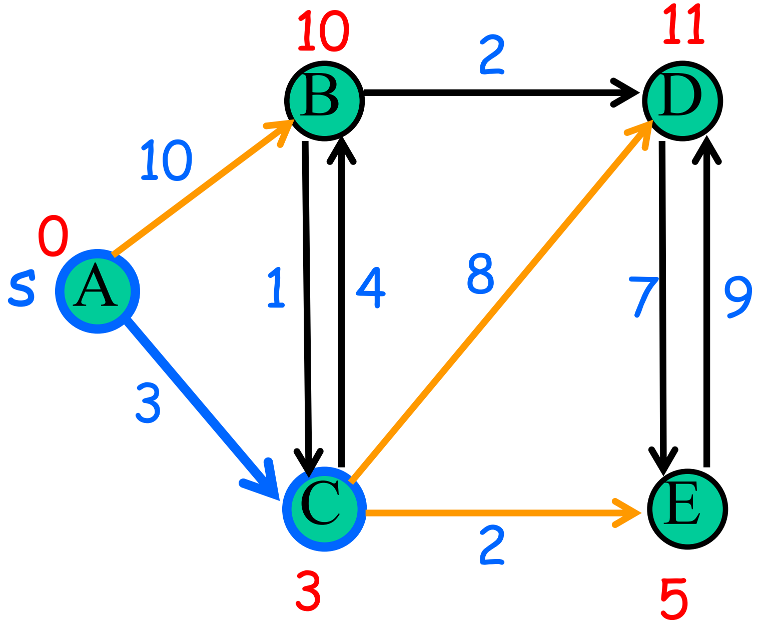
10
+∞
2
B
D
10
0
s
A
1
4
8
7
9
3
C
E
2
3
+∞

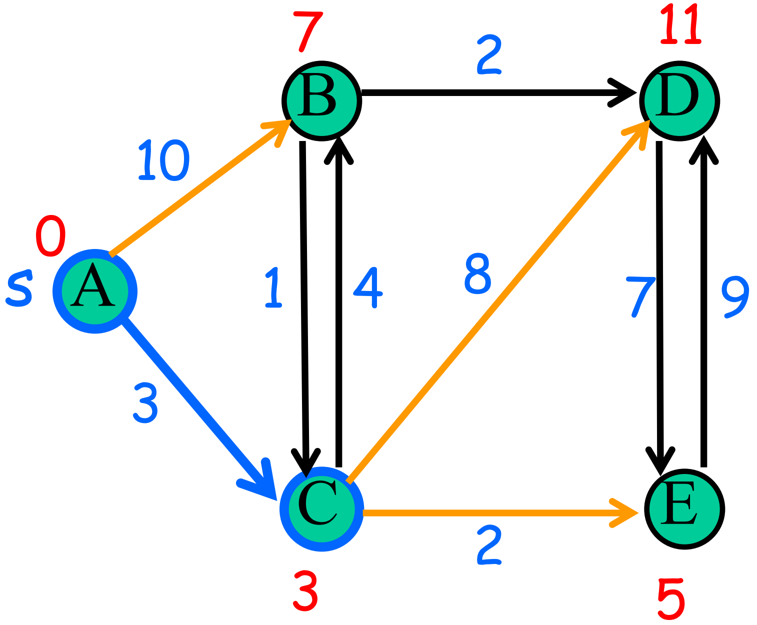

10
+∞
2
0
s
A
B
D
10
1
4
8
7
9
3
C
E
2
3
+∞


0
s
A
10
B
+∞
D
2
10
3
1
4
8
7
9
C
E
2
3
+∞

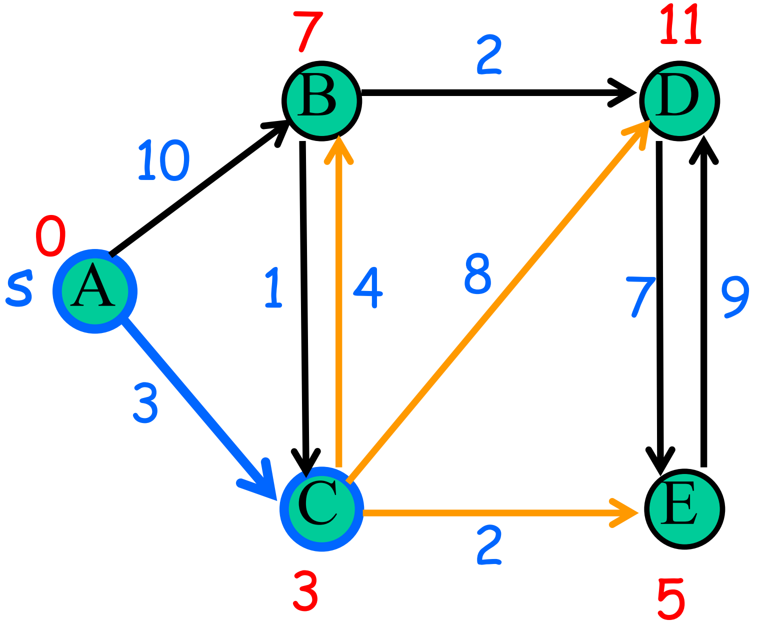

0
s
A
10
B
+∞
D
2
10
1
4
8
7
9
3
C
E
2
3
+∞

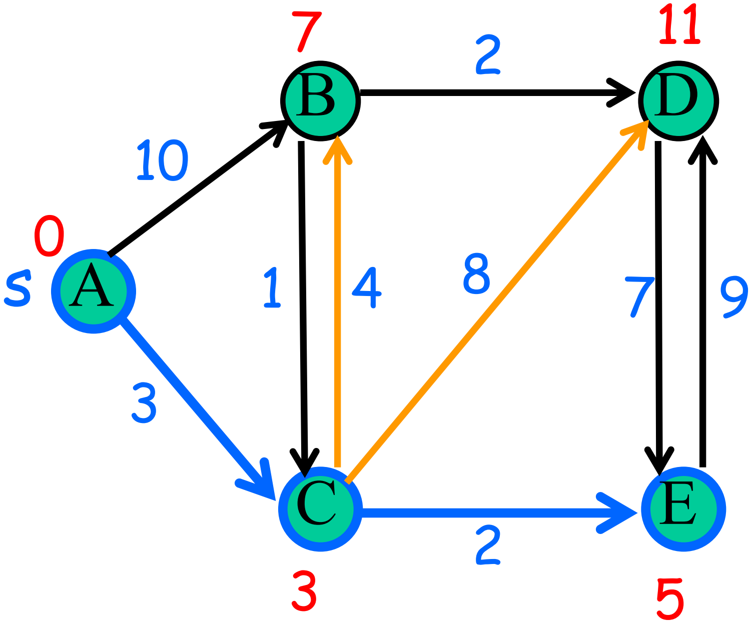

10
+∞
2
B
D
10
0
s
A
1
4
8
7
9
3
C
E
2
3
5

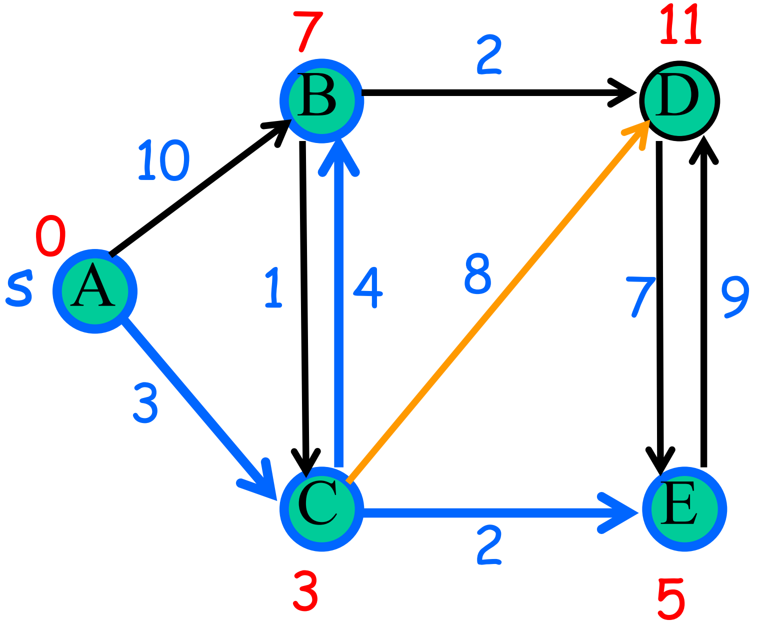

10
11
2
B
D
10
0
s
A
1
4
8
7
9
3
C
E
2
3
5

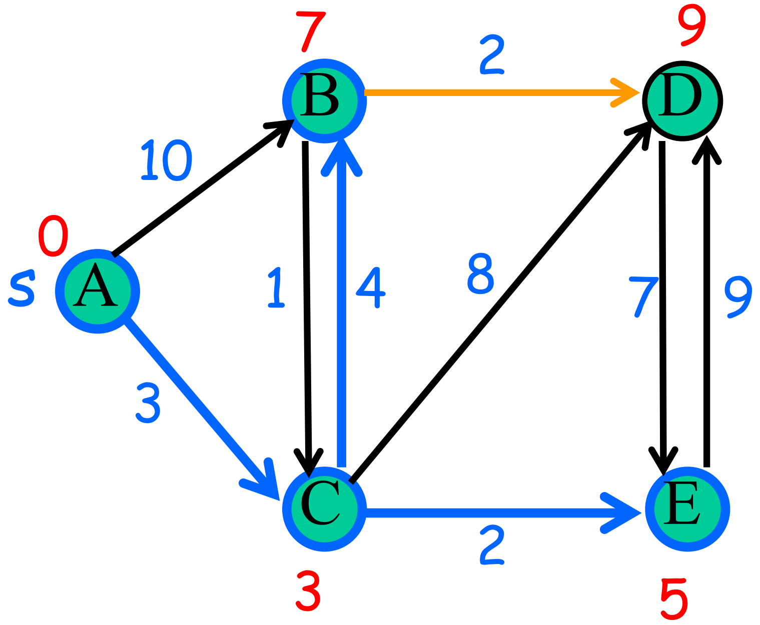


0
s
A
10
3
7
B
1
4
2
8
11
D
7
9
C
2
E
3
5

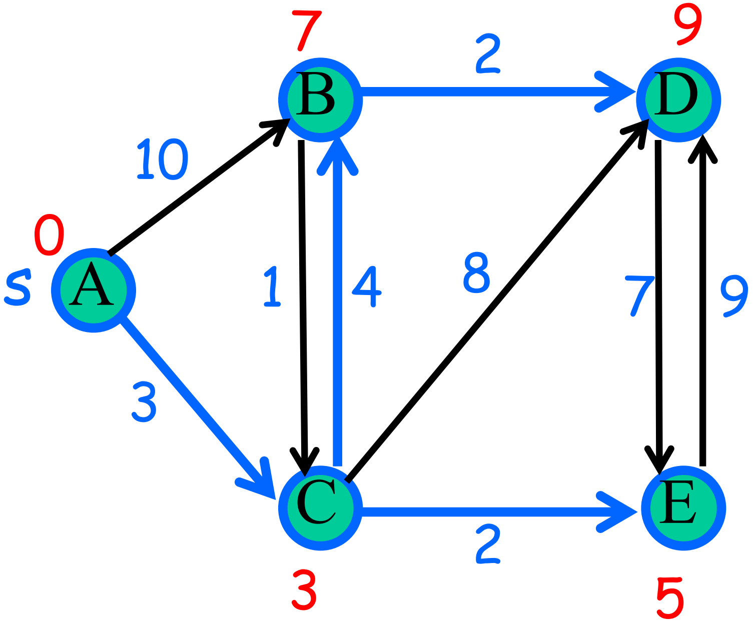

7
11
2
B
D
10
0
s
A
1
4
8
7
9
3
C
E
2
3
5

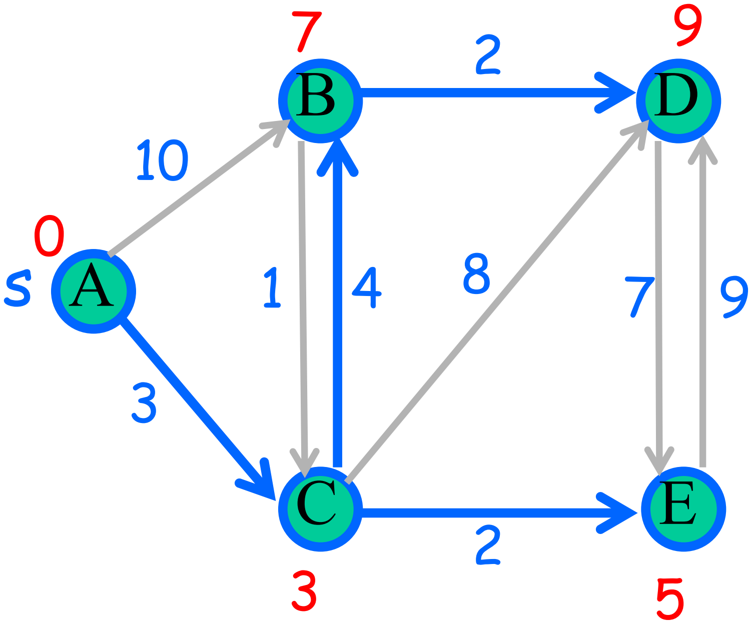

7
11
2
B
D
10
0
s
A
1
4
8
7
9
3
C
E
2
3
5


7
11
2
B
D
10
0
s
A
1
4
8
7
9
3
C
E
2
3
5



7
2
9
B
D
10
0
s
A
1
4
8
7
9
3
C
E
2
3
5


7
9
0
s
A
B
C
D
E
10
3
1
4
2
8
7
9
2
3
5


7
9
2
B
D
10
0
1
4
8
7
9
s
A
3
C
E
2
3
5

correttezza

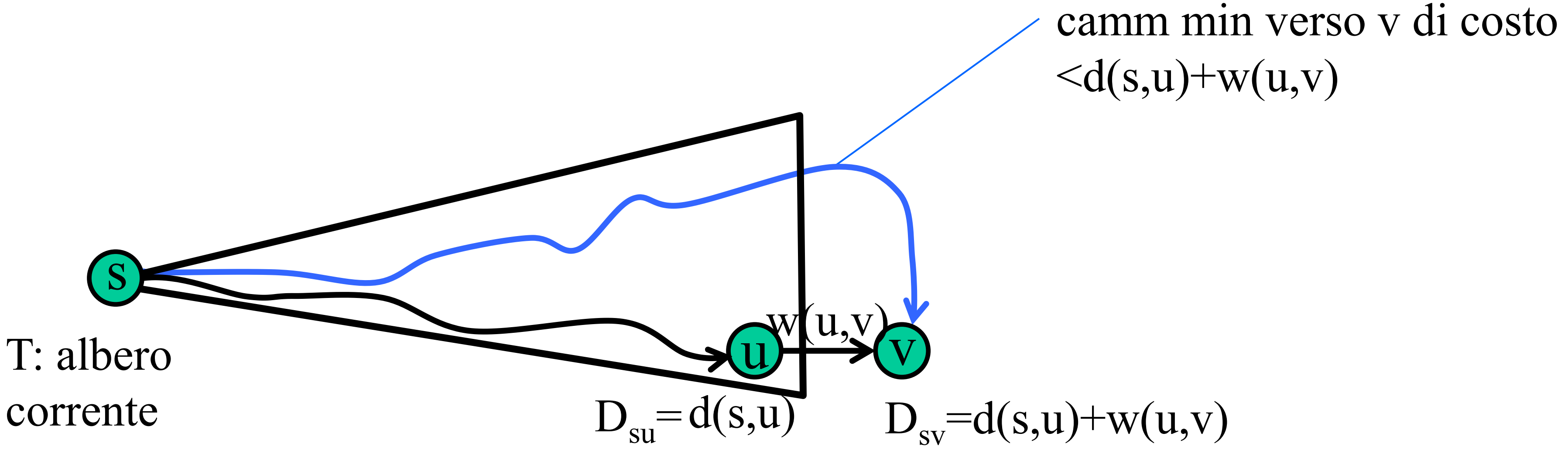
Lemma

Quando il nodo v viene estratto dalla coda con priorità vale:

- D_{sv}=d(s,v) (stima esatta)
- il cammino da s a v nell'albero corrente ha costo d(s,v) (camm. min in G)

dim (per assurdo)

Sia v il primo nodo per cui l'alg sbaglia
sia (u,v) l'arco aggiunto all'albero corrente (arco arancione)



Lemma

Quando il nodo v viene estratto dalla coda con priorità vale:

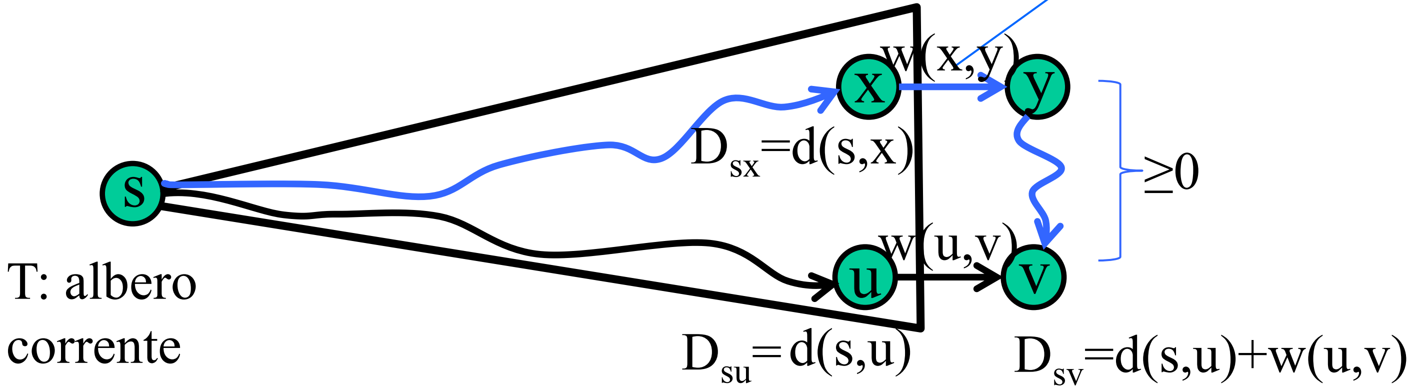
- $D_{sv}=d(s,v)$ (stima esatta)
- il cammino da s a v nell'albero corrente ha costo d(s,v) (camm. min in G)

dim (per assurdo)

Sia v il primo nodo per cui l'alg sbaglia

sia (u,v) l'arco aggiunto all'albero corrente (arco arancione)

(x,y): primo arco del cammino t.c $x \in T$ e $y \notin T$



camm min verso v di costo $<d(s,u)+w(u,v)$

Lemma

Quando il nodo v viene estratto dalla coda con priorità vale:

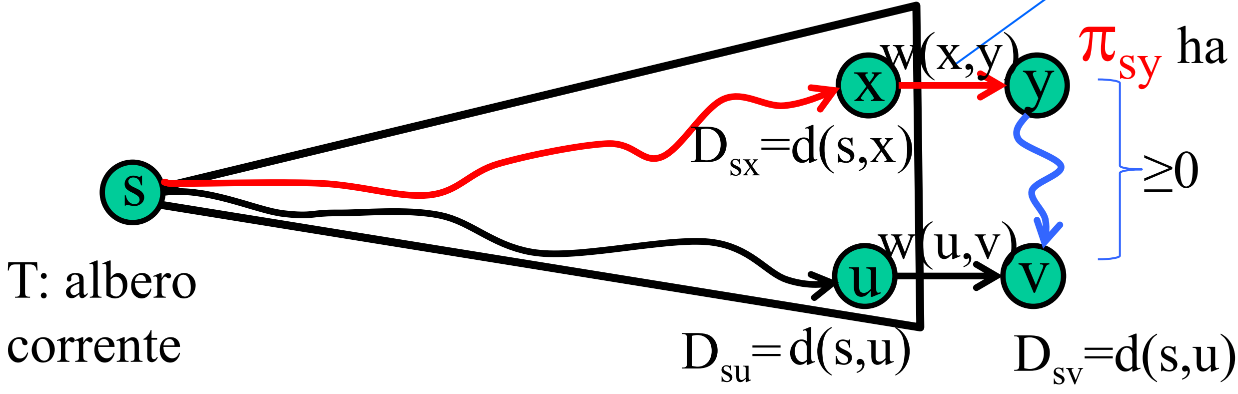
- $D_{sv}=d(s,v)$ (stima esatta)
- il cammino da s a v nell'albero corrente ha costo d(s,v) (camm. min in G)

dim (per assurdo)

Sia v il primo nodo per cui l'alg sbaglia
sia (u,v) l'arco aggiunto all'albero corrente (arco arancione)

(x,y): primo arco del cammino t.c $x \in T$ e $y \notin T$

camm min verso v di costo
$<d(s,u)+w(u,v)$



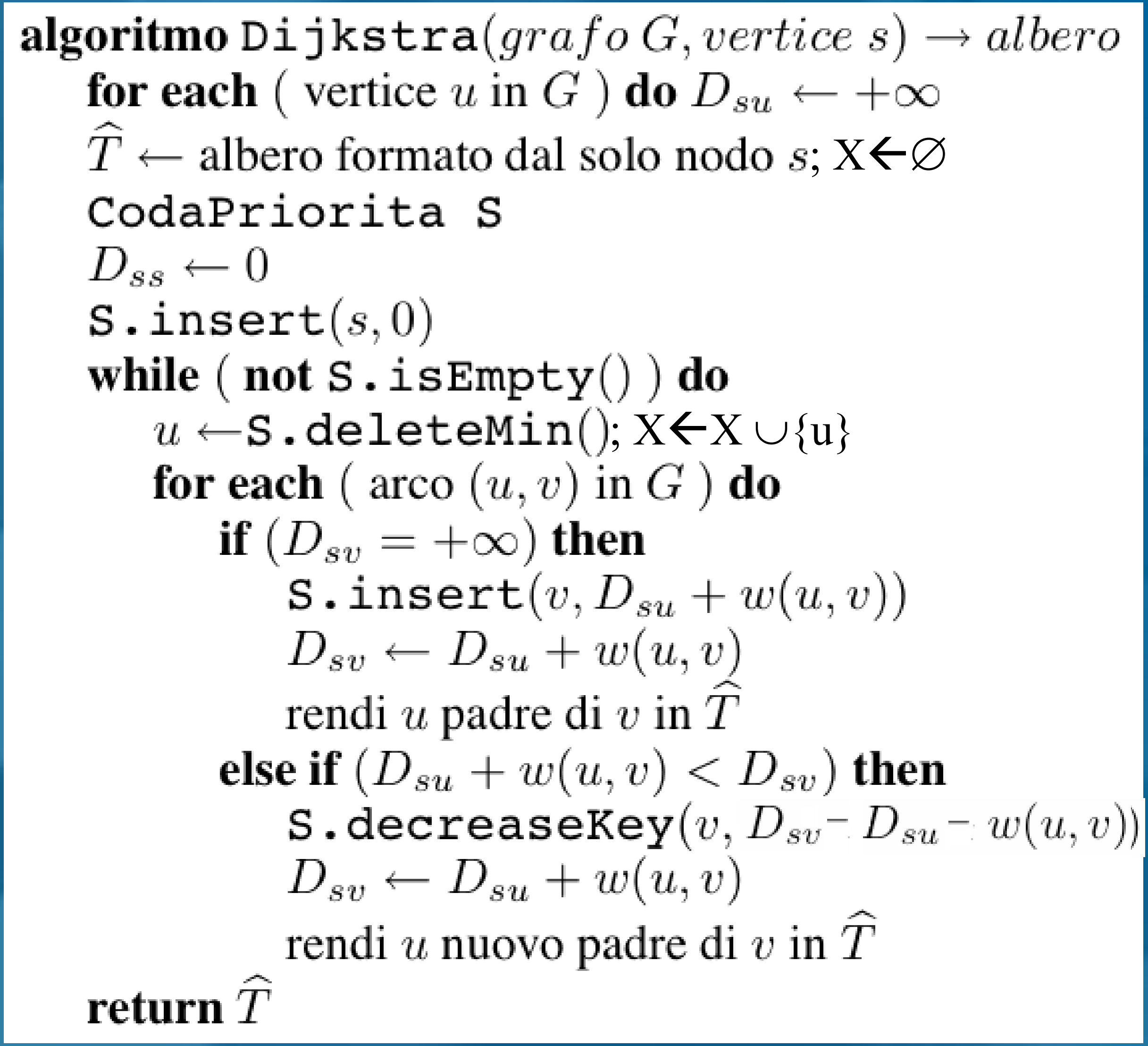
π_{sy} ha costo $d(s,x)+w(x,y)$
$<d(s,u)+w(u,v)$

➡

$D_{sy} \leq d(s,x)+w(x,y) < d(s,u)+w(u,v)$

assurdo: l'alg avrebbe estratto y e non v
(se y=v, v avrebbe avuto una stima più piccola) ■

analisi della complessità



```
algoritmo Dijkstra$(grafo\, G, vertice\ s) \rightarrow albero$
    for each ( vertice $u$ in $G$ ) do $D_{su} \leftarrow +\infty$
    $\widehat{T} \leftarrow$ albero formato dal solo nodo $s$; X←∅
    CodaPriorita S
    $D_{ss} \leftarrow 0$
    S.insert$(s, 0)$
    while ( not S.isEmpty() ) do
        $u \leftarrow$S.deleteMin(); X←X ∪{u}
        for each ( arco $(u, v)$ in $G$ ) do
            if $(D_{sv} = +\infty)$ then
                S.insert$(v, D_{su} + w(u, v))$
                $D_{sv} \leftarrow D_{su} + w(u, v)$
                rendi $u$ padre di $v$ in $\widehat{T}$
            else if $(D_{su} + w(u, v) < D_{sv})$ then
                S.decreaseKey$(v, D_{sv} - D_{su} - w(u, v))$
                $D_{sv} \leftarrow D_{su} + w(u, v)$
                rendi $u$ nuovo padre di $v$ in $\widehat{T}$
    return $\widehat{T}$
```

se si escludono le operazioni sulla coda con priorità:

tempo $O(m+n)$

quanto costano le operazioni sulla coda con priorità?

Tempo di esecuzione: implementazioni elementari

Supponendo che il grafo G sia rappresentato tramite liste di adiacenza, e supponendo che tutti i nodi siano connessi ad s, avremo n `insert`, n `deleteMin` e al più m `decreaseKey` nella coda di priorità, al costo di:

	Insert	DelMin	DecKey
Array non ord.	$O(1)$	$O(n)$	$O(1)$
Array ordinato	$O(n)$	$O(1)$	$O(n)$
Lista non ord.	$O(1)$	$O\ (n)$	$O(1)$
Lista ordinata	$O(n)$	$O(1)$	$O(n)$

- $n\cdot O(1) + n\cdot O(n) + O(m)\cdot O(1) = O(n^2)$ con array non ordinati
- $n\cdot O(n) + n\cdot O(1) + O(m)\cdot O(n) = O(m\cdot n)$ con array ordinati
- $n\cdot O(1) + n\cdot O(n) + O(m)\cdot O(1) = O(n^2)$ con liste non ordinate
- $n\cdot O(n) + n\cdot O(1) + O(m)\cdot O(n) = O(m\cdot n)$ con liste ordinate

Tempo di esecuzione: implementazioni efficienti

Supponendo che il grafo G sia rappresentato tramite liste di adiacenza, e supponendo che tutti i nodi siano connessi ad s, avremo n `insert`, n `deleteMin` e al più m `decreaseKey` nella coda di priorità, al costo di:

	Insert	DelMin	DecKey
Heap binario	O(log n)	O(log n)	O(log n)
Heap Binom.	O(log n)	O(log n)	O(log n)
Heap Fibon.	O(1)	O(log n)* (ammortizzata)	O(1)* (ammortizzata)

- n·O(log n) + n·O(log n) + O(m)·O(log n) = O(m·log n) utilizzando heap binari o binomiali
- n·O(1) + n·O(log n)* + O(m)·O(1)* = O(m + n·log n) utilizzando heap di Fibonacci

soluzione migliore: mai peggiore,
a volte meglio delle altre

Tempo di esecuzione: implementazioni efficienti

Supponendo che il grafo G sia rappresentato tramite liste di adiacenza, e supponendo che tutti i nodi siano connessi ad s, avremo n `insert`, n `deleteMin` e al più m `decreaseKey` nella coda di priorità, al costo di:

	Insert	DelMin	DecKey
Heap binario	O(log n)	O(log n)	O(log n)
Heap Binom.	O(log n)	O(log n)	O(log n)
Heap Fibon.	O(1)	O(log n)* (ammortizzata)	O(1)* (ammortizzata)

- n·O(lo … og n) utilizza
- n·O(1) … n) utilizzando heap di

tempo

$$O(m+n \log n)$$

soluzione migliore: mai peggiore,
a volte meglio delle altre

Osservazione sulla `decreaseKey`

- Ricordiamo che le complessità computazionali esposte per la `decreaseKey` sono valide supponendo di avere un puntatore diretto all'elemento su cui eseguire l'operazione. Come possiamo garantire tale condizione?
- Semplicemente mantenendo un puntatore tra il nodo v nell'array dei nodi della lista di adiacenza del grafo e l'elemento nella coda di priorità associato al nodo v; tale puntatore viene inizializzato nella fase di inserimento di quest'ultimo all'interno della coda.