Algoritmi e Strutture Dati

Capitolo 13
Cammini minimi:
algoritmo di Dijkstra

Cammini minimi in grafi:

cammini minimi a singola sorgente (senza pesi negativi)

Cammini minimi in grafi pesati

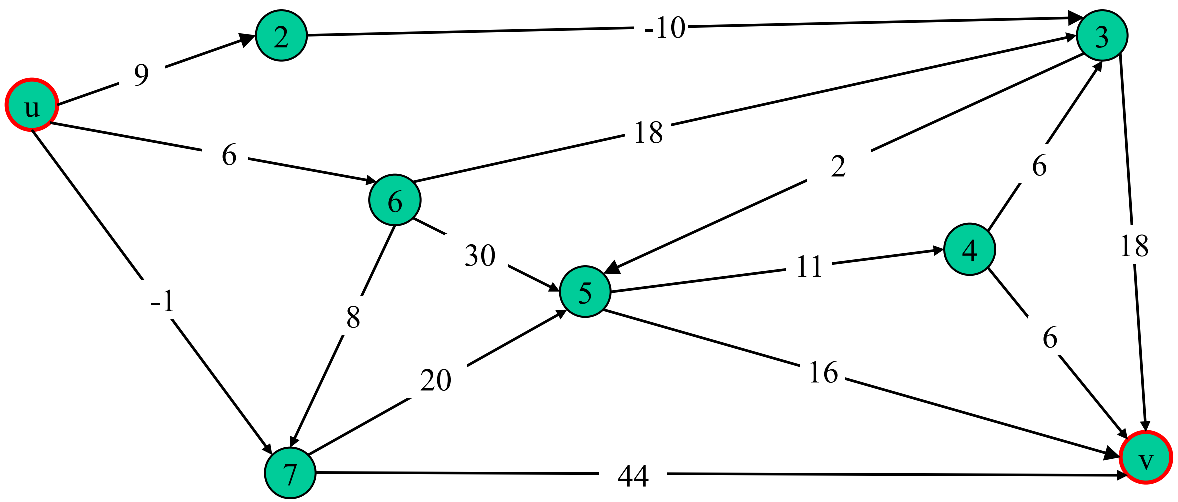
Sia $G=(V,E,w)$ un grafo orientato o non orientato con pesi w reali sugli archi. Il costo o lunghezza di un cammino $\pi=<v_0,v_1,v_2,\ldots,v_k>$ è:

$$w(\pi) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$$

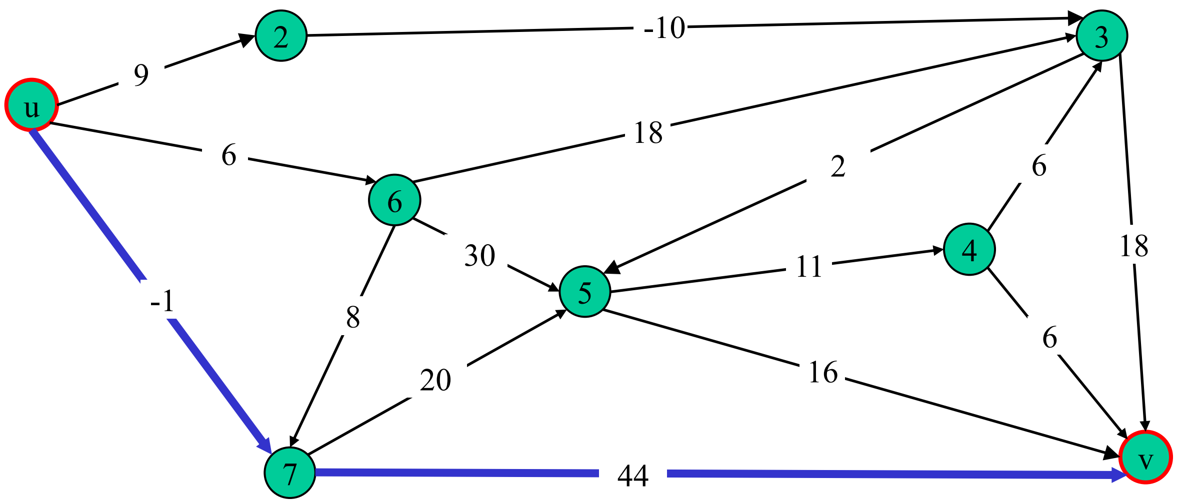
Un cammino minimo tra una coppia di vertici x e y è un cammino avente costo minore o uguale a quello di ogni altro cammino tra gli stessi vertici.

NOTA: Il cammino minimo non è necessariamente unico.

Esempio:
cammino minimo su un grafo pesato

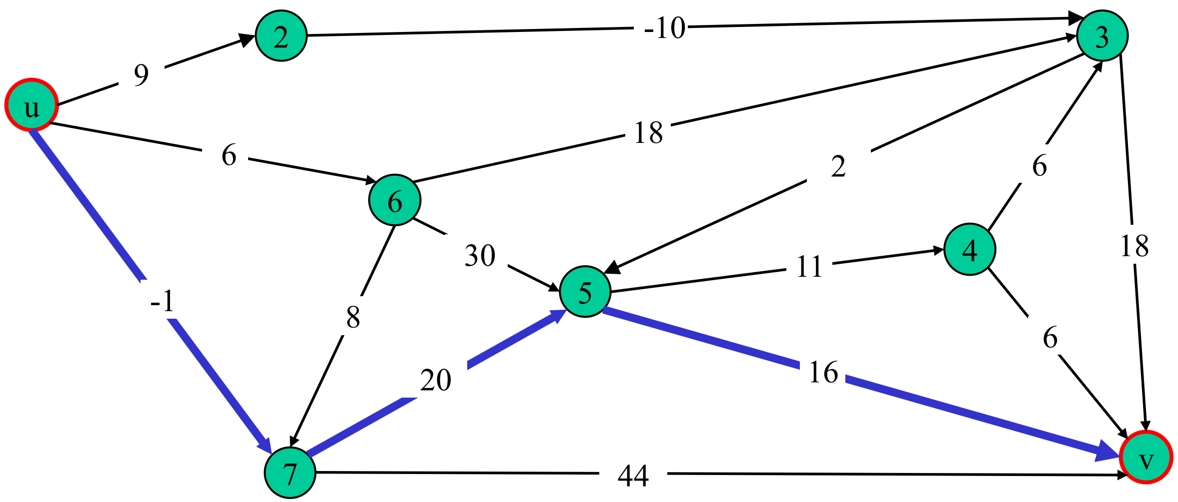


Esempio: cammino minimo su un grafo pesato



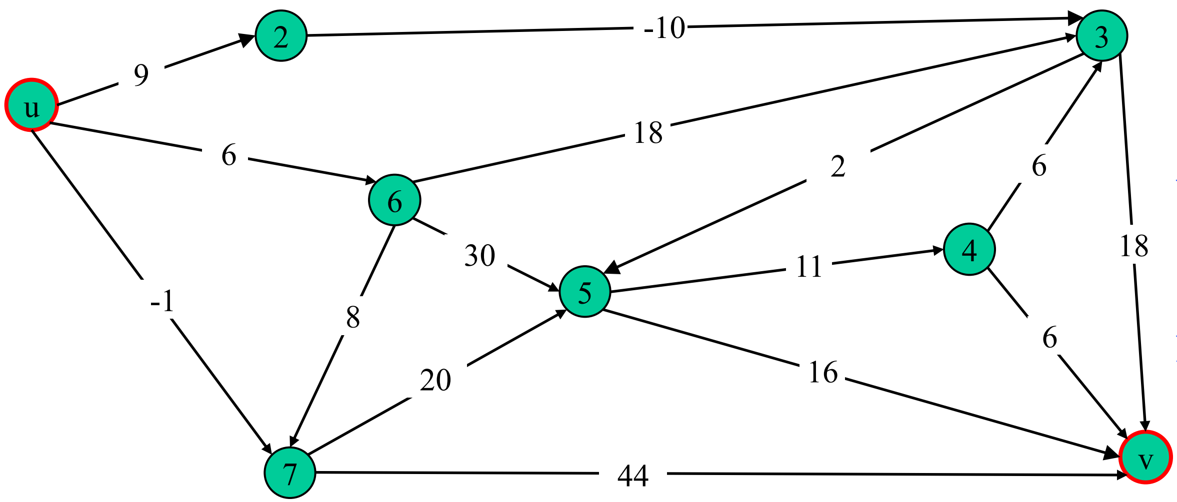
cammino di lunghezza 43

Esempio: cammino minimo su un grafo pesato



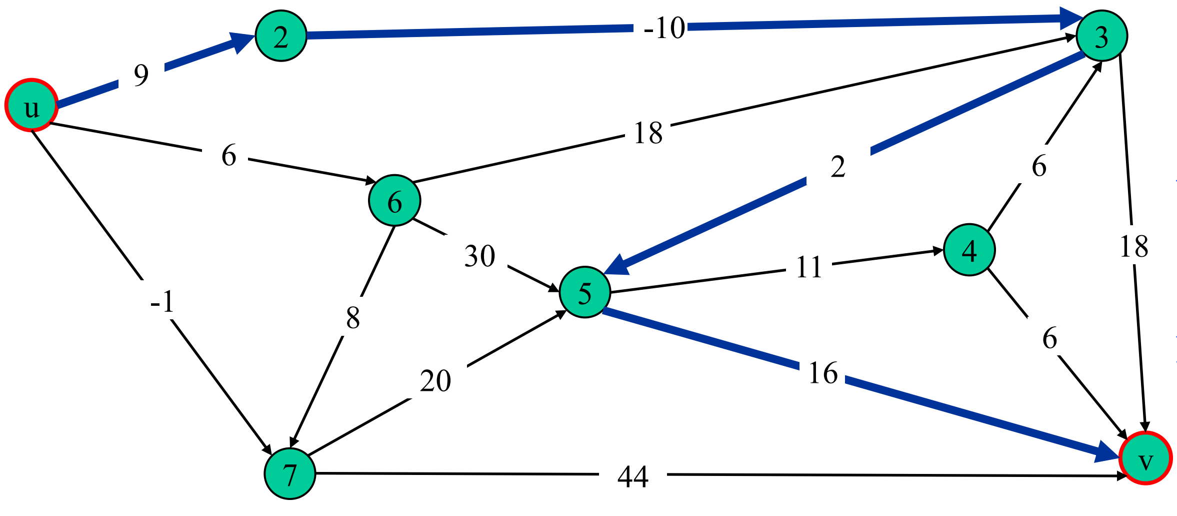
cammino di lunghezza 35

Esempio: cammino minimo su un grafo pesato



la distanza $d_G(u,v)$ da u a v in G è il costo di un qualsiasi cammino minimo da u a v.

Esempio: cammino minimo su un grafo pesato



la distanza $d_G(u,v)$ da u a v in G è il costo di un qualsiasi cammino minimo da u a v.

$d_G(u,v)=17$

Problema: dati *u* e *v*, trovare un cammino minimo (e/o distanza) da *u* a *v*

Algoritmica concreta: il navigatore satellitare

- Siete a casa (punto A) e dovete andare ad un concerto al Palalottomatica (punto B). Non conosce la strada, ma disponete di un moderno navigatore satellitare, il quale lo aiuterà ad arrivare a destinazione:
  1. percorrendo la strada più breve possibile (funzione obiettivo 1), oppure
  2. impiegando il minor tempo possibile (funzione obiettivo 2).
- Come calcola la soluzione? Semplice: rappresenta l'intera rete stradale italiana (centinaia di migliaia di strade!) come un grafo diretto $G=(V,E)$, in cui i nodi sono le intersezioni fisiche tra le varie strade (milioni di nodi!), e gli archi sono le strade stesse, con i loro sensi di marcia. Il grafo viene quindi pesato rispetto alla mia funzione obiettivo, ovvero rispettivamente:
  1. Lunghezza della strada $\Rightarrow$ funzione peso w_1;
  2. Tempo di percorrenza $\Rightarrow$ funzione peso w_2.

  Infine, calcola (**rapidamente!**) il **cammino minimo** in $G=(V,E,w_1)$ e in $G=(V,E,w_2)$ tra A ed B.

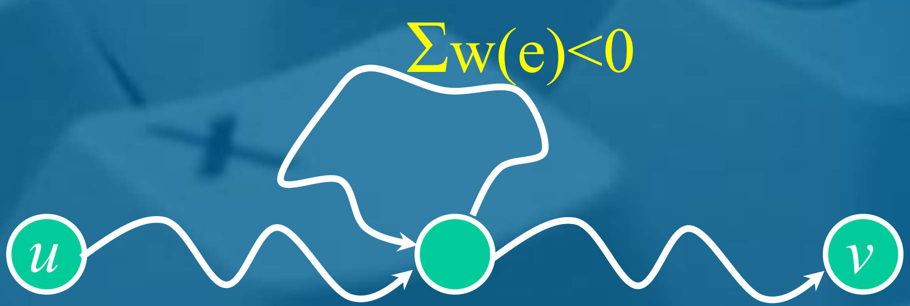
MUNICIPIO ROMA XIV
MUNICIPIO ROMA II
MUNICIPIO ROMA IV
E80
MUNICIPIO ROMA XIII
42 min
15,1 km
MUNICIPIO ROMA V
SS1
La Massimina-casal Lumbroso
MUNICIPIO ROMA XII
Centocelle
32 min
14,0 km
E80
SS6
QUARTIERE X OSTIENSE
MUNICIPIO ROMA XI
A1
Ponte Galeria-la Pisana
SP77b
Palalottomatica
Sole
E80
MUNICIPIO ROMA IX
SS511
Ciampino
Vitinia
ACILIA
SPINACETO
Google
27 min
23,0 km
Zona Industriale Appia Nuova

esiste sempre un cammino minimo fra due nodi?

…no!

- se non esiste nessun cammino da u a v
  - d(u,v)=+∞

- se c'è un cammino che contiene un ciclo il cui costo è negativo
  - d(u,v)=-∞



Oss: se G non contiene cicli negativi, esistono cammini minimi che sono cammini semplici

sottostruttura ottima

Ogni sottocammino di un cammino minimo è un cammino minimo.

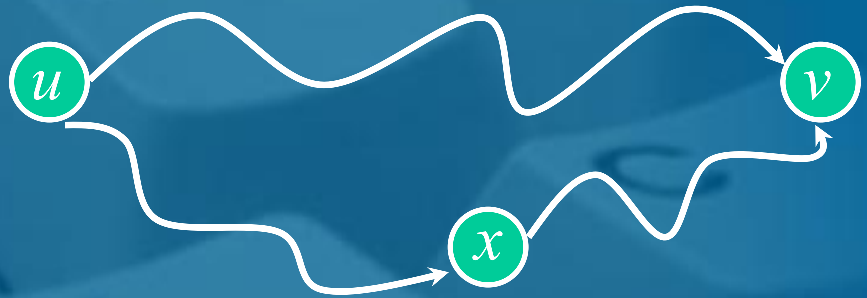
dim: tecnica cut&paste

allora il cammino
da u a v non era minimo!

disuguaglianza triangolare

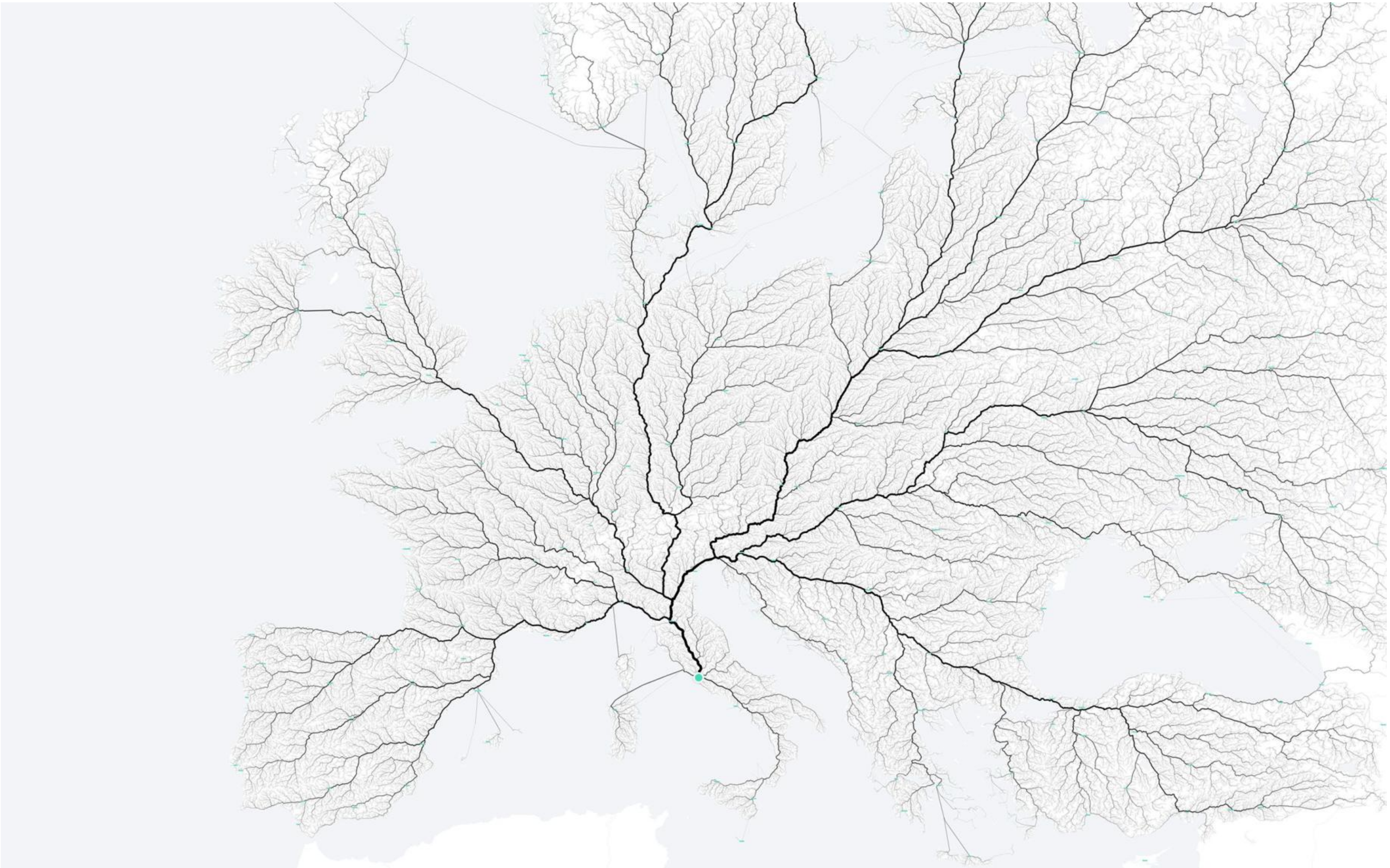
per ogni u, v, x $\in$ V, vale:

$$d(u,v) \leq d(u,x) + d(x,v)$$



il cammino da u a v che passa per x è un cammino nel grafo e quindi il suo costo è almeno il costo del cammino minimo da u a v

Cammini minimi a singola sorgente



Problema del calcolo dei cammini minimi a singola sorgente

Due varianti:

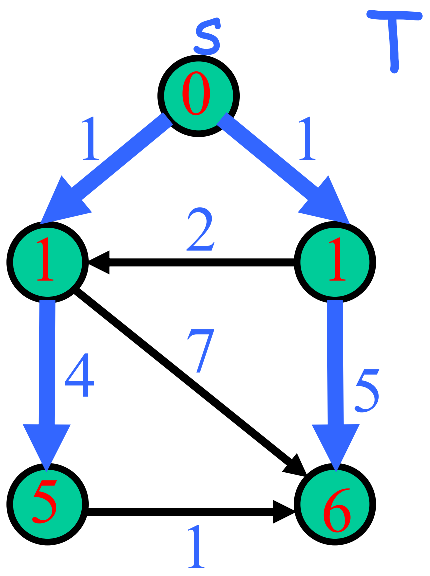
- Dato $G=(V,E,w)$, $s\in V$, calcola le distanze di tutti i nodi da s, ovvero, $d_G(s,v)$ per ogni $v\in V$
- Dato $G=(V,E,w)$, $s\in V$, calcola l'*albero dei cammini minimi* di G radicato in s

Albero dei cammini minimi
(o Shortest Path Tree - SPT)

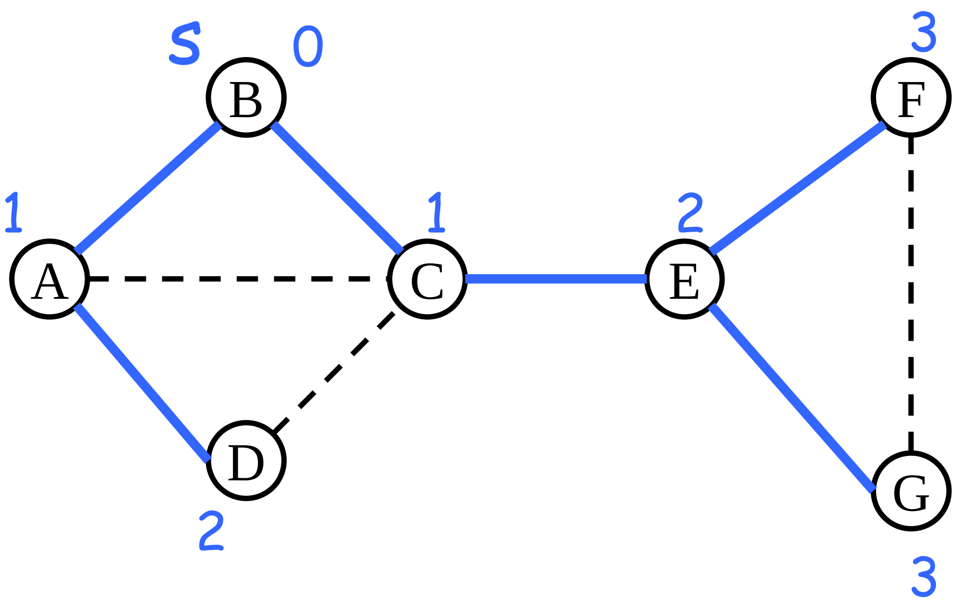
T è un albero dei cammini minimi con sorgente s di un grafo $G=(V,E,w)$ se:

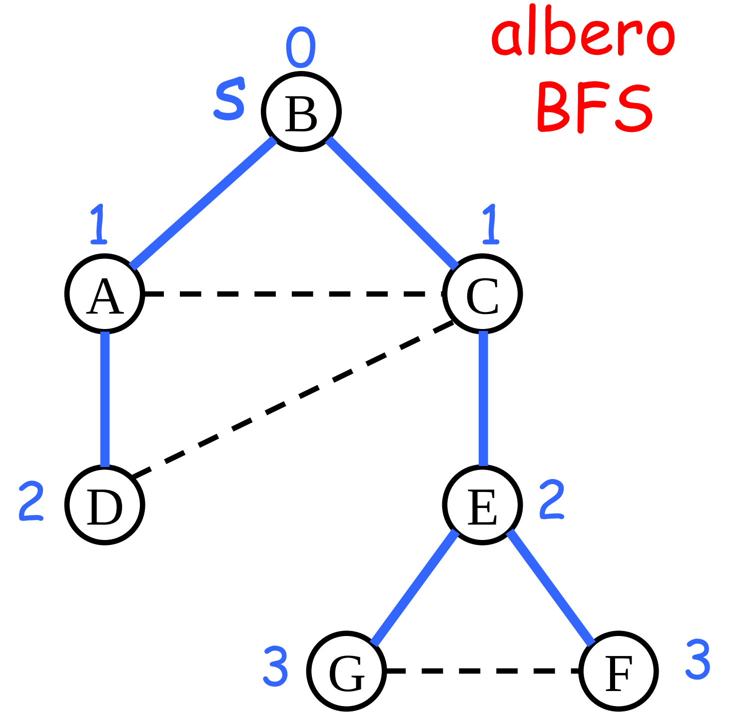
- T è un albero radicato in s
- per ogni $v \in V$, vale:

$$d_T(s,v)=d_G(s,v)$$



Albero dei cammini minimi
(o Shortest Path Tree - SPT)





per grafi non pesati:

SPT radicato in s

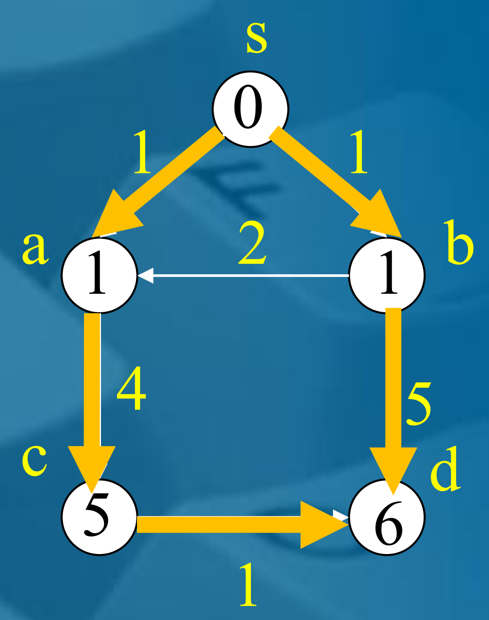
=

Albero BFS radicato in s

Albero dei cammini minimi

- L'**unione di tutti i cammini minimi** da un vertice s a tutti i vertici da esso raggiungibili nel grafo G genera un sottografo di G, detto sottografo dei cammini minimi con sorgente in s
- Se da tale sottografo rimuoviamo archi in modo tale da ridurre ad 1 il grado entrante di tutti i nodi (escluso s che ha grado entrante pari a 0) otterremo un albero orientato con tutti gli archi orientati in direzione delle foglie, detto albero dei cammini minimi radicato in s

Esempio di albero dei cammini minimi



oppure

Esercizio

1. Progettare un algoritmo che, dato un grafo diretto e pesato $G=(V,E,w)$ e un suo albero dei cammini minimi radicato in un nodo s, calcola in tempo lineare le distanze di ogni nodo da s.

2. Progettare un algoritmo che, dato un grafo diretto e pesato $G=(V,E,w)$ e le distanze di ogni nodo da un nodo s, calcola in tempo lineare un albero dei cammini minimi di G radicato in s.

Osservazione: le due varianti del problema sono essenzialmente equivalenti

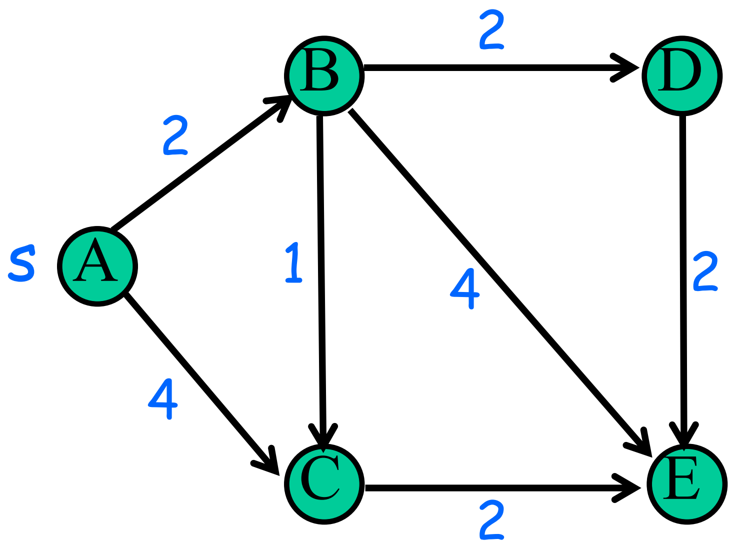
Algoritmo di Dijkstra

Assunzione: tutti gli archi hanno peso non negativo, ovvero ogni arco (u,v) del grafo ha peso $w(u,v) \geq 0$

→ cammini minimi esistono se esistono i cammini dalla sorgente

→ $d(s,v) \geq -\infty$

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

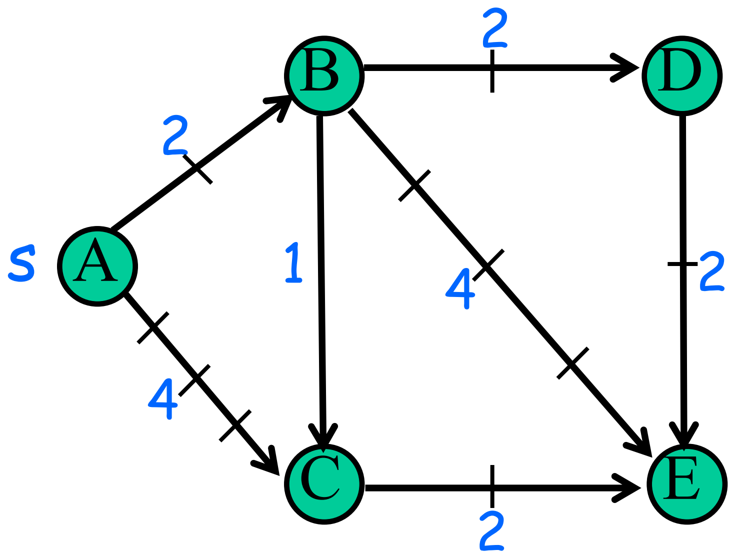


archi come tubi

peso degli archi come lunghezza

acqua scorre a velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

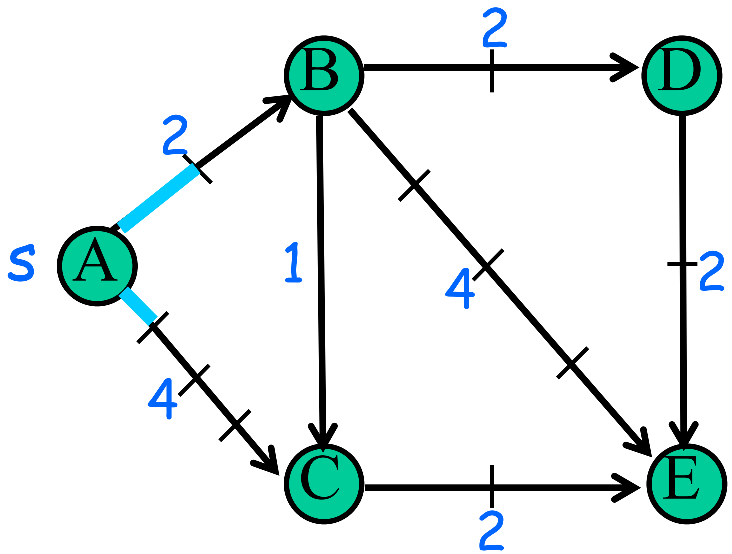


archi come tubi

peso degli archi come lunghezza

acqua scorre a velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

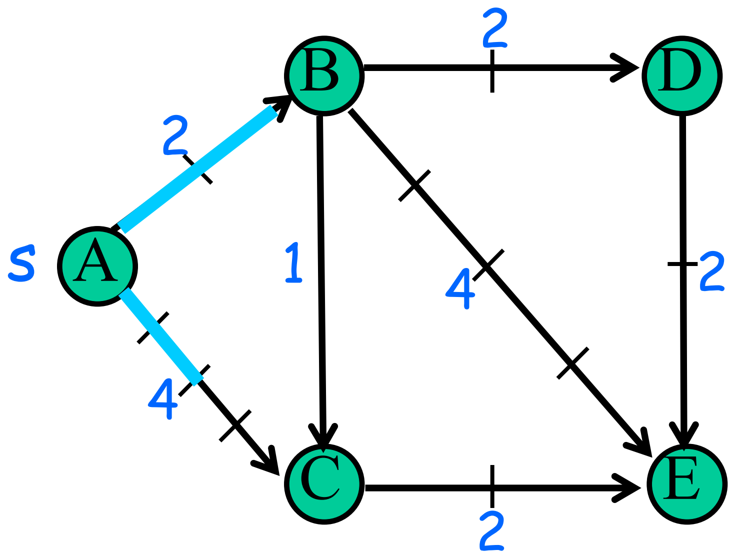


archi come tubi

peso degli archi come lunghezza

acqua scorre a velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

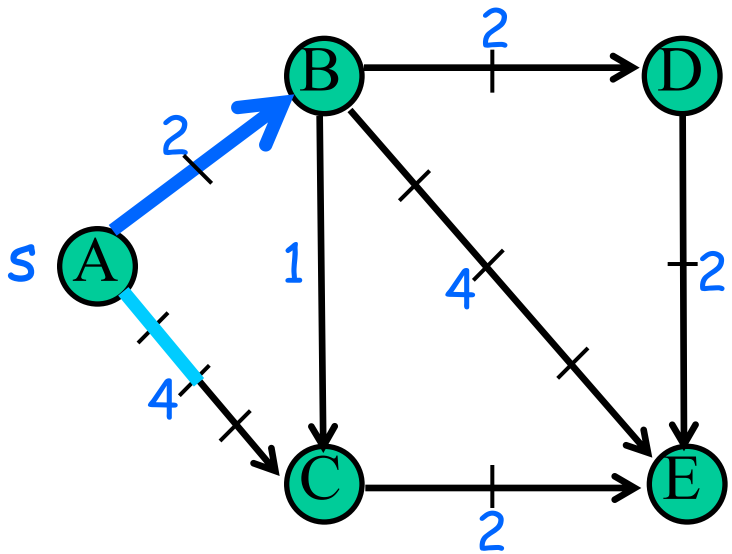


archi come tubi

peso degli archi come lunghezza

acqua scorre a velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

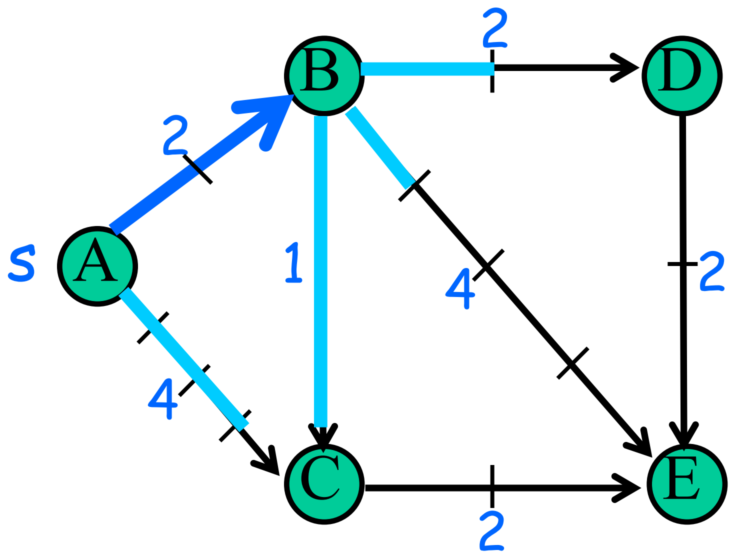


archi come tubi

peso degli archi come lunghezza

acqua scorre a velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

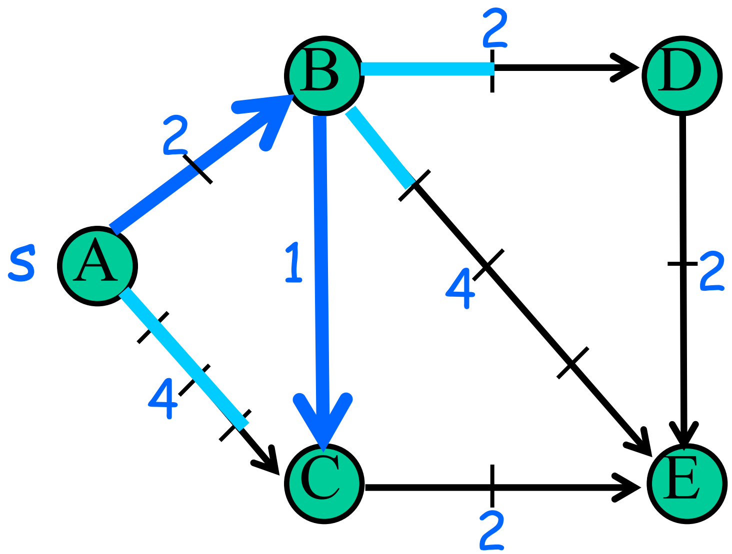


archi come tubi

peso degli archi come lunghezza

acqua scorre a velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

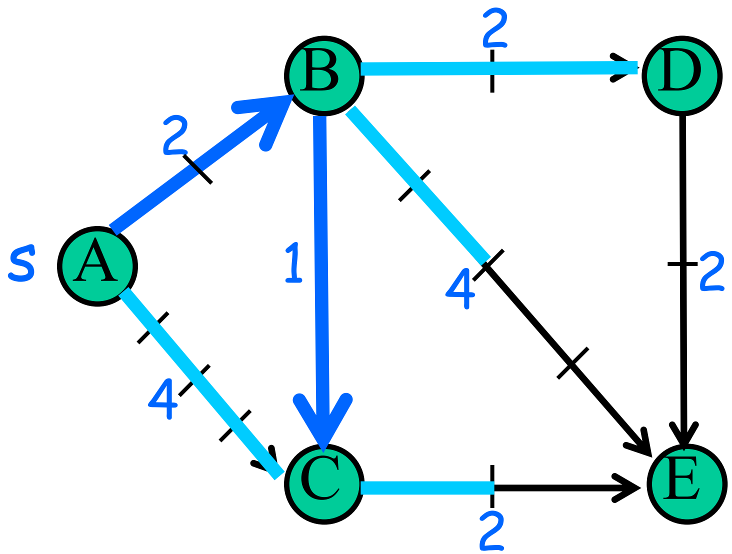


archi come tubi

peso degli archi come lunghezza

acqua scorre a velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

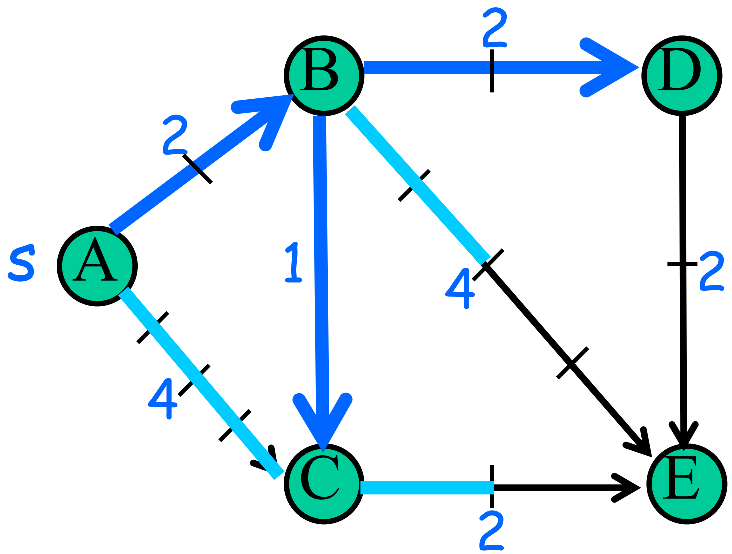


archi come tubi

peso degli archi come lunghezza

acqua scorre a velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

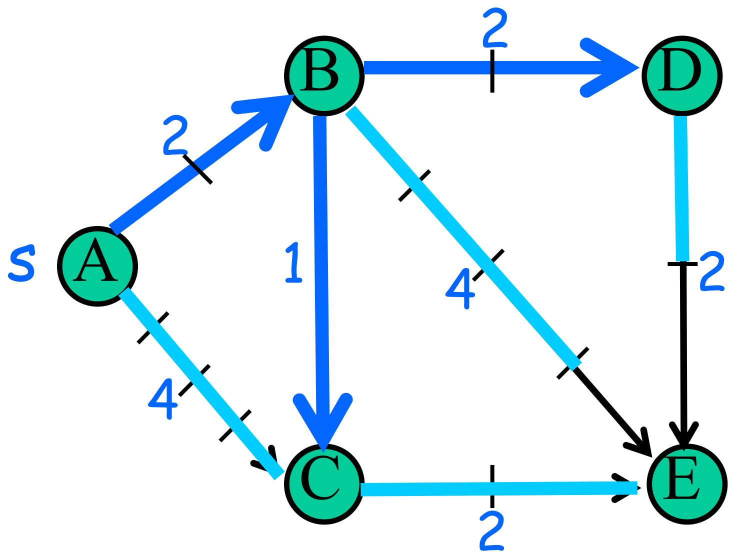


archi come tubi

peso degli archi come lunghezza

acqua scorre a velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

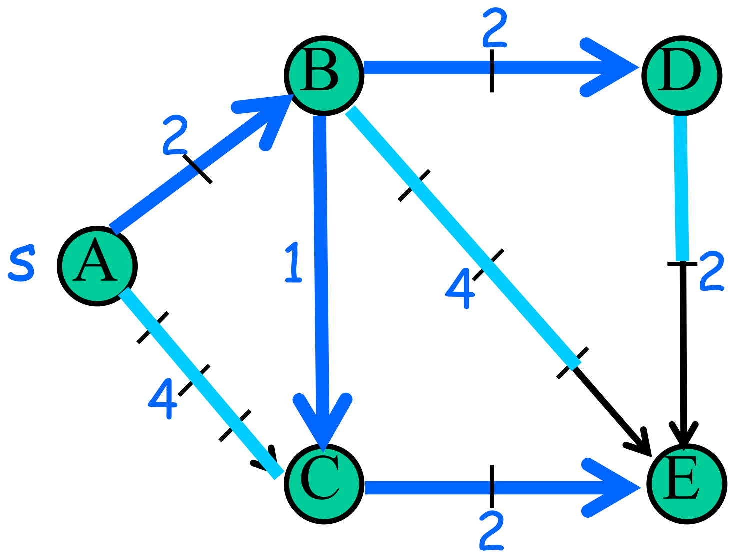


archi come tubi

peso degli archi come lunghezza

acqua scorre a velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

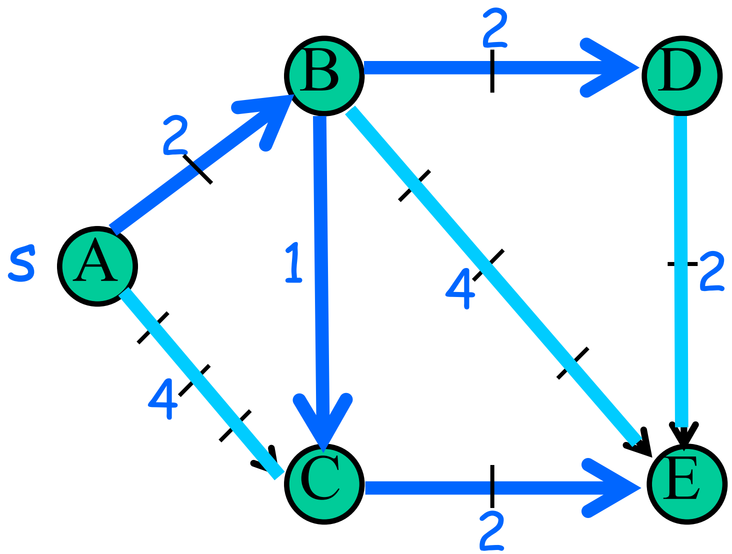


archi come tubi

peso degli archi come lunghezza

acqua scorre a velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente

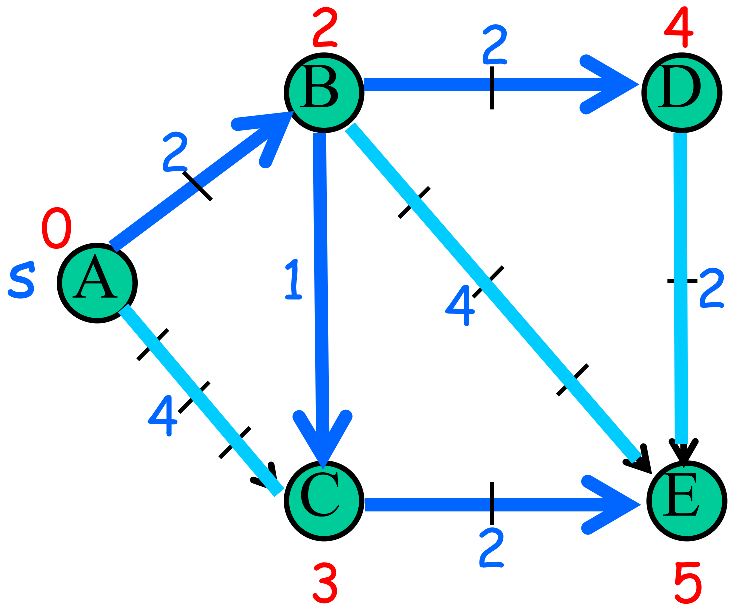


archi come tubi

peso degli archi come lunghezza

acqua scorre a velocità costante

Idea intuitiva dell'algoritmo: pompare acqua nella sorgente



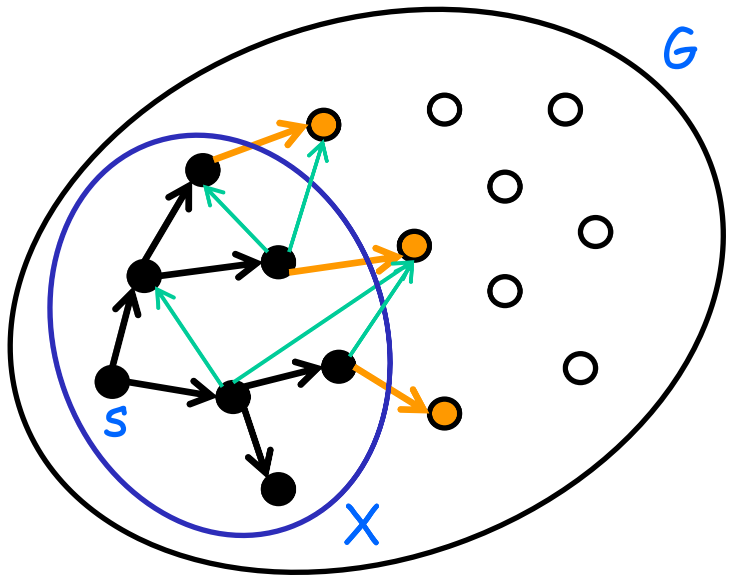
archi come tubi

peso degli archi come lunghezza

acqua scorre a velocità costante

Verso l'algoritmo: approccio greedy (goloso)

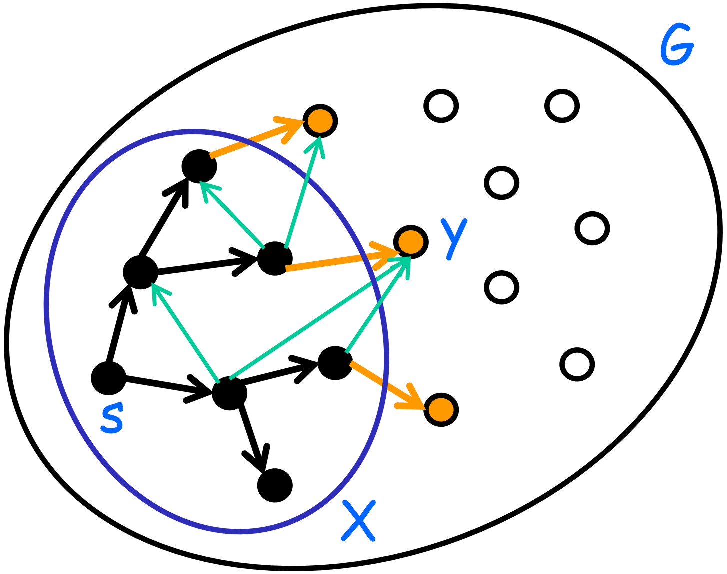
1. mantiene per ogni nodo v una stima (per eccesso) D_{sv} alla distanza d(s,v)
2. mantiene un inseme X di nodi per cui le stime sono esatte; e anche un albero T dei cammini minimi verso nodi in X (albero nero). Inizialmente X={s}, T non ha archi.
3. ad ogni passo aggiunge a X il nodo u in V-X la cui stima è minima; aggiunge a T uno specifico arco (arancione) entrante in u
4. aggiorna le stime guardando i nodi adiacenti a u



I nodi da aggiungere progressivamente a X (e quindi a T) sono mantenuti in una coda di priorità, associati ad un unico arco (arco arancione) che li connette a T.

la stima per un nodo $y \in V-X$ è:
$D_{sy}=\min\{D_{sx}+w(x,y) : (x,y) \in E, x \in X\}$.
L'arco che fornisce il minimo è l'arco arancione.

Se y è in coda con arco (x,y) associato, e se dopo aver aggiunto u a T troviamo un arco (u,y) tale che $D_{su}+w(u,y) < D_{sx}+w(x,y)$, allora rimpiazziamo (x,y) con (u,y), ed aggiorniamo D_{sy}



nodi per i quali non è stato "scoperto" nessun cammino; stima=+∞

nodi "scoperti"; hanno stima<+∞ sono mantenuti in una coda con priorità insieme al "miglior" arco entrante (arancione)

Pseudocodice

algoritmo `Dijkstra`$(grafo\ G, vertice\ s) \rightarrow albero$

  for each (vertice u in G) **do** $D_{su} \leftarrow +\infty$

  $\widehat{T} \leftarrow$ albero formato dal solo nodo s; $X \leftarrow \emptyset$

  `CodaPriorita S`

  $D_{ss} \leftarrow 0$

  `S.insert`$(s, 0)$

  while (**not** `S.isEmpty`$()$) **do**

    $u \leftarrow$`S.deleteMin`$()$; $X \leftarrow X \cup \{u\}$

    for each (arco (u, v) in G) **do**

      if $(D_{sv} = +\infty)$ **then**

        `S.insert`$(v, D_{su} + w(u, v))$

        $D_{sv} \leftarrow D_{su} + w(u, v)$

        rendi u padre di v in $\widehat{T}$

      else if $(D_{su} + w(u, v) < D_{sv})$ **then**

        `S.decreaseKey`$(v, D_{sv} - D_{su} - w(u, v))$

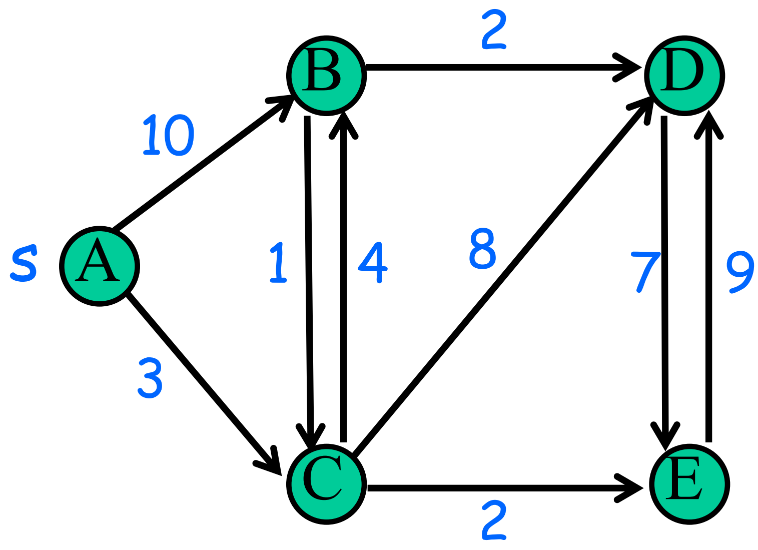
        $D_{sv} \leftarrow D_{su} + w(u, v)$

        rendi u nuovo padre di v in $\widehat{T}$

  return $\widehat{T}$

Nota: $\hat{T}$ è un albero che contiene tutti i nodi in X più i nodi correntemente contenuti nella coda di priorità (nodi arancioni); è composto cioè dagli archi di T (albero dei cammini minimi ristretto ai nodi in X) più gli archi arancioni (potenziali archi da aggiungere a T)

applicare l'algoritmo di Dijkstra al seguente grafo



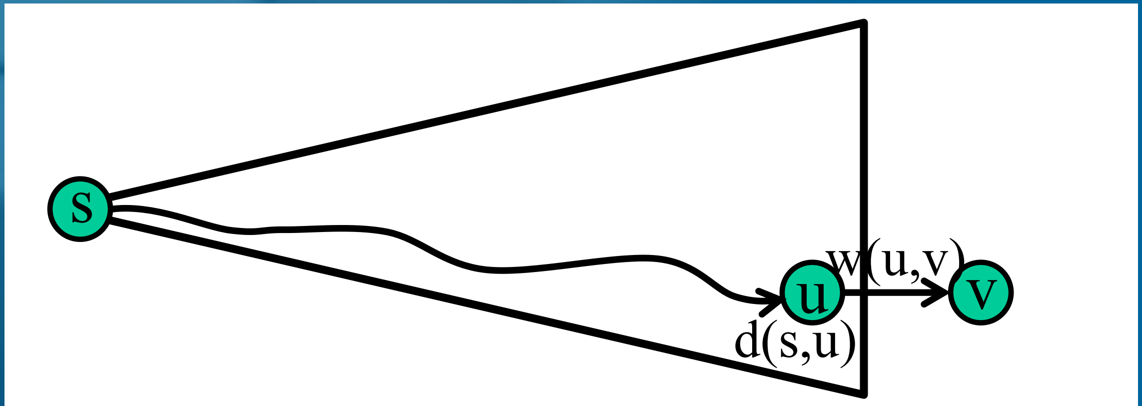
correttezza

Estendere l'albero dei cammini minimi

Lemma di Dijkstra (1959)

Sia G=(V,E,w) (diretto o non diretto) con pesi non negativi, e sia T un sottoalbero dell'albero dei cammini minimi radicato in s che include s ma non include tutti i vertici raggiungibili da s. Sia (u,v) l'arco che **minimizza** la quantità d(s,t) + w(t,z), per ogni $t \in T$ e $z \notin T$. Allora, (u,v) appartiene a un cammino minimo da s a v.

Dim.: Supponiamo per assurdo che (u,v) non appartenga ad un cammino minimo da s a v, e quindi che $d(s,v) < d(s,u) + w(u,v)$. Allora, d(s,v) è la lunghezza di un cammino minimo da s a v che non passa per (u,v).

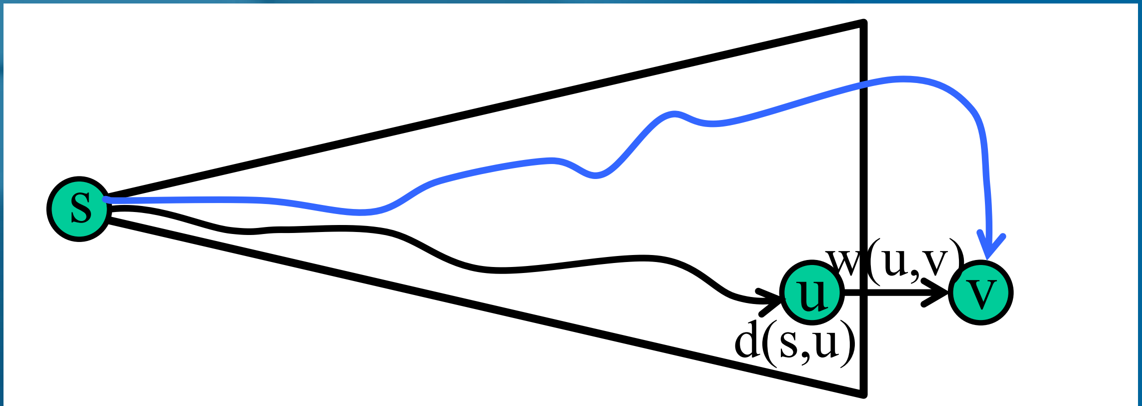


Estendere l'albero dei cammini minimi

Lemma di Dijkstra (1959)

Sia G=(V,E,w) (diretto o non diretto) con pesi non negativi, e sia T un sottoalbero dell'albero dei cammini minimi radicato in s che include s ma non include tutti i vertici raggiungibili da s. Sia (u,v) l'arco che **minimizza** la quantità d(s,t) + w(t,z), per ogni $t \in T$ e $z \notin T$. Allora, (u,v) appartiene a un cammino minimo da s a v.

Dim.: Supponiamo per assurdo che (u,v) non appartenga ad un cammino minimo da s a v, e quindi che d(s,v) < d(s,u) +w(u,v). Allora, d(s,v) è la lunghezza di un cammino minimo da s a v che non passa per (u,v).

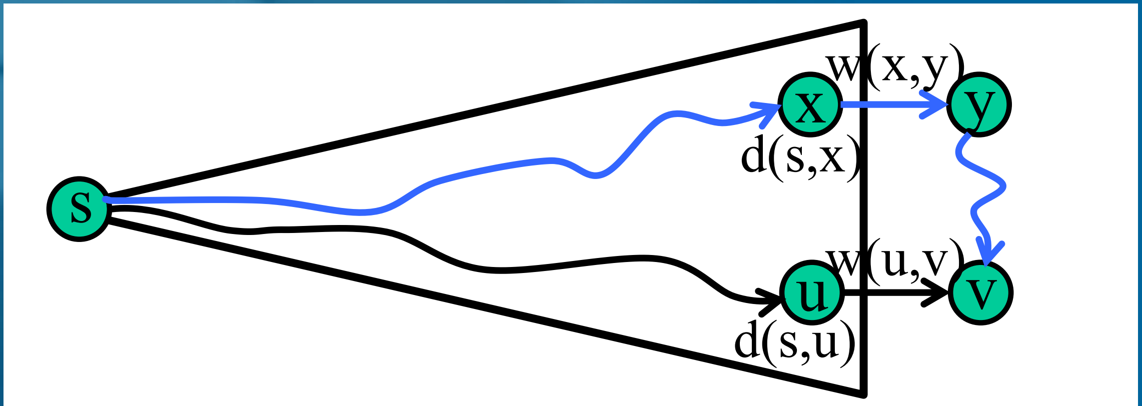


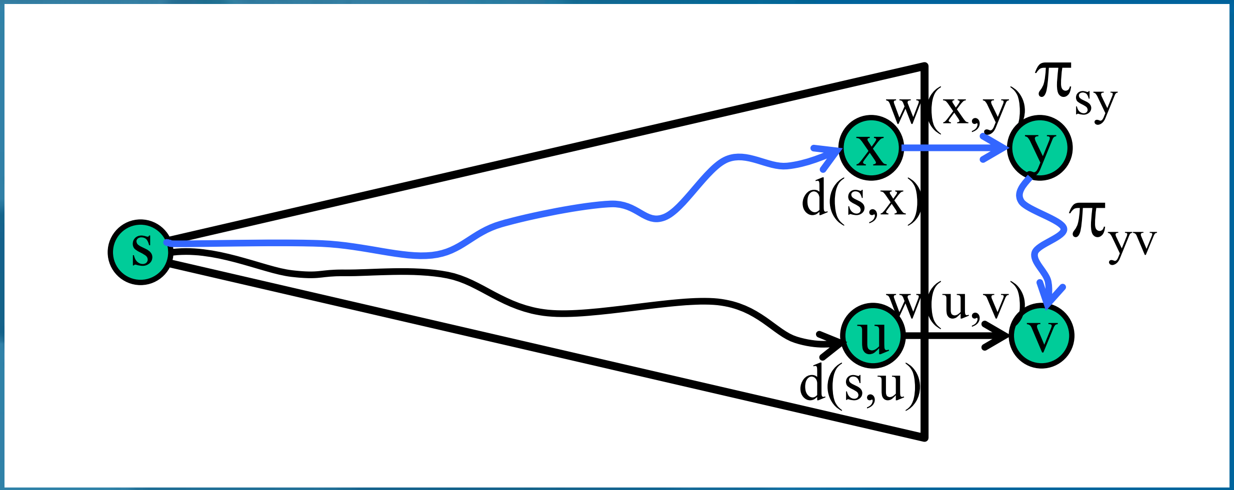
Estendere l'albero dei cammini minimi

Lemma di Dijkstra (1959)

Sia G=(V,E,w) (diretto o non diretto) con pesi non negativi, e sia T un sottoalbero dell'albero dei cammini minimi radicato in s che include s ma non include tutti i vertici raggiungibili da s. Sia (u,v) l'arco che **minimizza** la quantità $d(s,t) + w(t,z)$, per ogni $t \in T$ e $z \notin T$. Allora, (u,v) appartiene a un cammino minimo da s a v.

Dim.: Supponiamo per assurdo che (u,v) non appartenga ad un cammino minimo da s a v, e quindi che $d(s,v) < d(s,u) + w(u,v)$. Allora, d(s,v) è la lunghezza di un cammino minimo da s a v che non passa per (u,v). Tale cammino, per uscire da T, deve allora passare per un qualche arco $(x,y) \neq (u,v)$, con $x \in T$ e $y \notin T$. Sia quindi $\pi_{sv} = \langle s,\ldots,x,y,\ldots,v \rangle$.





Per la minimalità dei sottocammini di un cammino minimo:

$$w(\pi_{sv}) = w(\pi_{sy}) + w(\pi_{yv}) = d(s,x) + w(x,y) + w(\pi_{yv}).$$

Quindi: $w(\pi_{sv}) < d(s,u) + w(u,v)$

$$d(s,x) + w(x,y) + \underbrace{w(\pi_{yv})}_{\geq 0} < d(s,u) + w(u,v)$$

$$d(s,x) + w(x,y) < d(s,u) + w(u,v)$$

ma (u,v) minimizza $d(s,t) + w(t,z)$ per ogni $t \in T$ e $z \notin T$, quindi:

$$d(s,x) + w(x,y) \geq d(s,u) + w(u,v)$$

assurdo!

analisi della complessità

algoritmo `Dijkstra`$(grafo\ G, vertice\ s) \rightarrow albero$

for each (vertice u in G) **do** $D_{su} \leftarrow +\infty$

$\widehat{T} \leftarrow$ albero formato dal solo nodo s; X←∅

`CodaPriorita S`

$D_{ss} \leftarrow 0$

`S.insert`$(s, 0)$

while (**not** `S.isEmpty`()) **do**

$u \leftarrow$`S.deleteMin`(); X←X ∪{u}

for each (arco (u, v) in G) **do**

if $(D_{sv} = +\infty)$ **then**

`S.insert`$(v, D_{su} + w(u, v))$

$D_{sv} \leftarrow D_{su} + w(u, v)$

rendi u padre di v in $\widehat{T}$

else if $(D_{su} + w(u, v) < D_{sv})$ **then**

`S.decreaseKey`$(v, D_{sv} - D_{su} - w(u, v))$

$D_{sv} \leftarrow D_{su} + w(u, v)$

rendi u nuovo padre di v in $\widehat{T}$

return $\widehat{T}$

se si escludono le operazioni sulla coda con priorità:

tempo O(m+n)

quanto costano le operazioni sulla coda con priorità?

Tempo di esecuzione: implementazioni elementari

Supponendo che il grafo G sia rappresentato tramite liste di adiacenza, e supponendo che tutti i nodi siano connessi ad s, avremo n `insert`, n `deleteMin` e al più m `decreaseKey` nella coda di priorità, al costo di:

	Insert	DelMin	DecKey
Array non ord.	O(1)	O(n)	O(1)
Array ordinato	O(n)	O(1)	O(n)
Lista non ord.	O(1)	O (n)	O(1)
Lista ordinata	O(n)	O(1)	O(n)

- $n \cdot O(1) + n \cdot O(n) + O(m) \cdot O(1) = O(n^2)$ con array non ordinati
- $n \cdot O(n) + n \cdot O(1) + O(m) \cdot O(n) = O(m \cdot n)$ con array ordinati
- $n \cdot O(1) + n \cdot O(n) + O(m) \cdot O(1) = O(n^2)$ con liste non ordinate
- $n \cdot O(n) + n \cdot O(1) + O(m) \cdot O(n) = O(m \cdot n)$ con liste ordinate

Tempo di esecuzione: implementazioni efficienti

Supponendo che il grafo G sia rappresentato tramite liste di adiacenza, e supponendo che tutti i nodi siano connessi ad s, avremo n `insert`, n `deleteMin` e al più m `decreaseKey` nella coda di priorità, al costo di:

	Insert	DelMin	DecKey
Heap binario	O(log n)	O(log n)	O(log n)
Heap Binom.	O(log n)	O(log n)	O(log n)
Heap Fibon.	O(1)	O(log n)* (ammortizzata)	O(1)* (ammortizzata)

- $n \cdot O(\log n) + n \cdot O(\log n) + O(m) \cdot O(\log n) = O(m \cdot \log n)$ utilizzando heap binari o binomiali
- $n \cdot O(1) + n \cdot O(\log n)^* + O(m) \cdot O(1)^* = O(m + n \cdot \log n)$ utilizzando heap di Fibonacci

soluzione migliore: mai peggiore,
a volte meglio delle altre

Osservazione sulla `decreaseKey`

- Ricordiamo che le complessità computazionali esposte per la `decreaseKey` sono valide supponendo di avere un puntatore diretto all'elemento su cui eseguire l'operazione. Come possiamo garantire tale condizione?
- Semplicemente mantenendo un puntatore tra il nodo v nell'array dei nodi della lista di adiacenza del grafo e l'elemento nella coda di priorità associato al nodo v; tale puntatore viene inizializzato nella fase di inserimento di quest'ultimo all'interno della coda.