

Cognome:..... Nome:..... Matr.:.....

Esercizio 1 [16 punti]

A: notazione asintotica. Dire quali delle seguenti relazioni asintotiche sono vere:

$$\sqrt{n} \log n + n\sqrt{n} = O(n); \quad \sqrt{\log \log n} = o(\log \log n); \quad n^{1.5} = \Theta\left(\frac{n^2+1}{\sqrt{n}}\right); \quad 2^{\frac{1}{2}n} = \Theta(2^n);$$

B: equazioni di ricorrenza. Fornire la soluzione asintotica alle seguenti relazioni di ricorrenza:

$$T(n) = 3T(n/9) + \sqrt[3]{n}; \quad \text{Soluzione:}$$

$$T(n) = 2T(n-2) + 1; \quad \text{Soluzione:}$$

C: algoritmi e complessità. Quale algoritmo useresti e quanto costa se devi:

- Costruire un heap binario di n elementi:
- Trovare un elemento x in una lista ordinata implementata con record e puntatori:
- Dato un grafo non orientato, capire se il suo diametro¹ è al più un certo valore L :
- Dato un grafo diretto G con pesi positivi sugli archi, un nodo s e un valore L , dire se esiste un nodo t la cui distanza verso s è più grande di L :

Esercizio 2 [8 punti]

Sia T un albero binario radicato di n nodi in cui ad ogni nodo v è associato un valore $\alpha(v)$. Diciamo che un nodo v è *crescente* se la sequenza dei valori dei nodi del cammino che va dalla radice fino a v è strettamente crescente, mentre diremo che v è *pari* se il numero di nodi di tale cammino è un numero pari.

Progettare un algoritmo di complessità $O(n)$ che restituisce il numero di foglie crescenti e pari di T . Si assuma che T è mantenuto con una struttura dati collegata, fatta di record e puntatori, e che il record di un nodo v contenga i seguenti campi: il puntatore al figlio sinistro $\text{sin}(v)$, quello al figlio destro $\text{des}(v)$, e un campo $\alpha(v)$. Si fornisca lo pseudocodice dettagliato dell'algoritmo.

Esercizio 3 [8 punti]

Sia A una matrice $n \times m$ di bit, dove quindi $A[i, j] \in \{0, 1\}$ per ogni $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$. Progettate un *oracolo* (ovvero una struttura dati) che è in grado di rispondere in tempo costante al seguente tipo di *query*:

- **UniCoperti**(i, j, h): chiedere di restituire il numero di uni della matrice che vengono coperti da un quadrato di lato h posizionato sulla matrice in modo che l'elemento in alto a sinistra del quadrato coincida con l'elemento (i, j) della matrice.

L'algoritmo di costruzione dell'oracolo deve avere complessità temporale $O(mn)$. Si fornisca la descrizione, lo pseudocodice e l'analisi dell'algoritmo che costruisce l'oracolo e quello che risponde a una generica query.

¹Si ricorda che il diametro di un grafo è la massima distanza fra due nodi.