

Cognome:..... Nome:..... Matr:.....

Esercizio 1 [11 punti] Si consideri il problema del calcolo del minimo albero ricoprente (*Minimum Spanning Tree problem*) che prende in input un grafo non orientato e pesato $G = (V, E, w)$ di n nodi.

1. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

- Se i pesi sono distinti allora l'algoritmo di Kruskal e quello di Prim calcolano lo stesso identico albero indipendentemente dal nodo s di partenza (sorgente) scelto dall'algoritmo di Prim.
- Si assuma che per ogni arco e vale $w(e) \in \{1, 2\}$, e sia T un MST di G . Allora ogni MST di G costa almeno $n - 1$ e al più $2n - 2$.
- Sia T un MST di G e sia f un arco che non appartiene a T , allora f è l'arco più pesante di ogni ciclo di G che lo contiene.
- Sia T un MST di G e sia f un arco che non appartiene a T , allora l'arco f è l'arco più pesante di almeno un taglio di G .
- Se G ha $\Theta(n\sqrt{n})$ archi, allora l'algoritmo di Prim che implementa la coda con priorità attraverso un heap di Fibonacci ha complessità lineare, ovvero $\Theta(n\sqrt{n})$.

2. Sia $N > 2$ un intero. Si consideri il grafo non orientato di $n = N^2$ nodi disposti su un piano a formare una griglia $N \times N$, dove ogni nodo è collegato ai suoi (al più) quattro nodi vicini orizzontalmente e verticalmente. In particolare il nodo in posizione (i, j) , con $i, j \in \{1, \dots, N\}$, ha un arco verso il nodo $(i, j - 1)$ (se esiste) e verso il nodo $(i, j + 1)$ (se esiste) di peso 1, e ha un arco verso il nodo $(i - 1, j)$ (se esiste) di peso $i - 1 + j$ e un arco verso il nodo $(i + 1, j)$ (se esiste) di peso $i + j$.

Si descriva come è fatto un MST del grafo e si derivi una formula chiusa per il suo peso. (Max 5 righe.)

Esercizio 2 [11 punti] Si consideri il problema del calcolo del *massimo flusso* (*max flow problem*).

1. Si definisca formalmente il problema. (Max 5 righe.)
2. Si definisca formalmente il concetto di rete residua. (Max 5 righe.)
3. Si dimostri che se nella rete residua corrispondente ad un certo flusso f non c'è nessun cammino dalla sorgente al pozzo, allora f è un flusso massimo. (Max 5 righe.)

Esercizio 3 [11 punti] In una via ci sono n case, numerate da 1 a n , che devi ridipingere. I colori a disposizione sono tre: rosso, verde e blu. Per ogni casa i e colore x conosci il costo $c(i, x)$ che sosterresti se colorassi la casa di quel colore. Hai però dei vincoli. Intanto non puoi colorare case adiacenti con lo stesso colore. Inoltre, non hai molta vernice rossa a disposizione. Diciamo che puoi colorare di rosso al più k case.

Progettate un algoritmo di programmazione dinamica che calcoli il costo minimo per colorare le case. Si discuta la complessità temporale della soluzione proposta.