

Cognome:..... Nome:..... Matr.:.....

Esercizio 1 [16 punti]

A: *notazione asintotica*. Dire quali delle seguenti relazioni asintotiche sono vere:

$$\frac{n^{3/2}+n^2}{\sqrt{n+1}} = \Theta(n); \quad \log n = O(\log \log n); \quad n\sqrt{n} = \omega(n \log n); \quad 2^{n+\log n} = \omega(2^n);$$

B: *equazioni di ricorrenza*. Fornire la soluzione asintotica alle seguenti relazioni di ricorrenza:

$$T(n) = T(n/8) + n; \quad \text{Soluzione:}$$

$$T(n) = T(\sqrt{n}) + 1; \quad \text{Soluzione:}$$

C: *algoritmi e complessità*. Quale algoritmo useresti e quanto costa se devi:

- Calcolare l' n -esimo numero di Fibonacci:
- Fare il *merge* di due heap binari:
- Dato un grafo diretto, dire se c'è un modo di disegnarlo mettendo i nodi lungo una linea orizzontale in modo tale che tutti gli archi sono diretti da sinistra a destra:
- Dato un grafo diretto G , dire se tutte le coppie di nodi sono mutuamente raggiungibili:

Esercizio 2 [8 punti]

Sia V un vettore di n bit. Progettare una struttura dati che risponde a domande del seguente tipo:

- **query**(i, d): dato un indice $i \in \{1, \dots, n\}$ e una direzione $x \in \{s, d\}$, restituisce il numero di uni strettamente a sinistra di i , se $x = s$, e il numero di uni strettamente a destra di i altrimenti.

L'algoritmo di costruzione della struttura dati deve avere complessità $O(n)$ mentre la complessità dell'algoritmo che risponde alla generica query deve essere $O(1)$. Si forniscano gli pseudocodici dettagliati dei due algoritmi.

Esercizio 3 [8 punti]

Una rete di comunicazione è modellata come un grafo diretto $G = (V, E)$ in cui ogni arco $e \in E$ ha un costo di attraversamento $w(e)$ e un colore $c(e) \in \{1, 2, 3\}$. Il colore di un arco indica il tipo di tecnologia utilizzata da quell'arco (link di comunicazione). Si vuole inviare un pacchetto da un nodo sorgente s a una destinazione t attraverso un cammino. Il costo del cammino è dato dalla somma dei costi degli archi del cammino, più un costo di penalità $\sigma > 0$ che viene sostenuto tutte le volte che il cammino cambia colore (tale costo modella il costo che viene sostenuto per rimodulare il pacchetto in accordo alla tecnologia del prossimo arco da attraversare).¹ Progettate un algoritmo efficiente che calcoli il cammino di costo totale minimo su cui inviare il pacchetto.

¹Per esempio, un cammino di archi tutti di un colore non ha nessun costo di penalità, mentre un cammino composto da una sequenza di archi di colore 1, seguita da una di colore 3, seguita da un'altra di colore 1, ha una penalità pari a 2σ , e così via.