

Cognome:..... Nome:..... Matr:.....

Esercizio 1 [16 punti]

A: *notazione asintotica*. Dire quali delle seguenti relazioni asintotiche sono vere:

$$n \log n + \sqrt{n} = \Theta\left(\frac{n^{3/2}}{\sqrt{n+3}}\right); \quad \log^2 n = \Theta(\log n^2); \quad \sqrt{\log n} = o(\log \log n); \quad 2^{2n} = \omega(2^n);$$

B: *equazioni di ricorrenza*. Fornire la soluzione asintotica alle seguenti relazioni di ricorrenza:

$$T(n) = 2T(n/4) + 1; \quad \text{Soluzione:}$$

$$T(n) = 2T(n-2) + 1; \quad \text{Soluzione:}$$

C: *algoritmi e complessità*. Quale algoritmo useresti e quanto costa se devi:

- Cercare un elemento in un vettore ordinato di n elementi:

- Dato un vettore di n numeri, trovare i primi $\lceil \sqrt{n} \rceil$ valori più piccoli:

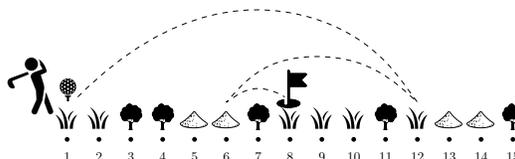
- Trovare il diametro di un grafo non orientato e non pesato, ovvero la massima distanza fra due nodi:

- Costruire un albero AVL con n specifiche chiavi prese in input:

Esercizio 2 [8 punti] (*inclusion coefficient*)

Dati due insiemi A e B , definiamo l'*inclusion coefficient* di B in A il valore numerico: $\Phi(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A|}$. Dati due insiemi A e B di n elementi ciascuno memorizzati in due vettori, progettare un algoritmo che calcoli $\Phi(A, B)$ in tempo $o(n^2)$. Si fornisca lo pseudocodice dettagliato dell'algoritmo.

Tipo Terreno	Mazza 1	Mazza 2
1 	6	11
2 	3	5
3 	1	2



Esercizio 3 [8 punti] (*golf unidimensionale*)

Partecipate a un importante torneo di golf unidimensionale, uno strano sport simile al golf in cui il campo è un segmento di terreno stretto e lungo discretizzato in n posizioni consecutive indirizzate con gli interi da 1 ad n . La pallina si trova inizialmente in posizione 1, mentre la buca si trova in posizione $b \in \{2, \dots, n\}$. Esistono 3 diversi tipi di terreno, indicizzati con gli interi da 1 a 3, e a ogni posizione i è associato un tipo $t_i \in \{1, 2, 3\}$. Avete inoltre a disposizione 2 mazze e potete scegliere liberamente la mazza da usare per ogni colpo. In generale, quando la pallina è posizionata su una generica posizione i e viene colpita con la j -esima mazza, essa può essere indirizzata verso una delle due posizioni $i - d(t_i, j)$ o $i + d(t_i, j)$ (a seconda della direzione del colpo), dove $d(t_i, j)$ è una distanza intera positiva che dipende sia dal tipo t_i di terreno della posizione i che dalla mazza scelta. In ogni caso, è vietato mandare la pallina oltre i limiti del campo da gioco. L'obiettivo è quello di mandare la pallina in buca (cioè in posizione b) con il minor numero possibile di colpi. Progettate un algoritmo efficiente di tempo $O(n)$ per il problema.