Algoritmi e Strutture Dati (modulo I) - testo prova scritta 24/09/2024

docenti: Luciano Gualà

Cognome:........................... Nome:............................... Matr.:...............

Esercizio 1 [16 punti]

A: notazione asintotica. Dire quali delle seguenti relazioni asintotiche sono vere:

$n\sqrt{n} + n\log^2 n = o(n\log^{30} n)$; $\log n = o(\sqrt{\log^3 n})$; $n^2 = \Theta(\frac{n^2}{\log n})$; $\frac{n^2+\log n}{\sqrt{n^3+3}} = \Theta(\sqrt{n})$;

$3^n = o(3^{2n})$; $n! = \Theta(2^n)$; $2^{n\log n} = O(2^n \log^2 n)$; $2^n = \Theta(2^{n-2^4})$;

B: equazioni di ricorrenza. Fornire la soluzione asintotica alle seguenti relazioni di ricorrenza:

$T(n) = 3T(n/2) + n$; Soluzione:

$T(n) = 2T(n-2) + n$; Soluzione:

C: algoritmi e complessità. Quale algoritmo useresti e quanto costa se devi:

- Cercare in un albero AVL l'elemento più grande fra quelli più piccoli di un elemento dato x:
- Aggiungere due elementi ad un heap binomiale di n elementi:
- Calcolare in un grafo diretto e pesato il nodo più lontano da un nodo t:
- Dato un vettore di n numeri, trovare i k elementi più grandi:

Esercizio 2 [8 punti]

Lavorate come responsabile degli investimenti per una azienda che attualmente ha un capitale di L euro. Nei prossimi giorni l'azienda riscuoterà diverse somme di denaro relative a pagamenti di commesse in scadenza. Queste informazioni sono contenute in un array $A[1:n]$, dove per ogni i, $A[i] \geq 0$ è la somma in euro che l'azienda incasserà nel giorno i. Ora, per pianificare gli investimenti avete bisogno di uno strumento che velocemente risponde alla seguente *query*:

- `query`(x): dato un fabbisogno x di liquidità, restituisce il primo giorno in cui l'azienda avrà liquidità almeno x, se esiste; -1 altrimenti.

Progettate quindi una struttura dati che è in grado di rispondere a questo tipo di query in tempo $o(n)$. Si forniscano gli pseudocodici dettagliati dell'algoritmo che dato A costruisce la struttura dati, e dell'algoritmo che dato x risponde a `query`(x). Si analizzino le complessità temporali dei due algoritmi.

Esercizio 3 [8 punti]

Nell'aeroporto Bob Tarjan di Algoland il sistema di smistamento dei bagagli è costituito da un complesso sistema di m nastri trasportatori $e_1, \dots, e_m$ che collegano $n \leq m$ nodi di scambio, o hub. L'i-esimo nastro trasportatore $e_i = (u_i, v_i)$ si muove in una direzione specifica e permette di spostare un bagaglio che si trova presso l'hub u_i verso l'hub v_i.

In aggiunta, alcuni hub sono *configurabili*. Un hub configurabile x è in grado di invertire la direzione di movimento di tutti i nastri trasportatori a cui è collegato (ciò include sia i nastri che partono da x, sia quelli che arrivano a x). Purtroppo tale operazione è costosa perché richiede l'intervento della ditta installatrice che si fa pagare per effettuare l'inversione.

Ora, sarebbe opportuno che il sistema fosse in grado di recapitare un bagaglio da ogni hub di partenza verso un qualsiasi hub di destinazione. Progettate un algoritmo che capisce se cambiando la configurazione di al più *un solo* hub configurabile è possibile garantire tale proprietà. Si descriva in modo chiaro e preciso la soluzione proposta argomentandone in particolare la complessità temporale. Algoritmi più efficienti sono ovviamente preferibili.