

Cognome:..... Nome:..... Matr:.....

Esercizio 1 [11 punti] Si consideri il problema del mantenimento di insiemi disgiunti attraverso una struttura dati Union-Find.

1. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

- Nella QuickFind con euristica *union by size* ogni insieme è rappresentato con un albero di altezza $\Theta(\log n)$, dove n è il numero di `makeSet`, in modo che l'operazione di `find` richieda tempo logaritmico.
- Usando la struttura dati QuickFind con euristica *union by size*, ogni sequenza di n `makeSet`, $n - 1$ `union` e m `find`, richiede nel caso peggiore tempo $O(m + n \log n)$.
- Usando la struttura dati QuickFind con euristica *union by size*, se in una sequenza di operazioni un elemento ha cambiato padre k volte allora appartiene ad un insieme che è grande almeno 2^k .
- Ogni struttura dati, per eseguire una sequenza di n `makeSet`, $n - 1$ `union` e m `find`, deve impiegare nel caso peggiore tempo $\Omega(m + n)$.
- Si assuma di implementare l'algoritmo di Kruskal usando una struttura dati QuickUnion con euristica *union by size*. Si assuma inoltre di avere già gli archi del grafo ordinati in ordine non decrescente rispetto al loro peso. Allora l'esecuzione dell'algoritmo di Kruskal ha comunque complessità temporale $O(m \log n)$.

2. Si consideri la struttura dati QuickUnion con euristica *union by size*. Si mostri una sequenza di operazioni di n `makeSet` e $n - 1$ `union` in cui l'albero ottenuto abbia altezza $\Theta(\log n)$. (Max 5 righe.)

Esercizio 2 [11 punti] Si risponda in modo conciso e preciso alle seguenti domande.

1. Si definisca formalmente il concetto di riduzione polinomiale fra problemi. (Max 5 righe.)
2. Si argomenti su come è possibile utilizzare le riduzioni polinomiali per dare evidenza che un problema è computazionalmente difficile. (Max 5 righe.)

Esercizio 3 [11 punti] Controlli uno scavatore robotico utilizzato per estrarre oro da una miniera. La miniera è divisa in n tratte disposte linearmente. Conosci la quantità di oro che è seppellita sotto ogni tratta. In particolare, sai che se scavi nella tratta i troverai v_i unità di oro. Lo scavatore ha una batteria di Δ unità, e inizialmente è posizionato sulla tratta 1 con la batteria completamente carica. I controlli dello scavatore ti permettono di eseguire le seguenti manovre:

- muovere lo scavatore in avanti di una o due posizioni: se lo scavatore si trova nella tratta i puoi spostarlo nella tratta $i + 1$ o $i + 2$. Questa manovra consuma s unità di batteria (indipendentemente se ti muovi di 1 o di 2);
- scavare: se lo scavatore è sulla tratta i questa manovra ti permette di estrarre le v_i unità di oro sotto la tratta. L'energia consumata dalla manovra è di t unità di batteria. Si assuma $t > s$.

Progettare un algoritmo di programmazione dinamica che calcoli il massimo numero di unità di oro estraibili dalla miniera. Si discuta la complessità temporale dell'algoritmo proposto.