

Cognome:..... Nome:..... Matr.:.....

Esercizio 1 [16 punti]

A: notazione asintotica. Dire quali delle seguenti relazioni asintotiche sono vere:

$$n^3 + n^2 \log^2 n = o(n^2 \log^{30} n); \quad \log^2 n = o(\log^{30} n); \quad n^2 = \Omega\left(\frac{n^{2.001}}{\log^{2001} n}\right); \quad \frac{n\sqrt{n+\log n}}{\sqrt{n^3+3}} = \Theta(\log n);$$
$$2^{2n} = \omega(2^{1.9n}); \quad 2^n = \Theta(2^n + 1.5^n); \quad 2^n = o(2^n + n^2); \quad 2^n = \Theta(2^{n+8});$$

B: equazioni di ricorrenza. Fornire la soluzione asintotica alle seguenti relazioni di ricorrenza:

$$T(n) = 2T(n/4) + n; \quad \text{Soluzione:}$$

$$T(n) = 2T(n-2) + 1; \quad \text{Soluzione:}$$

C: algoritmi e complessità. Quale algoritmo useresti e quanto costa se devi:

- Calcolare l' n -esimo numero di Fibonacci:
- Costruire un heap binomiale con n chiavi:
- Capire se in un grafo diretto esistono due nodi s e t tale che non c'è nessun cammino da s a t :
- Dato un grafo diretto con archi rossi e blu e due nodi s e t , dire se esiste un cammino da s a t che comincia con un arco rosso e poi usa solo archi blu:

Esercizio 2 [8 punti] (*La k -finestra più variegata*)

Ti è dato in input un array $S[1 : n]$ di n numeri, dove ogni numero rappresenta un tipo di evento che avrà luogo il giorno i . Gli eventi – e quindi i numeri – si possono ripetere. Tu devi scegliere una finestra di k giorni consecutivi e vuoi massimizzare il numero di eventi distinti contenuti nella finestra.

Progetta un algoritmo che dato S e k risolve il problema in tempo $O(n \log k)$. Si fornisca lo pseudocodice dettagliato dell'algoritmo.

Esercizio 3 [8 punti]

Sia T un albero binario con n , dove ogni nodo v di T ha un valore $v.val \geq 0$ associato. Diremo che una foglia v è *buona* se esiste un antenato u di v tale che $v.val + u.val \geq 100$.

Si progetti un algoritmo che dato T restituisca il numero di foglie buone dell'albero. Si assuma che T è rappresentato tramite una struttura dati collegata, con record e puntatori, dove il record di ogni nodo, oltre al campo con il valore, contiene anche il puntatore al figlio sinistro e al figlio destro del nodo. L'algoritmo deve avere complessità $O(n)$. Si fornisca lo pseudocodice dettagliato.