

ALGORITMI E STRUTTURE DATI
(MOD II)
PROVA SCRITTA del 12/09/2023

ESERCIZIO N. 1

Si consideri il problema dell'*Interval Scheduling (IS)* sulla generica Istanza $I = \{I_1, I_2, \dots, I_j, \dots, I_n\}$ dove $I_j = (s_j, f_j)$. Quali di queste affermazioni sono vere?

- Uno step fondamentale dell'algoritmo Greedy ALG-G(I) è quello di ordinare gli intervalli I_j rispetto al finish time.
- Trasformando opportunamente l'istanza I , è possibile darla in input all'algoritmo di Programmazione Dinamica per il *Weighted Interval Scheduling* ed ottenere la soluzione ottima per I .
- L'algoritmo ottimale Greedy ALG-G(I) spezza l'istanza iniziale in due sotto-istanze bilanciate in modo tale da applicare la tecnica del Divide et Impera, ottenendo un tempo di completamento $O(n \log n)$.
- La dimostrazione di ottimalità dell'algoritmo *Greedy* ALG-G(I), basata sull'*Exchange Argument*, stabilisce che ogni soluzione ammissibile, che non è quella calcolata da ALG-G(I), ha un valore strettamente inferiore a quella ottenuta da ALG-G(I).

ESERCIZIO N. 2. Si consideri l'algoritmo di Huffman $H(S; \mathbf{f})$ per la compressione di un testo riportato qui sotto, dove S è l'insieme dei simboli e $\mathbf{f}$ è il vettore delle frequenze.

```
Huffman(S) {  
  if |S|=2 {  
    return tree with root and 2 leaves  
  } else {  
    let y and z be lowest-frequency letters in S  
    S' = S  
    remove y and z from S'  
    insert new letter w in S' with fw=fy+fz  
    T' = Huffman(S')  
    T = add two children y and z to leaf w from T'  
    return T  
  }  
}
```

Si definisca in modo sintetico cosa sia una soluzione ammissibile T e la funzione obiettivo $ABL(T)$ del relativo problema di ottimizzazione risolto da $H(S; \mathbf{f})$. Si enunci, in modo chiaro, il Lemma tecnico che stabilisce una equazione matematica che esprime il costo $ABL(T')$ in funzione di $ABL(T)$. Utilizzando tale equazione, si dimostri in modo chiaro e sintetico l'ottimalità di $H(S, \mathbf{f})$ mediante induzione e ragionamento per assurdo.