

Cognome:..... Nome:..... Matr:.....

**Esercizio 1 [16 punti]**

A: *notazione asintotica*. Dire quali delle seguenti relazioni asintotiche sono vere:

$$n^{1/4} \log n + \sqrt{n} = \Omega(n^{1/3}); \quad n \log^2 n = o((n+3) \log^4 n); \quad \frac{n^3 + \log n}{\sqrt{n}} = \Theta(n^{2.5}); \quad \frac{\sqrt{n \log \log n}}{\sqrt{n+1}} = O(\log \log n);$$
$$2^{\sqrt{\log n}} = \omega(\sqrt[3]{n}); \quad 2^n = \Theta(2^{n-\log n}); \quad 2^{n+2} = \omega(2^n); \quad 2^n = o(2^{n+2} + 2^{n/2});$$

B: *equazioni di ricorrenza*. Fornire la soluzione asintotica alle seguenti relazioni di ricorrenza:

$$T(n) = 4T(n/4) + n; \quad \text{Soluzione:}$$

$$T(n) = T(n-4) + n^2; \quad \text{Soluzione:}$$

C: *algoritmi e complessità*. Quale algoritmo useresti e quanto costa se devi:

- Cercare un elemento in una lista ordinata di  $n$  elementi (si assuma la lista implementata in modo classico con record e puntatori):
- In un grafo orientato e non pesato, trovare la distanza da ogni nodo verso due nodi specifici  $t_1$  e  $t_2$ :
- Ordinare  $n$  interi i cui valori sono compresi fra  $n^3$  e  $n^3 + 100$ :
- Costruire un heap che contenga  $n$  specifiche chiavi:

**Esercizio 2 [8 punti]**

Sia  $T$  un albero binario con  $n$ , dove ogni nodo  $v$  di  $T$  ha un colore  $v.col$  che può essere *Blu* ( $B$ ) o *Giallo* ( $G$ ), e quindi  $v.col \in \{B, G\}$ . Si progetti un algoritmo che dato  $T$  e due interi  $b$  e  $g$ , restituisca il numero di nodi di  $T$  che hanno almeno  $b$  discendenti blue e almeno  $g$  discendenti gialli.

Si assuma che  $T$  è rappresentato tramite una struttura dati collegata, con record e puntatori, dove il record di ogni nodo, oltre al campo  $v.col$ , contiene anche il puntatore al figlio sinistro e al figlio destro del nodo. L'algoritmo deve avere complessità  $O(n)$ . Si fornisca lo pseudocodice dettagliato.

**Esercizio 3 [8 punti]**

Il *coefficiente di similarità di Jaccard* di due insiemi  $A$  e  $B$  è definito come

$$J(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}.$$

Si progetti un algoritmo che presi due insiemi di  $n$  elementi, calcoli in tempo  $o(n^2)$  il loro coefficiente di similarità di Jaccard.