

Cognome:..... Nome:..... Matr:.....

**Esercizio 1 [11 punti]** Si consideri un grafo non orientato e connesso  $G = (V, E)$  di  $n$  nodi dove ad ogni arco  $e \in E$  è associato un peso  $w(e)$ .

1. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

- Se i pesi degli archi di  $G$  non sono distinti, sicuramente esistono due MST (distinti) di  $G$ .
- Se i pesi degli archi di  $G$  sono distinti allora l'algoritmo di Krusal e l'algoritmo di Prim restituiscono lo stesso albero  $T$ , indipendentemente dal nodo  $s$  scelto come nodo iniziale per l'algoritmo di Prim.
- Sia  $T$  un MST di  $G$  e sia  $f$  un arco che non appartiene a  $T$ . Allora l'aggiunta di  $f$  a  $T$  forma un ciclo in cui  $f$  è l'arco con il peso più grande fra quelli del ciclo.
- Sia  $T$  un spanning tree di  $G$  e sia  $T^*$  un MST di  $G$ . Sia  $f$  un arco di  $T^*$  che non appartiene a  $T$ . Allora l'aggiunta di  $f$  a  $T$  crea un ciclo in cui  $f$  è l'arco con il peso più piccolo fra quelli del ciclo.
- Se il numero di archi in  $G$  è  $\Theta(n)$ , allora l'algoritmo di Kruskal ha complessità  $O(n)$ .

2. Si consideri il grafo completo  $G$  con  $n$  nodi, chiamati  $0, 1, \dots, n - 1$ , in cui il costo del generico arco  $(i, j)$  è  $w(i, j) = i + j$ . Come è fatto e quanto costa un MST di  $G$ ? (Max 5 righe.)

**Esercizio 2 [11 punti]** Si consideri la struttura dati *Quick-Find* con euristica *union-by-size* per gestire insiemi disgiunti su un universo di  $n$  elementi.

1. Si fornisca un esempio di una sequenza di 3 operazioni di union in cui ogni singola operazione di union ha costo  $\Theta(n)$ . (Max 5 righe.)

2. Si enunci in modo preciso le prestazioni della struttura dati, in termini di costi delle operazioni della struttura dati. (Max 5 righe.)

**Esercizio 3 [11 punti]** A Tor Vergata sta per chiudere anche l'ultimo bar e gli studenti presto non sapranno più come procurarsi il pranzo. Così il prof. Gualà è stato incaricato dalla facoltà di assoldare una ditta che gestisce furgoni attrezzati alla vendita di panini.

I giorni in cui gli studenti rischiano di rimanere senza pranzo sono  $n$ , numerati da 1 ad  $n$ . La ditta ha a disposizione due furgoni, uno *rosso* e uno *giallo*. Il costo e le condizioni di noleggio dei due furgoni varia a seconda del furgone e del giorno del noleggio. In particolar modo, se si noleggia il furgone rosso nel giorno  $i$ , il furgone è a disposizione per tre giorni consecutivi, quindi i giorni  $i, i + 1, e i + 2$  e il suo costo (complessivo per i tre giorni) è di  $r_i$ . Il furgone giallo invece viene noleggiato per due giorni alla volta e, se noleggiato il giorno  $i$ , costa complessivamente  $g_i$  e può essere usato i giorni  $i$  e  $i + 1$ .

L'obiettivo del prof. Gualà è quello di sottoscrivere dei contratti di noleggio in modo tale da spendere il meno possibile garantendo che in ognuno degli  $n$  giorni ci sia almeno un furgone che sta vendendo panini agli studenti di Tor Vergata. Aiutate il prof. Gualà progettando un algoritmo di programmazione dinamica che calcoli la migliore soluzione possibile. Un esempio di istanza e soluzione è riportata in figura.

$i$	1	2	3	4	5	6	7
$r_i$	10	11	11	11	7	9	6
$g_i$	9	10	12	9	7	8	10

$$Opt = 10 + 9 + 7 = 26$$

Figura 1