Scenario

- Archi di un grafo controllati da agenti egoistici
- Solo l'agente conosce il peso associato al proprio arco
- Obiettivo: calcolare una "buona" soluzione di un certo problema di ottimizzazione rispetto a pesi reali
- Strumento: progettazione di un meccanismo truthful (pagamento opportuno degli agenti per convincerli a dire la verità!)

Il problema del cammino minimo tra 2 nodi in un grafo con archi privati

Comprare un cammino minimo in una rete

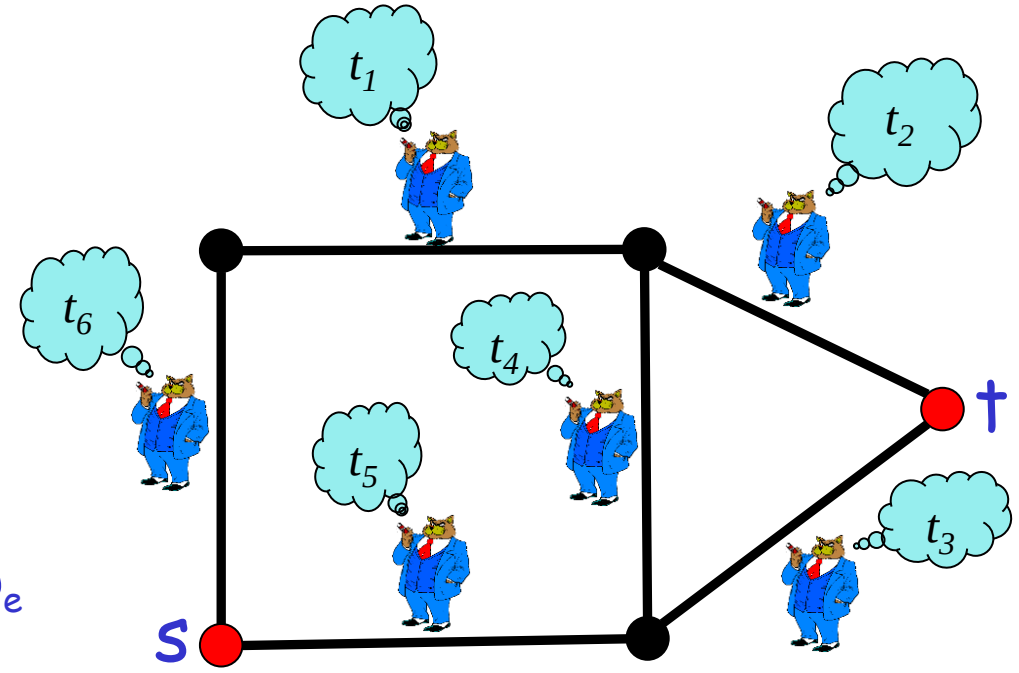
f(t):
un cammino minimo rispetto ai tipi degli agenti

F: insieme dei cammini fra s e t

Meccanismo

decide il cammino e i pagamenti

t_e: costo utilizzo arco e



se arco e è selezionato e riceve un pagamento di p_e
utilità di e:

$p_e - t_e$

Il problema dello *shortest path egoistico*

- **Input**: un grafo $G=(V,E)$, ogni arco è un agente egoistico, un nodo **sorgente s** e un nodo **destinazione t**; il tipo di un agente è il costo di utilizzo dell'arco (quindi tipo > 0); la sua valutazione è uguale al suo tipo;
- **SCF**: un vero cammino minimo in $G=(V,E,tipi)$ tra s e t.

Più Formalmente

- Soluzioni ammissibili:
  - F: insieme dei cammini in G da s a t
- Tipo dell'agente e:
  - τ_e: peso dell'arco
  - intuitivamente: τ_e è il costo che l'agente sostiene per utilizzare e
- Valutazione agente e di un cammino $P \in F$:
  - $v_e(\tau_e,P)= \tau_e$ se $e \in P$, 0 altrimenti
- SCF: shortest path in $G=(V,E,\tau)$ fra s e t.

Come progettare un meccanismo truthful per il problema?

Osservazione cruciale:
la (vera) lunghezza di un cammino P è:

$$\sum_{e \in P} \tau_e = \sum_{e \in E} v_e(\tau_e, P)$$

problema utilitario!

…usiamo i meccanismi VCG

Meccanismo VCG

- M= <g(r), p(r)>:
  - g(r):= x^*= arg $\min_{x \in F} \sum_j v_j(r_j,x)$
  - $p_e(r)$: Per ogni arco $e \in E$:

$$p_e(r)=\sum_{j \neq e} v_j(r_j,g(r_{-e})) - \sum_{j \neq e} v_j(r_j,x^*)$$ cioè

Meccanismo VCG

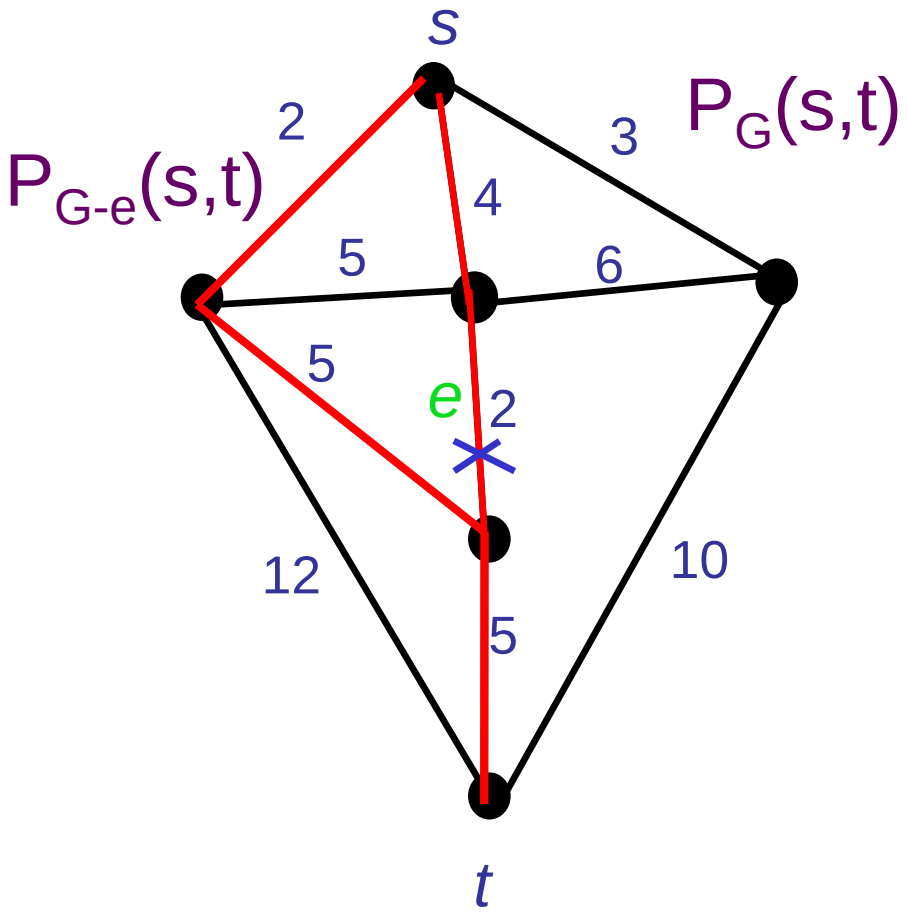
- M_{SP}= <g(r), p(r)>:
  - g(r): calcola un cammino minimo $P_G(s,t)$ in G=(V,E,r)
  - p_e: Per ogni arco $e \in E$:

$$p_e(r)=\sum_{j\neq e} v_j(r_j, g(r_{-e})) - \sum_{j\neq e} v_j(r_j, P_G(s,t)) \text{ cioè}$$

$$p_e(r)=\begin{cases} d_{G-e}(s,t)-(d_G(s,t)-r_e) & \text{se } e\in P_G(s,t) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

⇒ Per ogni $e \in P_G(s,t)$, dobbiamo calcolare $P_{G-e}(s,t)$, ovvero il **cammino minimo di rimpiazzo** in G-e =(V,E\{e},r_{-e}) tra s e t

Cammino di rimpiazzo per *e*



quanto viene pagato *e*?

$p_e = 12-(11-2) = 3$

Quel è la complessità temporale del meccanismo?

…dobbiamo calcolare con uno SP tra s e t

…e il pagamento per gli archi selezionati

…è solo una questione algoritmica!

Ipotesi di lavoro

- $n=|V|$, $m=|E|$
- $d_G(s,t)$: distanza in G da s a t (somma dei pesi degli archi di $P_G(s,t)$)
- I nodi s,t sono 2-edge connessi: cioè, esistono in G almeno 2 cammini tra s e t che sono disgiunti sugli archi $\Rightarrow$ per ogni arco e del cammino $P_G(s,t)$ che viene rimosso esiste almeno un cammino alternativo in $G-e$

…infatti, in caso contrario…

- Se s,t **non sono** 2-edge connessi, c'è almeno un arco in $P_G(s,t)$ che è un **ponte** (arco che rimosso spezza G in due componenti C_1 e C_2, $s \in C_1$ e $t \in C_2$)
- Se e è un ponte → $d_{G-e}(s,t) = \infty$

$\Rightarrow$ Il possessore di quell'arco "tiene in pugno" il sistema: può chiedere qualsiasi cifra!

Una soluzione banale

$\forall e \in P_G(s,t)$ applichiamo l'algoritmo di Dijkstra al grafo $G-e$

Complessità: $k=O(n)$ archi per $O(m + n \log n)$: tempo $O(mn + n^2 \log n)$

Si può dimostrare il seguente:

Teorema

M_{SP} è calcolabile in tempo $O(m + n \log n)$.

Malik, Mitta, Gutpa, the k most vital arcs in the shortest path problem, 1989

Esercizio

Progettare un meccanismo veritiero per il problema del calcolo del cammino minimo tra due nodi nello scenario in cui un agente controlla più di un arco del grafo. Come nel caso del singolo arco, i pesi degli archi controllati dall'agente i sono privati e la valutazione di un agente rispetto a una soluzione (cammino) P è uguale alla somma dei (veri) pesi degli archi selezionati nel cammino.

Meccanismi one-parameter

Archer & Tardos, Truthful mechanims for one-paremeter agents, FOCS'01

Tecniche note

Meccanismi VCG

Validi per problemi utilitari (es., MST e SP)

Un problema è utilitario quando:

$$f(t) = \arg \min_{o \in F} \sum_i v_i(t_i, o)$$

$$g(r) = \arg \min_{o \in F} \left\{ \sum_i v_i(r_i, o) \right\}$$

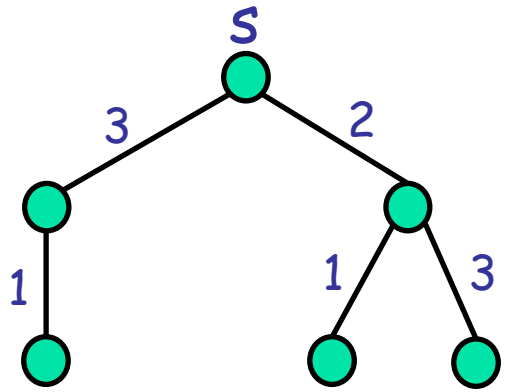
$$p_i(r) = \sum_{j \neq i} v_j(r_j, g(r_{-i})) - \sum_{j \neq i} v_j(r_j, g(r))$$

Shortest Path Tree (SPT) non cooperativo

- Problema: broadcasting
  - una sorgente s vuole spedire un messaggio ai nodi V\{s}
- Informazione posseduta dagli agenti: tempo di attraversamento dei link
- Obiettivo: minimizzare il tempo di consegna di ogni messaggio

Formulazione

- F: insieme alberi ricoprenti V (radicati in s)
- Per ogni $T \in F$
  - $f(t) = \arg\min_{T \in F} \sum_{v \in V} d_T(s,v) = \arg\min_{T \in F} \sum_{e \in E(T)} t_e \, ||e||$
  - $||e||$ è la *molteplicità* dell'arco e, intesa come numero di cammini ai quali appartiene (in T)



Formulazione

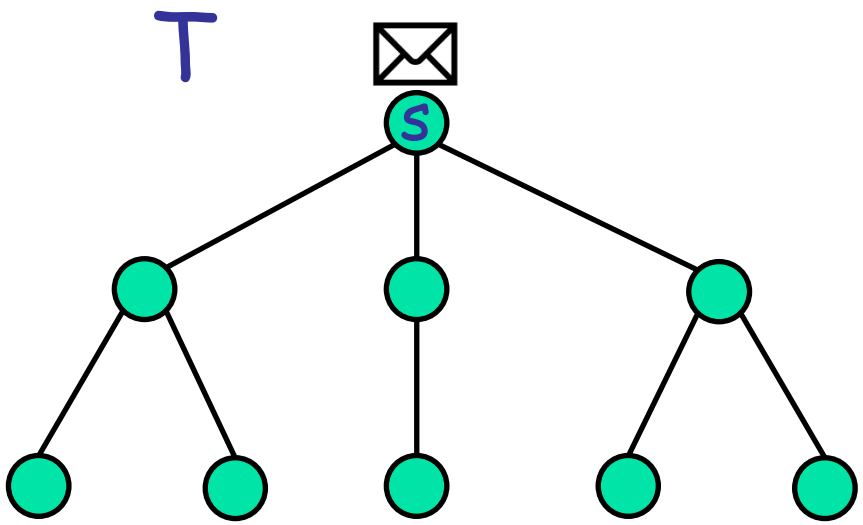
- F: insieme alberi ricoprenti V (radicati in s)
- Per ogni $T \in F$
  - $f(t) = \arg\min_{T \in F} \sum_{v \in V} d_T(s,v) = \arg\min_{T \in F} \sum_{e \in E(T)} t_e \, ||e||$
  - $||e||$ è la *molteplicità* dell'arco e, intesa come numero di cammini ai quali appartiene (in T)

il problema è utilitario?

…dipende dalla funzione di valutazione dei giocatori

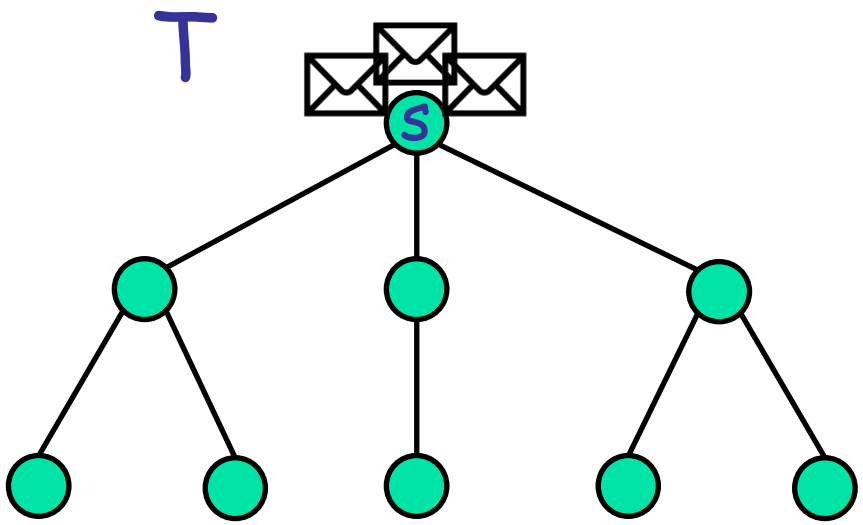
come è la funzione di valutazione?

…dipende da come è "usato" l'albero T



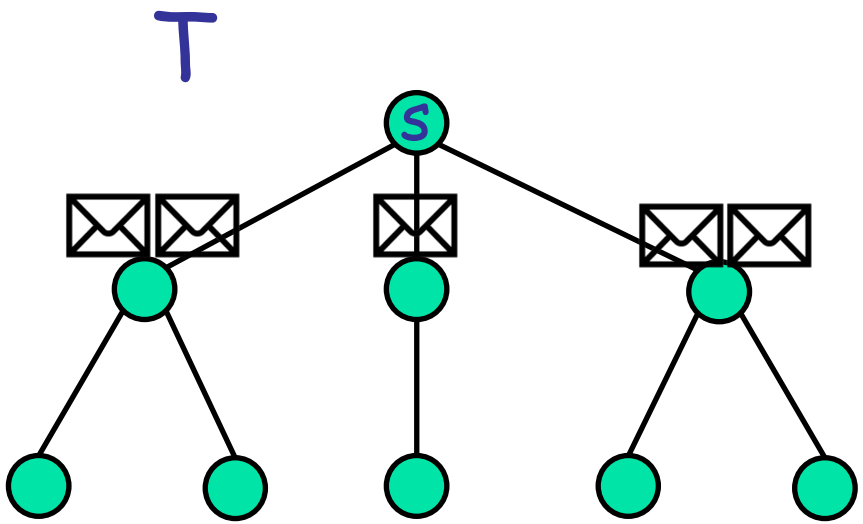
Protocollo multicast:

una sola copia del messaggio viene spedita (eventualmente duplicata nei nodi)



Protocollo multicast:

una sola copia del messaggio viene spedita (eventualmente duplicata nei nodi)



Protocollo multicast:

una sola copia del messaggio viene spedita (eventualmente duplicata nei nodi)

valutazione del giocatore rispetto a T:

$v_e(t_e, T) = t_e$ se $e \in E(T)$, 0 altrimenti

$$\Rightarrow f(t) \neq \arg\min_{T \in F} \sum_{e \in E(T)} v_e(t_e, T)$$

problema non utilitario!

Come tratto i problemi non utilitari?

…per problemi one-parameter uso i meccanismi one-parameter (OP)

Un problema è one-parameter se

1. L'informazione posseduta da ogni agente a_i è un singolo parametro $t_i \in \Re$
2. La valutazione di a_i ha la forma

$$v_i(t_i,o) = t_i\, w_i(o),$$

$w_i(o)$: carico di lavoro per a_i in o

SPT non cooperativo (ogni agente controlla un arco)

- F: insieme alberi ricoprenti V (radicati in s)
- Per ogni $T \in F$
  - $f(t) = \arg\min_{T \in F} \sum_{v \in V} d_T(s,v) = \sum_{e \in E(T)} t_e \, ||e||$
  - $v_e(t_e,T) = \begin{cases} t_e & \text{se } e \in E(T) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Multicast: caso non utilitario

  - $v_e(t_e,T) = t_e \, w_e(T)$

$$w_e(T) = \begin{cases} 1 & \text{se } e \in E(T) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

VCG vs OP

- Meccanismi VCG: valutazioni (costi) e tipi arbitrari ma problemi utilitari
- Meccanismi OP: funzione di scelta sociale arbitraria ma tipi a singolo-parametro e valutazioni vincolate
- Se un problema è utilitario e one-parameter → meccanismo (esatto) VCG e OP coincidono

Una proprietà interessante

Definizione

Un algoritmo g() per un problema OP di minimizzazione è monotono se

$\forall$ agente a_i, $w_i(g(r_{-i},r_i))$ è non crescente rispetto a r_i, per tutti gli $r_{-i}=(r_1,\ldots,r_{i-1}, r_{i+1},\ldots,r_N)$

Notazione

Scriveremo $w_i(r)$ al posto di $w_i(g(r))$

Teorema 1 (Mayerson '81)

Condizione necessaria affinché un meccanismo $M=\langle g(r),p(r)\rangle$ per un problema OP sia veritiero è che $g(r)$ sia monotono.

Dim (per assurdo)

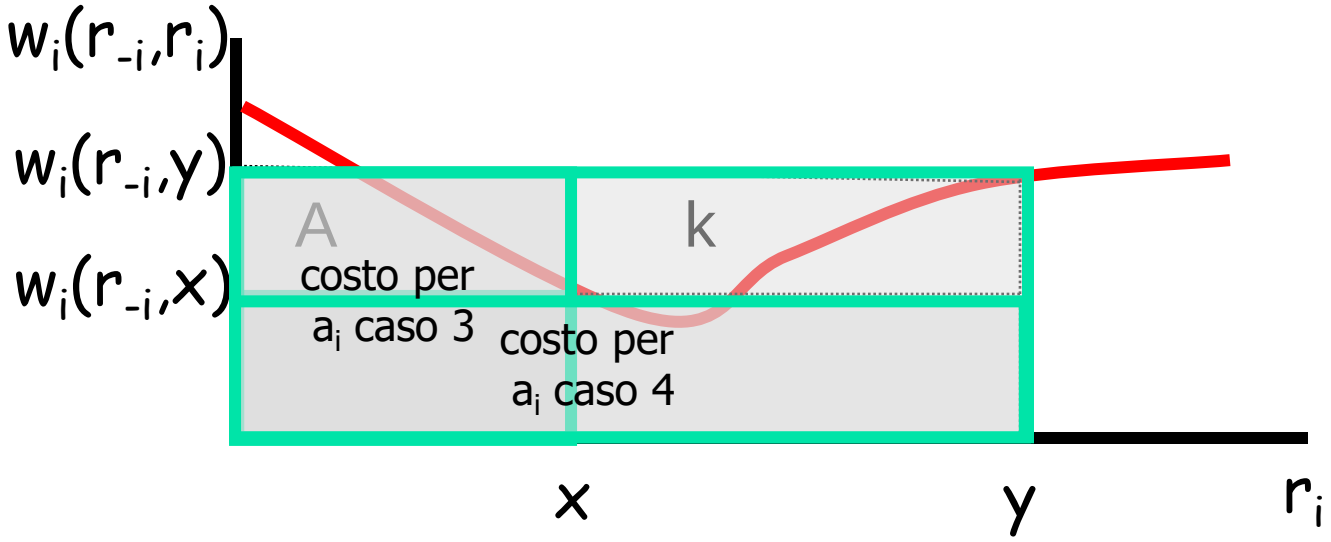
Supponiamo $g()$ non monotono, e…

…facciamo vedere che nessuno schema di pagamento può rendere M veritiero

Se $g(\cdot)$ è non monotono esiste un agente a_i e un vettore r_{-i} tale che $w_i(r_{-i},r_i)$ è non "non crescente"…

Dim (continua)

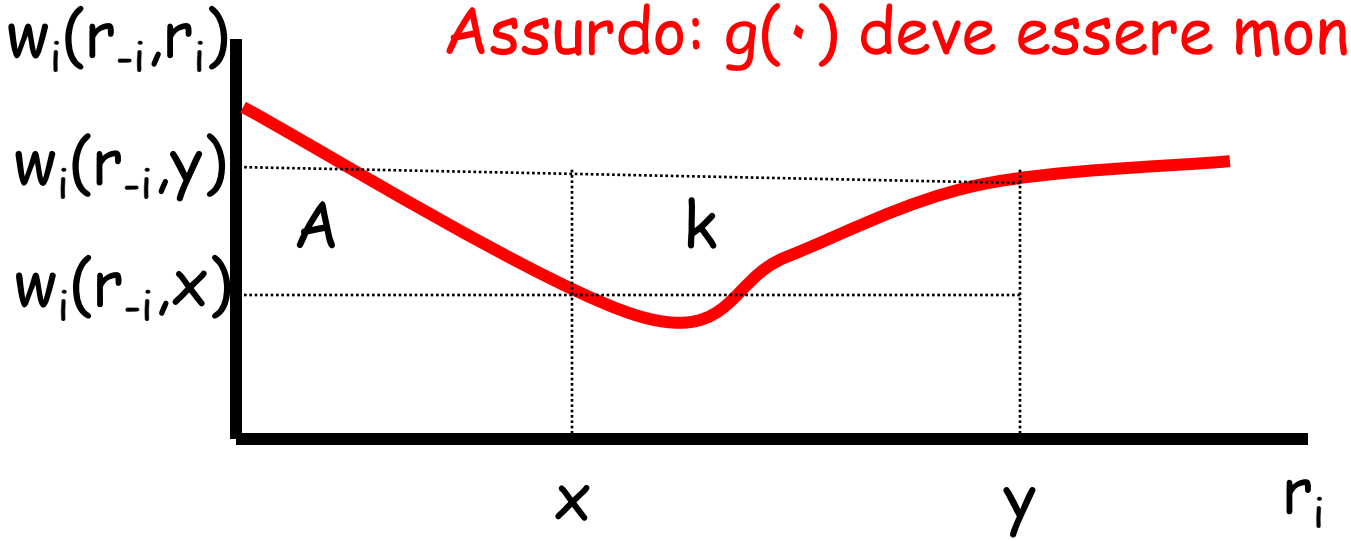
1. Se $t_i=x$ e $r_i=t_i \rightarrow v_i(t_i,o)=x\ w_i(r_{-i},x)$
2. Se $t_i=y$ e $r_i=t_i \rightarrow v_i(t_i,o)=y\ w_i(r_{-i},y)$
3. Se $t_i=x$ e $r_i=y \rightarrow a_i$ aumenta il suo costo di A
4. Se $t_i=y$ e $r_i=x \rightarrow a_i$ ha un risparmio di $A+k$



Dim (continua)

- Sia $\Delta p = p_i(r_{-i}, y) - p_i(r_{-i}, x)$
- Se M è truthful deve essere:
  - $\Delta p \leq A$ (altrimenti quando $t_i = x$, a_i dichiara y, in quanto in tal caso il suo costo aumenta di A, e quindi se $\Delta p > A$, la sua utilità aumenta!)
  - $\Delta p \geq A + k$ (altrimenti quando $t_i = y$, a_i dichiara x, in quanto in tal caso il suo costo diminuisce di A+k, e quindi se $\Delta p < A + k$, ciò significa che il decremento nel pagamento è minore del decremento del costo, ovvero la sua utilità aumenta!)

… ma k è strettamente positivo!



Assurdo: $g(\cdot)$ deve essere monotono!

■

Meccanismi one-parameter (OP)

- $g(r)$: qualsiasi algoritmo monotono
- $p_i(r) = h_i(r_{-i}) + r_i\, w_i(r) - \int_0^{r_i} w_i(r_{-i}, z)\, dz$

$h_i(r_{-i})$: funzione arbitraria indipendente da r_i

Teorema 2 (Mayerson '81) Un meccanismo OP (per un problema OP) è veritiero.

Dim: Facciamo vedere che l'utilità di un agente a_i può solo decrescere se a_i mente

Siano r_{-i} le dichiarazioni degli altri agenti

Il pagamento fornito ad a_i (quando dichiara r_i) è:

$$p_i(r) = \underbrace{h_i(r_{-i})}_{\text{Ininfluente perché indipendente da } r_i} + r_i\, w_i(r) - \int_0^{r_i} w_i(r_{-i},z)\, dz$$

pongo $h_i(r_{-i})=0$

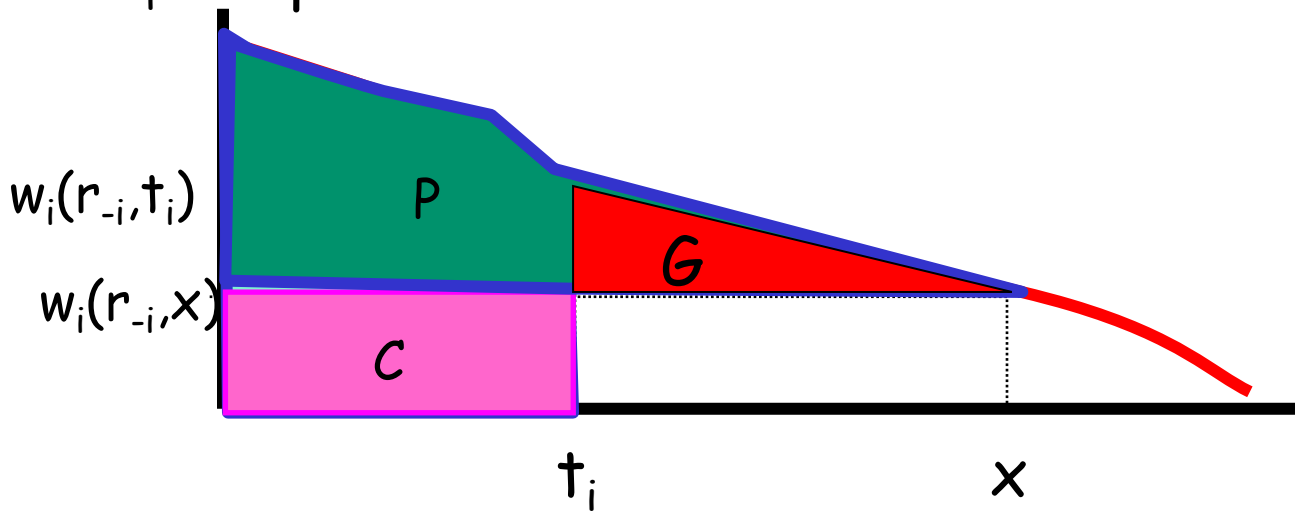
Dim (continua)

- $u_i(t_i,(r_{-i},t_i))= p_i(g(r_{-i},t_i))-v_i(t_i, g(r_{-i},t_i))=$

$t_i\, w_i(g(r_{-i},t_i))-\int_0^{t_i} w_i(r_{-i},z)\, dz- t_i\, w_i(g(r_{-i},t_i)) =-\int_0^{t_i} w_i(r_{-i},z)\, dz$

- Se a_i dichiara $x>t_i$:
  - La valutazione diventa: $C = t_i\, w_i(r_{-i},x)$
  - il pagamento diventa: $P= x\, w_i(r_{-i},x) - \int_0^{x} w_i(r_{-i},z)\, dz$

  $\Rightarrow$ a_i sta perdendo G

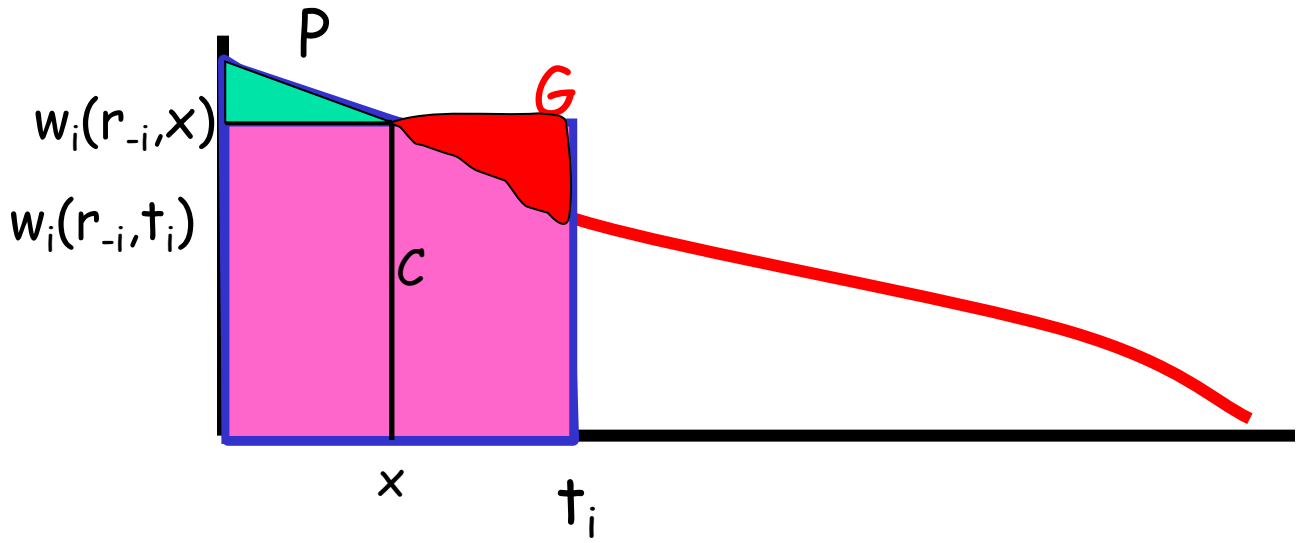


Dim (continua)

- $u_i(t_i,(r_{-i},t_i)) = -\int_0^{t_i} w_i(r_{-i},z)\,dz$
- Se a_i dichiara $x<t_i$
  - La valutazione diventa *C*
  - il pagamento diventa P

    $\Rightarrow$ a_i sta perdendo *G*

a_i non ha convenienza a mentire!



Sulla funzione $h_i(r_{-i})$

Un meccanismo garantisce la volontaria partecipazione (VP) se l'utilità di un qualsiasi agente (che dichiara il vero) ha sempre un utile non negativo

Ma il pagamento di a_i quando dichiara r_i è:

$$p_i(r) = h_i(r_{-i}) + r_i\, w_i(r) - \int_0^{r_i} w_i(r_{-i},z)\, dz$$

Se scegliamo la costante $h_i(r_{-i}) = \int_0^{\infty} w_i(r_{-i},z)\, dz$,

il pagamento diventa: $p_i(r) = r_i\, w_i(r) + \int_{r_i}^{\infty} w_i(r_{-i},z)\, dz$

$\Rightarrow$ L'utilità di un agente che dichiara il vero diventa:

$$u_i(t_i,r) = \int_{t_i}^{\infty} w_i(r_{-i},z)\, dz \geq 0.$$

Meccanismi one-parameter: il problema dell'albero dei cammini minimi a sorgente singola

SPT non cooperativo (ogni agente controlla un arco)

- **Input**: un grafo $G=(V,E)$ biconnesso sugli archi, in cui ogni arco corrisponde in modo biunivoco ad un insieme di agenti egoisti, ed un nodo sorgente $s \in V$; il tipo di un agente è il costo di utilizzo dell'arco (quindi tipo>0);
- **SCF**: un albero dei cammini minimi radicato in s in $G=(V,E,t)$.

SPT non utilitario

- Per ogni albero ricoprente T di G radicato in s, la funzione obiettivo minimizzata dalla SCF è:

$$f(t)= \arg \min_{T \in F} \left\{ \sum_{v \in V} d_T(s,v) = \sum_{e \in E(T)} t_e \, ||e|| \right\}$$

- Con protocollo *multicast* : $v_e(t_e,T)= \begin{cases} t_e & \text{se } e \in E(T) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

e quindi $f(t) \neq \arg \min_{T \in F} \sum_{e \in E} v_e(t_e,T)$ (problema non utilitario)

- Ma il problema è one-parameter, in quanto

$v_e(t_e,T)= t_e \, w_e(T)$, ove $w_e(T)= \begin{cases} 1 & \text{se } e \in E(T) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Meccanismo one-parameter per l'SPT non utilitario

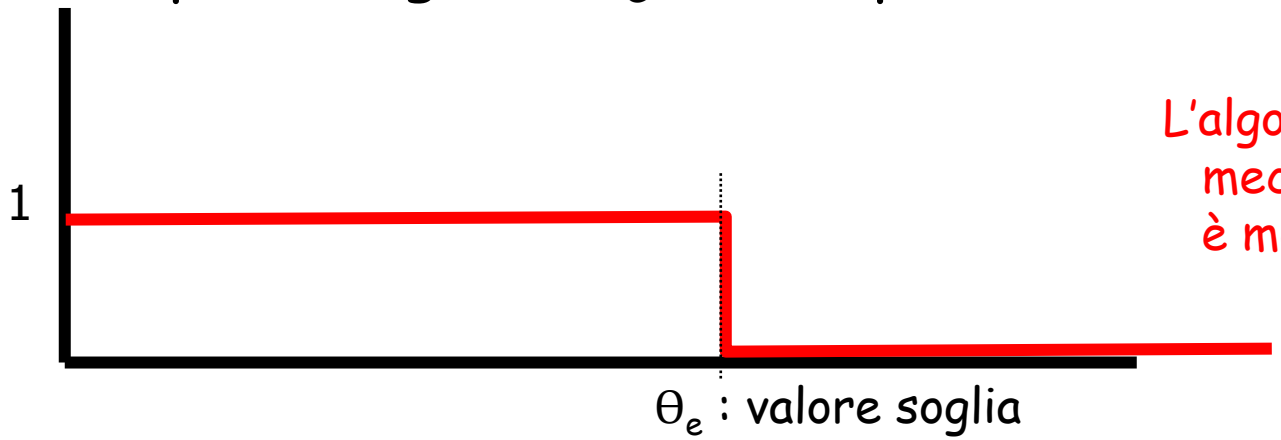
- M_{SPT}= <g(r), p(r)>
  - g(r): dato il grafo e le dichiarazioni, calcola un SPT $S_G(s)$ di $G=(V,E,r)$ utilizzando l'algoritmo di Dijkstra.
  - p(r): per ogni arco $e \in E$

$$p_e(r)=r_e\, w_e(r) + \int_{r_e}^{\infty} w_e(r_{-e},z)\, dz$$

così da garantire la **partecipazione volontaria**.

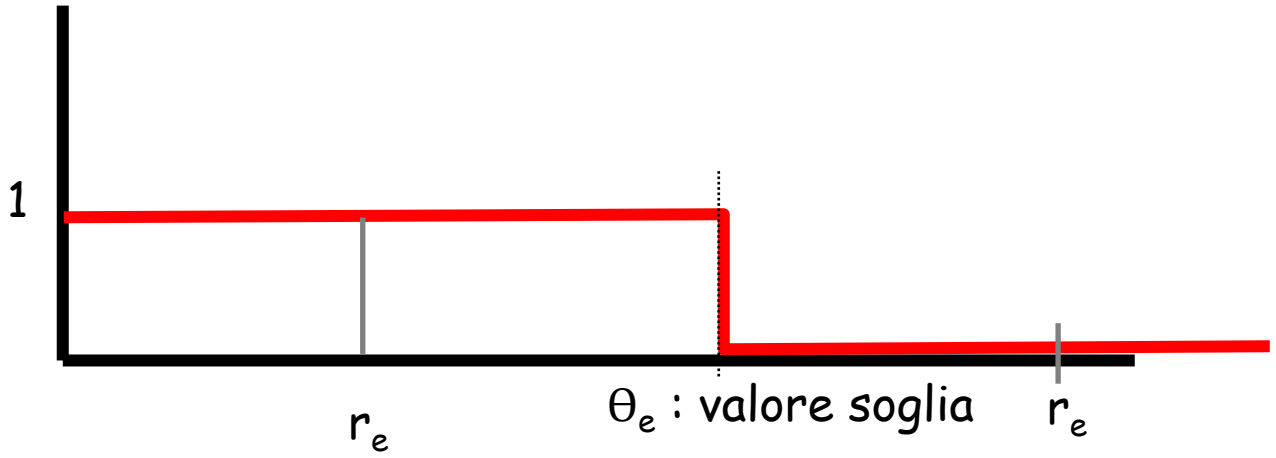
Truthfulness

Osservazione: M_{SPT} è truthful. La truthfulness segue dal fatto che M_{SPT} è un meccanismo OP. Infatti, l'algoritmo di Dijkstra per il calcolo dell'SPT è **monotono**, in quanto il carico di lavoro per un agente a_e ha sempre la forma:



θ_e è il valore tale che, fissato r_{-e}:
se a_e dichiara al più θ_e, allora e è selezionato
se a_e dichiara più di θ_e, allora e non è selezionato

Sui pagamenti



- p_e=0, se e non è un arco selezionato

$$p_e = r_e\, w_e(r) + \int_{r_e}^{\infty} w_e(r_{-e},z)\, dz = 0+0 = 0$$

- $p_e = \theta_e$, se e è nella soluzione

$$p_e = r_e\, w_e(r) + \int_{r_e}^{\infty} w_e(r_{-e},z)\, dz = r_e + \theta_e - r_e = \theta_e$$

Un caso speciale dei problemi OP

Un problema è binary demand (BD) se

1. L'informazione posseduta da ogni agente a_i è un singolo parametro $t_i \in \Re$
2. La valutazione di a_i ha la forma

$$v_i(t_i,o) = t_i\, w_i(o),$$

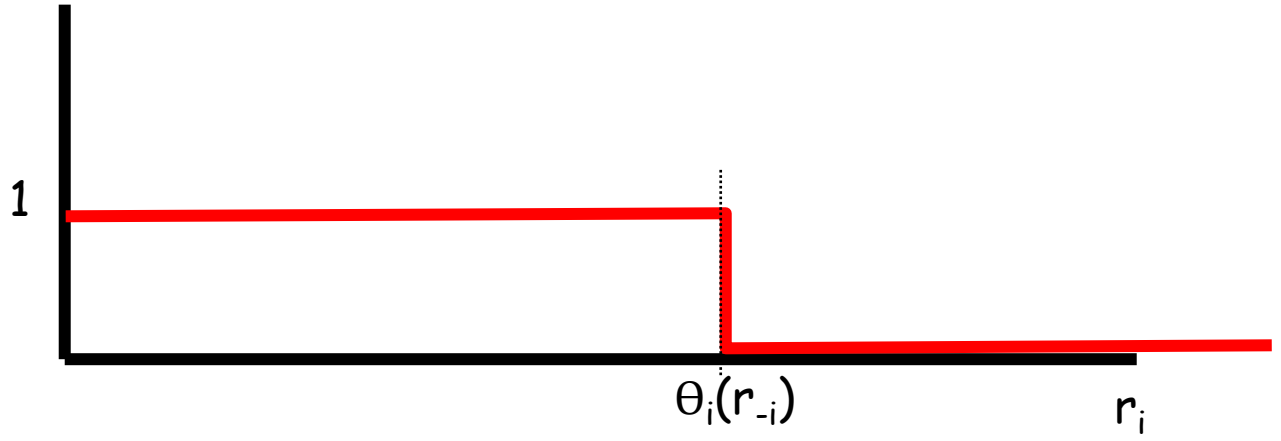
$w_i(o) \in \{0,1\}$ carico di lavoro per a_i in o

quando $w_i(o)=1$ diremo che a_i è selezionato in o

Definizione

Un algoritmo g() per un problema BD di minimizzazione è monotono se

$\forall$ agente a_i, e per tutti gli $r_{-i}=(r_1,\ldots,r_{i-1},r_{i+1},\ldots,r_N)$, $w_i(g(r_{-i},r_i))$ è della forma:



$\theta_i(r_{-i})\in\Re\cup\{+\infty\}$: valore soglia

il pagamento per a_i diventa:

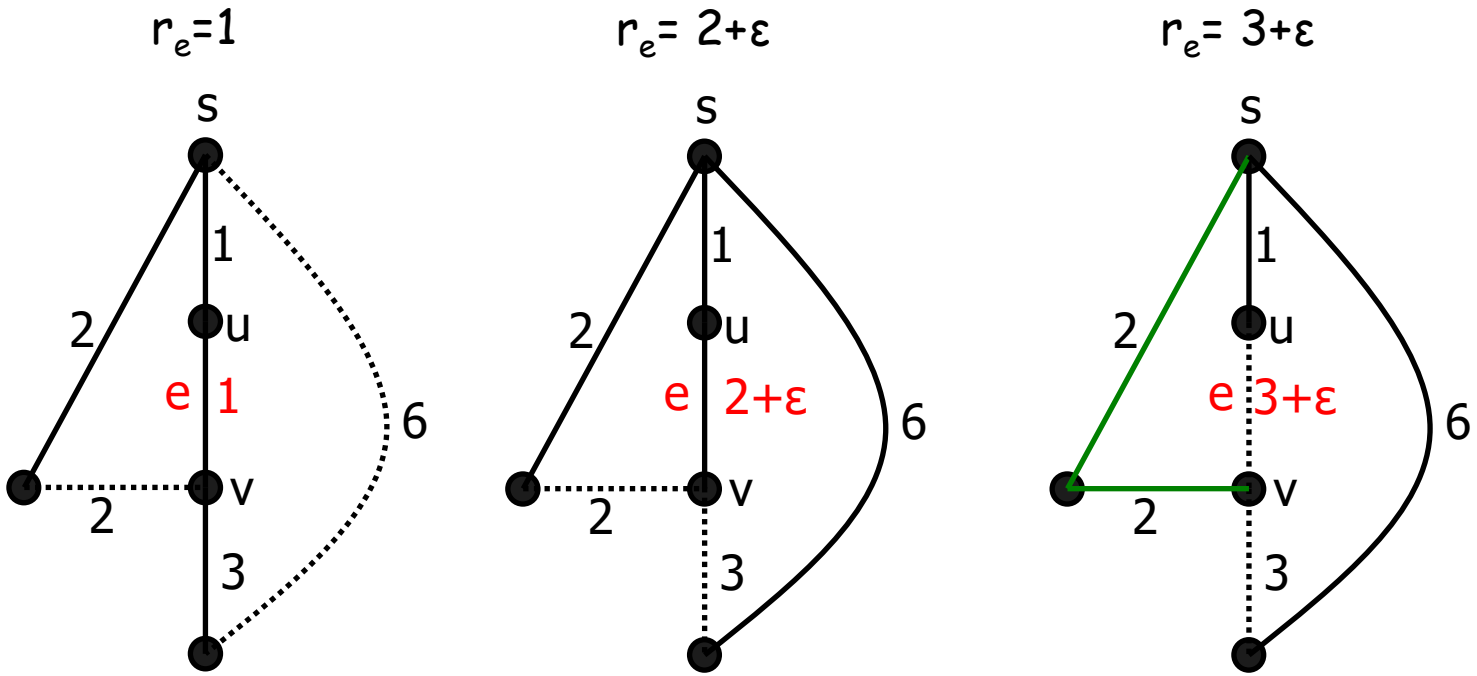
$$p_i(r)= \theta_i(r_{-i})$$

Sulle soglie

Sia e=(u,v) un arco in $S_G(s)$ (u più vicino a s che v)

- e resta in $S_G(s)$ finché uso e per raggiungere v
- Allora, $\theta_e = d_{G-e}(s,v) - d_G(s,u)$

Esempio



$\theta_e = 3$

Una soluzione banale

$\forall e=(u,v) \in S_G(s)$ applichiamo l'algoritmo di Dijkstra al grafo $G-e$ e troviamo $d_{G-e}(s,v)$

Complessità: k=n-1 archi per $O(m + n \log n)$: $O(mn + n^2 \log n)$ time

Si può dimostrare il seguente teorema:

Teorema

M_{SPT} è calcolabile in tempo $O(m + n \log n)$.

Esercizio

Si consideri lo scenario della single-item auction (versione di minimizzazione) in cui un singolo job deve essere allocato a una delle possibili macchine, e dove ogni macchina è un giocatore che conosce privatamente il proprio costo a cui è possibile eseguire il job.
Se l'obiettivo del sistema è quello di allocare il job alla macchina che è in grado di eseguire il job al costo più basso, allora il meccanismo VCG (second-price mechanism) è truthful.
E se il sistema volesse allocare il job alla seconda migliore macchina? È possibile progettare un meccanismo truthful per questo problema?

Esercizio

Pensare allo scenario in cui un agente controlla più di un arco del grafo e si vuole progettare un meccanismo veritiero per calcolare un SPT.
Come nel caso del singolo arco, i pesi degli archi controllati dall'agente i sono privati e la valutazione di un agente rispetto a una soluzione (albero) T è uguale alla somma dei (veri) pesi degli archi selezionati nel cammino.
Possiamo usare i meccanismi VCG?
E quelli OP?