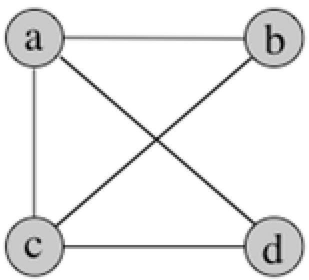
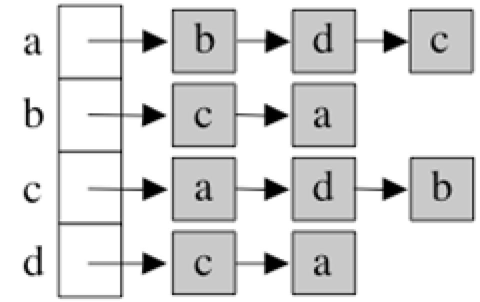
Strutture dati per rappresentare grafi

Grafi non diretti

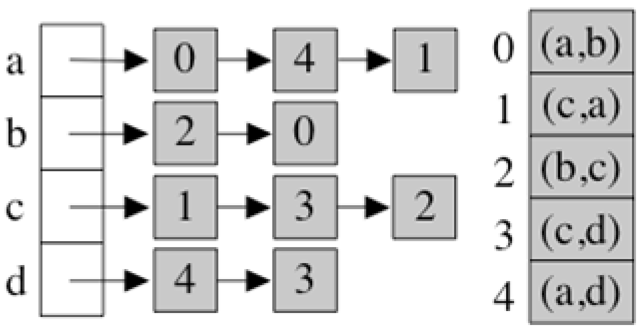


(a) Grafo non orientato G

di G



(c) Liste di adiacenza di G



(d) Liste di incidenza di G

	a	b	c	d
a	0	1	1	1
b	1	0	1	0
c	1	1	0	1
d	1	0	1	0

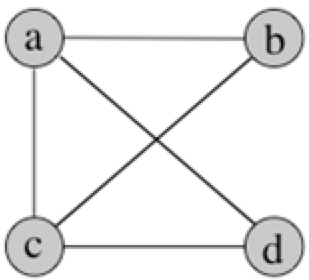
(e) Matrice di adiacenza di G

	(a,b)	(c,a)	(b,c)	(c,d)	(a,d)
a	1	1	0	0	1
b	1	0	1	0	0
c	0	1	1	1	0
d	0	0	0	1	1

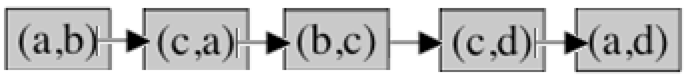
(f) Matrice di incidenza di G

Grafi non diretti

quanto spazio?

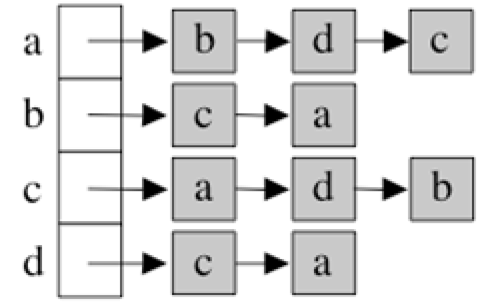


(a) Grafo non orientato G



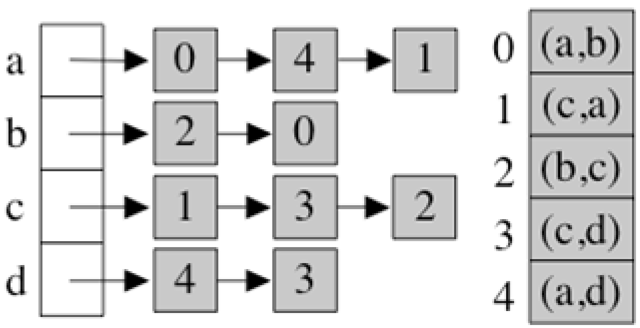
O(m)

(b) Lista di archi di G



O(m + n)

(c) Liste di adiacenza di G



O(m + n)

(d) Liste di incidenza di G

	a	b	c	d
a	0	1	1	1
b	1	0	1	0
c	1	1	0	1
d	1	0	1	0

$O(n^2)$

(e) Matrice di adiacenza di G

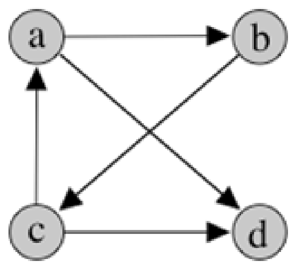
	(a,b)	(c,a)	(b,c)	(c,d)	(a,d)
a	1	1	0	0	1
b	1	0	1	0	0
c	0	1	1	1	0
d	0	0	0	1	1

O(m n)

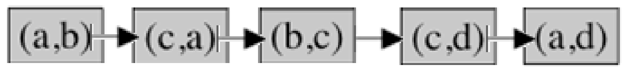
(f) Matrice di incidenza di G

Grafi diretti

quanto spazio?

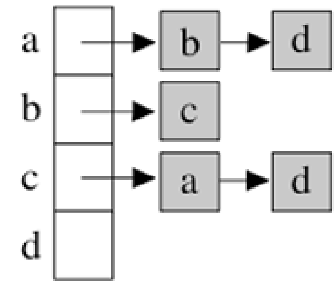


(a) Grafo orientato G



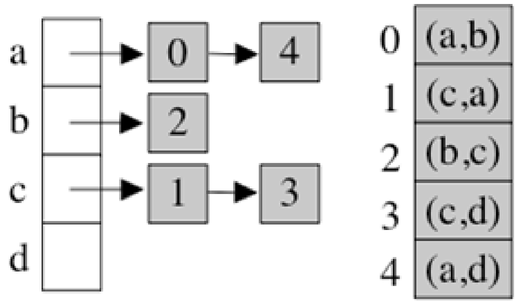
O(m)

(b) Lista di archi di G



O(m + n)

(c) Liste di adiacenza di G



(d) Liste di incidenza di G

O(m + n)

	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	0	0	1	0
c	1	0	0	1
d	0	0	0	0

(e) Matrice di adiacenza di G

$O(n^2)$

	(a,b)	(c,a)	(b,c)	(c,d)	(a,d)
a	1	-1	0	0	1
b	-1	0	1	0	0
c	0	1	-1	1	0
d	0	0	0	-1	-1

(f) Matrice di incidenza di G

O(m n)

Prestazioni della lista di archi (grafi non diretti)

Operazione	Tempo di esecuzione
grado(v)	$\Theta(m)$
archiIncident	$\Theta(m)$
sonoAdiacenti	$O(m)$
aggiungiVerti	$O(1)$
aggiungiArco(	$O(1)$
rimuoviVertice(v)	$\Theta(m)$
rimuoviArco(e)	$O(1)$

Prestazioni liste di adiacenza (grafi non diretti)

Operazione	Tempo di esecuzione
grado(v)	$\Theta(\delta(v))$
archiIncidenti(v)	$\Theta(\delta(v))$
sonoAdiacenti(x, y)	$O(\min\{\delta(x), \delta(y)\})$
aggiungiVertice(v)	$O(1)$
aggiungiArco(x, y)	$O(1)$
rimuoviVertice(v)	$O(m)$
rimuoviArco$(e = (x, y))$	$O(\delta(x) + \delta(y))$

Prestazioni matrice di adiacenza (grafi non diretti)

Operazione	Tempo di esecuzione
grado(v)	$\Theta(n)$
archiIncidenti(v)	$\Theta(n)$
sonoAdiacenti(x, y)	$O(1)$
aggiungiVertice(v)	$\Theta(n)$
aggiungiArco(x, y)	$O(1)$
rimuoviVertice(v)	$O(n^2)$
rimuoviArco$(e = (x, y))$	$O(1)$

Algoritmi e Strutture Dati

Capitolo 11
Visite di grafi

quali parti del grafo
sono raggiungibili
da un certo
nodo?

...eseguo una visita del grafo

Scopo e tipi di visita

- Una visita (o attraversamento) di un grafo G permette di esaminare i nodi e gli archi di G in modo sistematico (se G è connesso)
- Problema di base in molte applicazioni
- Esistono vari tipi di visite con diverse proprietà: in particolare, visita in ampiezza (BFS=breadth first search) e visita in profondità (DFS=depth first search)

Algoritmo di visita generica

- La visita parte da un vertice s prescelto ed esplora seguendo una qualche regola uno dei suoi adiacenti
- Un vertice v raggiunto da u viene marcato come visitato se è stato incontrato per la prima volta, e viene quindi aggiunto alla frangia F di visita; inoltre, il nodo u diventa padre di v, e l’arco (u,v) viene etichettato come arco di visita
- Un vertice rimane nella frangia di visita fintantoché non sono stati esplorati tutti i suoi adiacenti
- La visita genera un albero di copertura T del grafo

Visite particolari

- Se la frangia F è implementata come coda si ha la visita in ampiezza (BFS)
- Se la frangia F è implementata come pila si ha la visita in profondità (DFS)

Visita in ampiezza

dato un grafo G (non pesato) e un nodo s, trova tutte le distanze/cammini minimi da s verso ogni altro nodo v

applicazioni

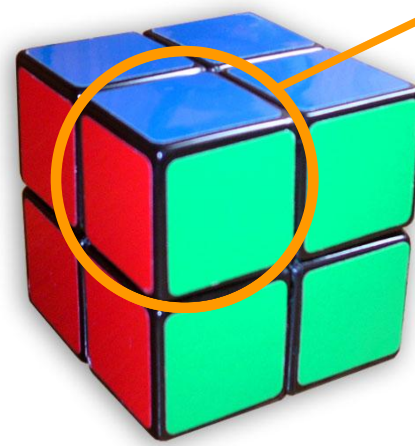
- web crawling
  - come google trova nuove pagine da indicizzare
- social networking
  - trovare gli amici che potresti conoscere
- network broadcast
  - un nodo manda un messaggio a tutti gli altri nodi della rete
- garbage collection
  - come scoprire memoria non più raggiungibile che si può liberare
- model checking
  - verificare una proprietà di un sistema
- risolvere puzzle
  - risolvere il Cubo di Rubik con un numero minimo di mosse

cubo di Rubik: 2x2x2

- grafo delle configurazioni
  - un vertice per ogni possibile stato del cubo
  - un arco fra due configurazioni se l'una è ottenibile dall'altra tramite una mossa

grafo non diretto

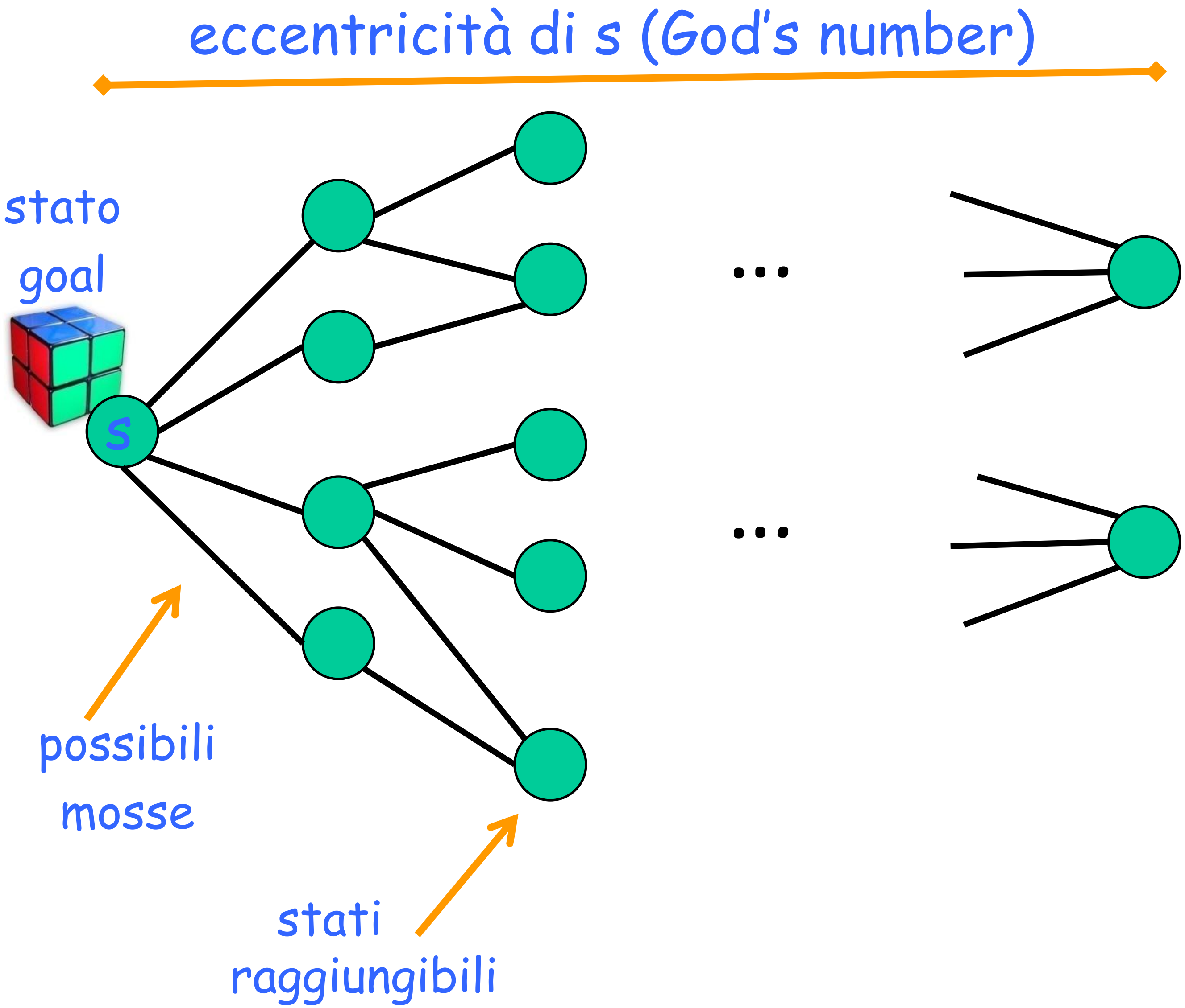
cubetto



#verciti $\leq 8! \times 3^8$

$= 264.539.520$

cubo di Rubik: 2x2x2



God's number

2x2x2: 11

3x3x3: 20

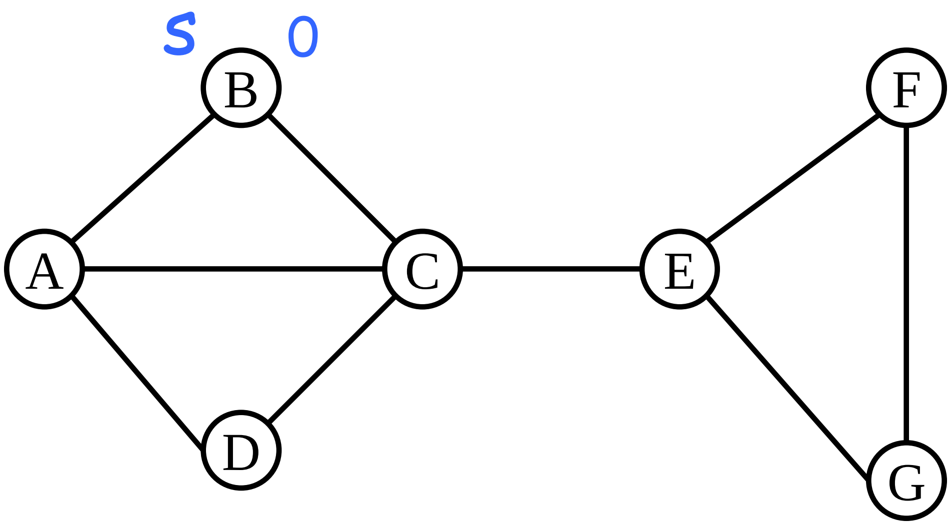
4x4x4: ???

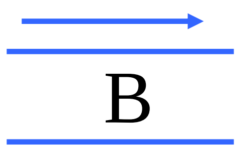
nxnxn: $\Theta(n^2/\log n)$

Visita in ampiezza

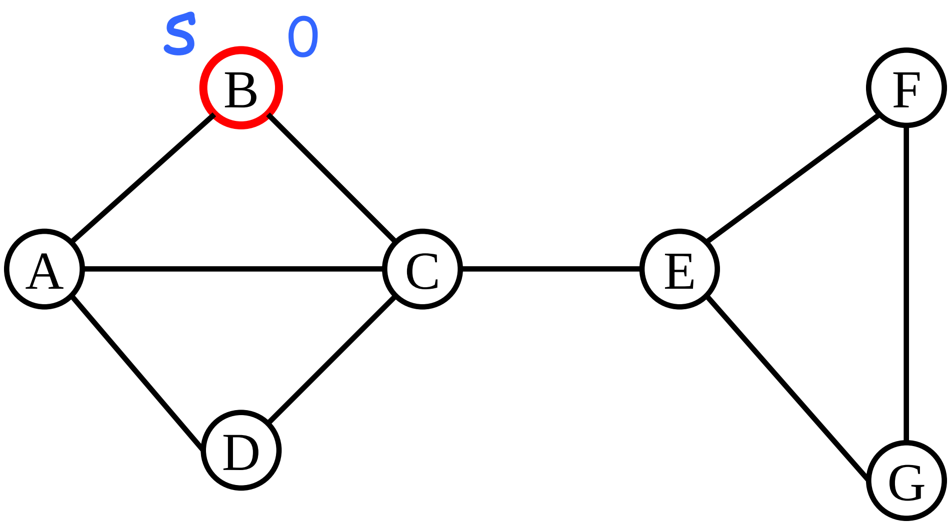
```
algoritmo visitaBFS(vertice s) → albero
    rendi tutti i vertici non marcati
    T ← albero formato da un solo nodo s
    Coda F
    marca il vertice s
    F.enqueue(s)
    while ( not F.isempty() ) do
        u ← F.dequeue()
        for each ( arco (u, v) in G ) do
            if ( v non è ancora marcato ) then
                F.enqueue(v)
                marca il vertice v
                rendi u padre di v in T
    return T
```

Un esempio

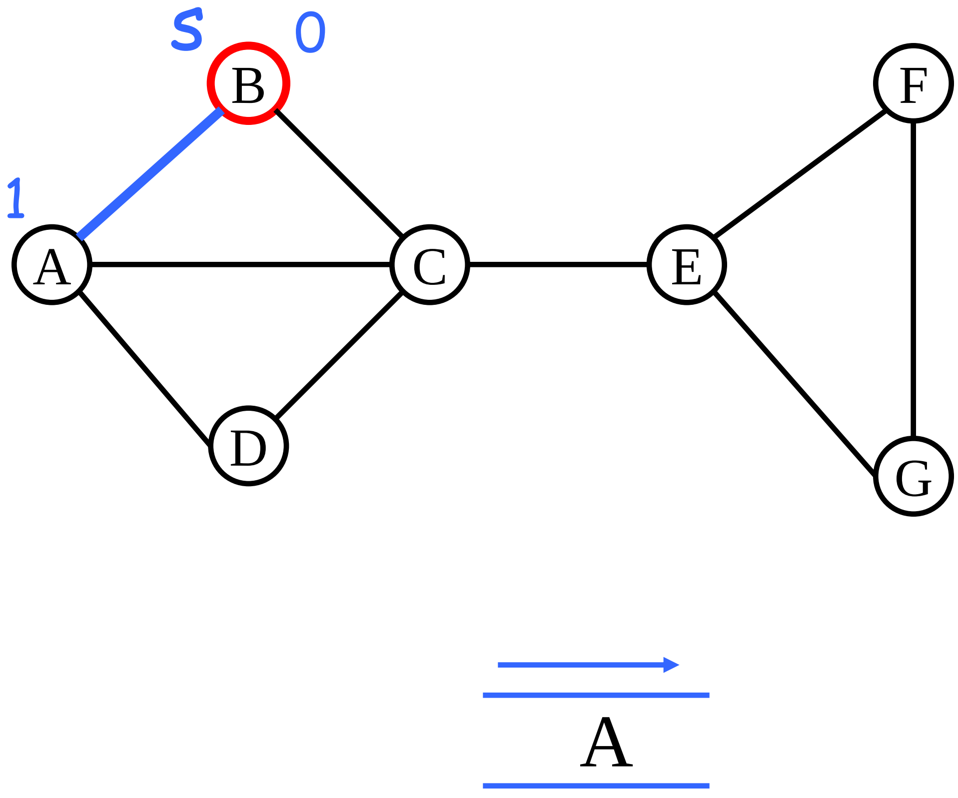




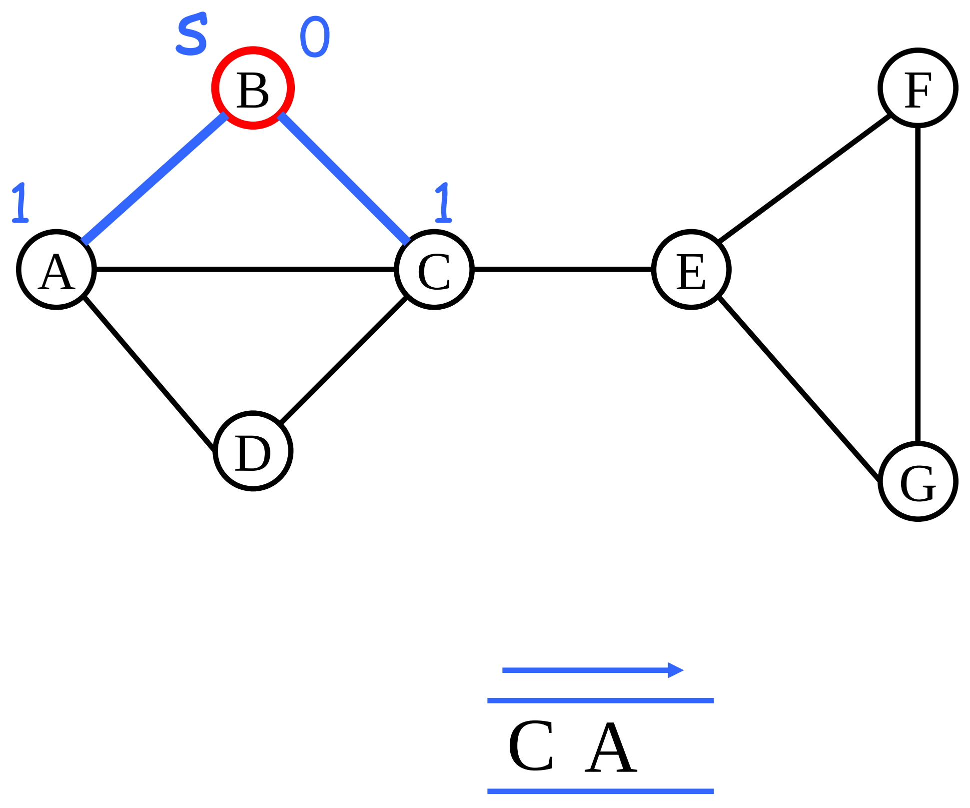
Un esempio



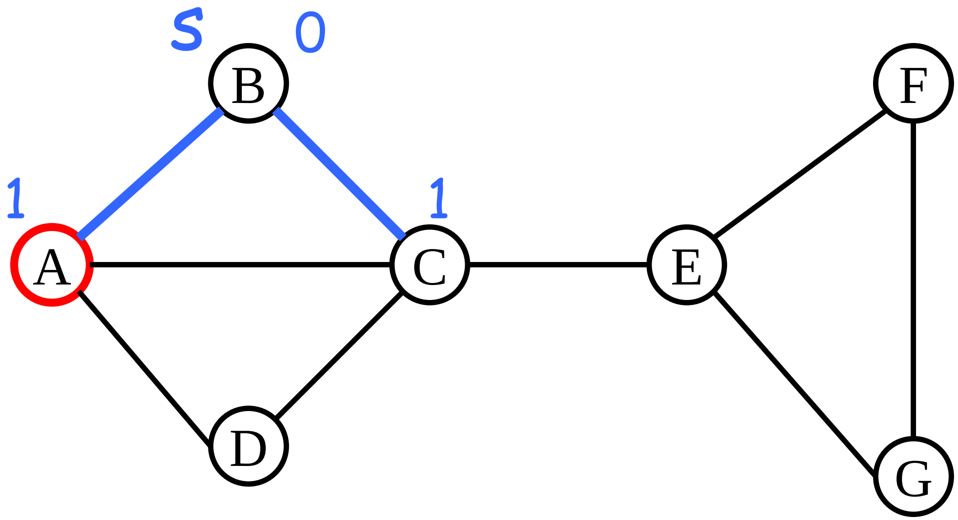
Un esempio

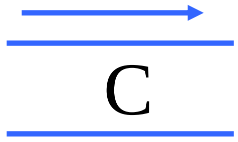


Un esempio

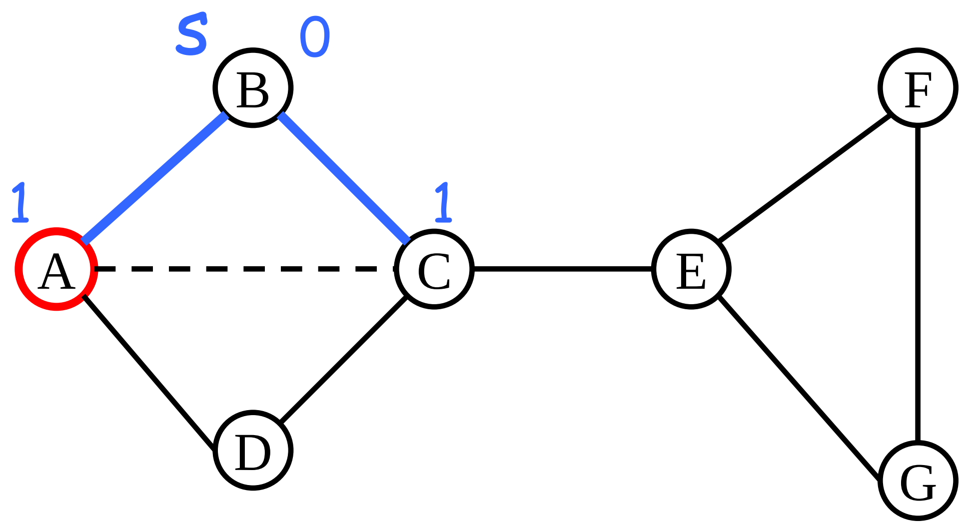


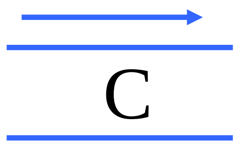
Un esempio



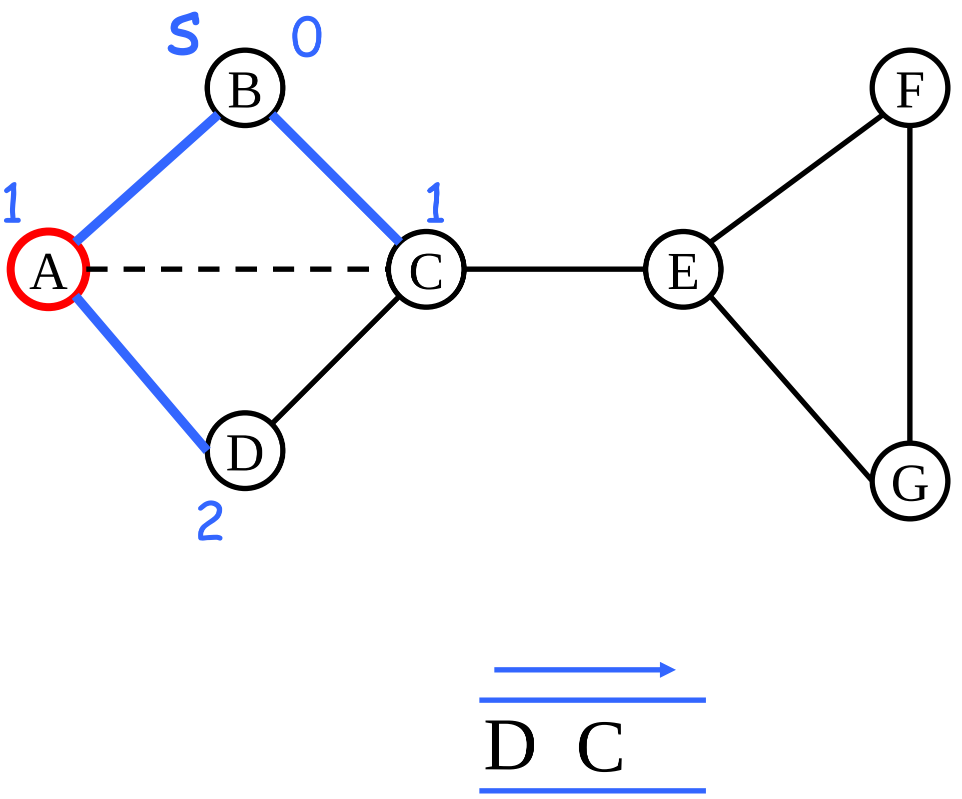


Un esempio

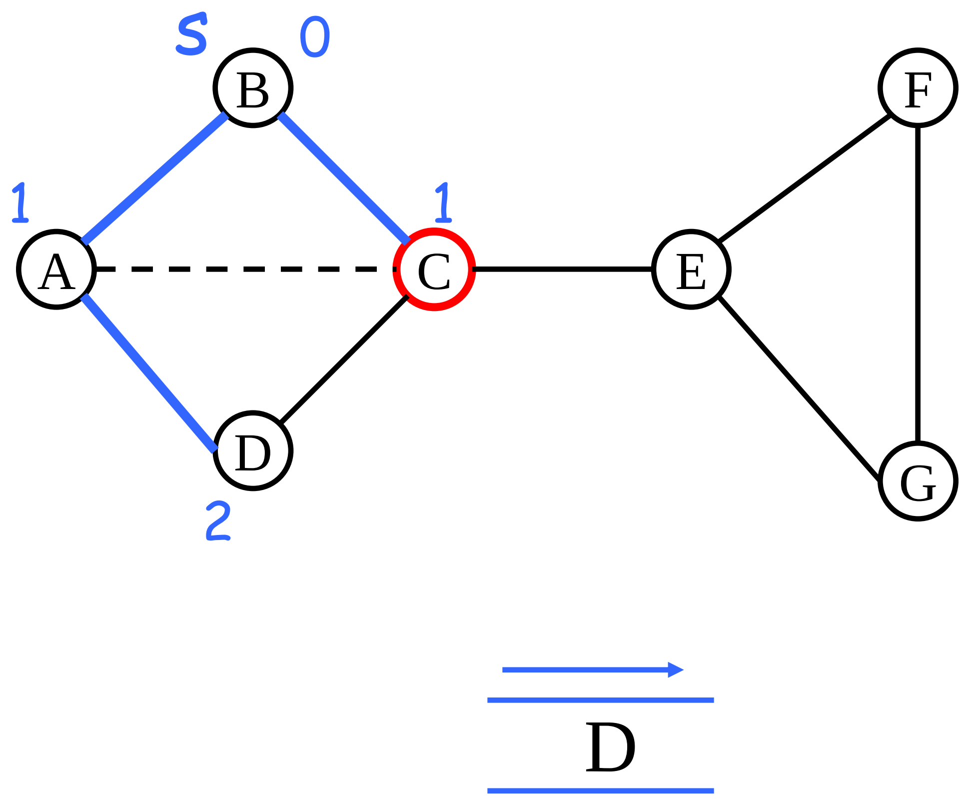




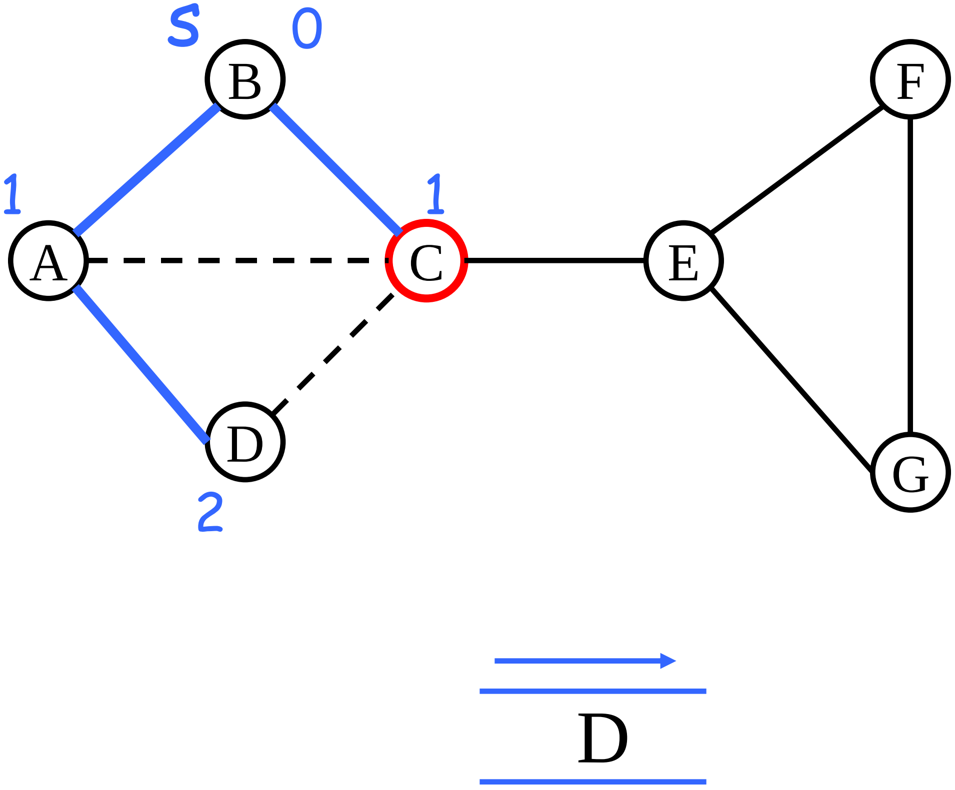
Un esempio



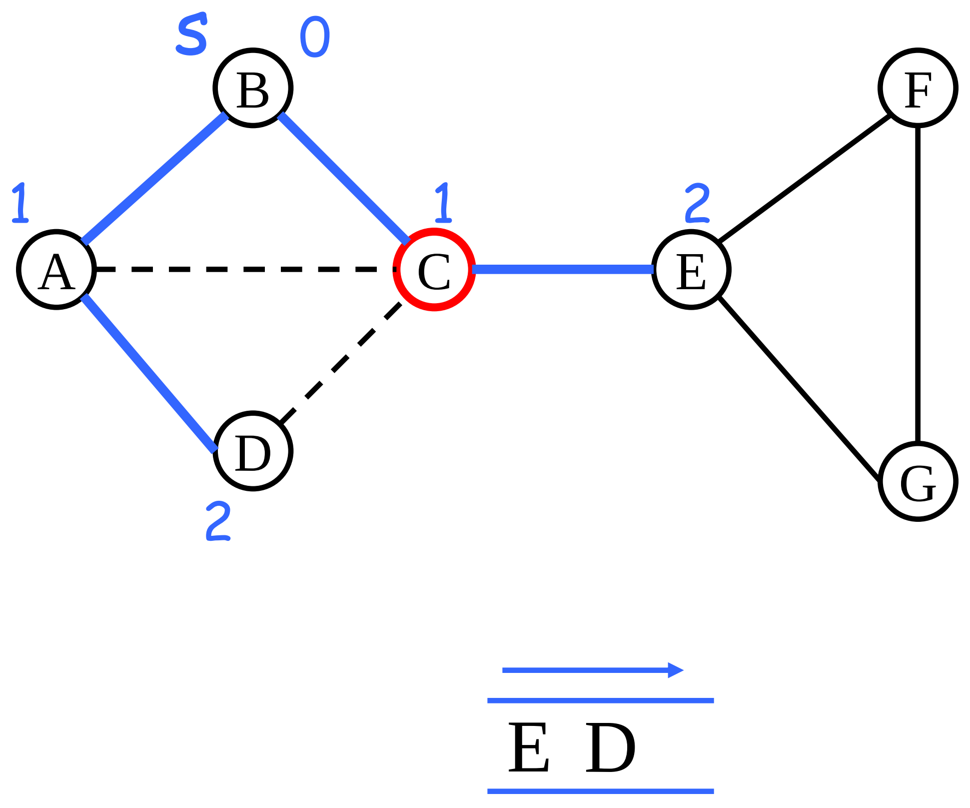
Un esempio



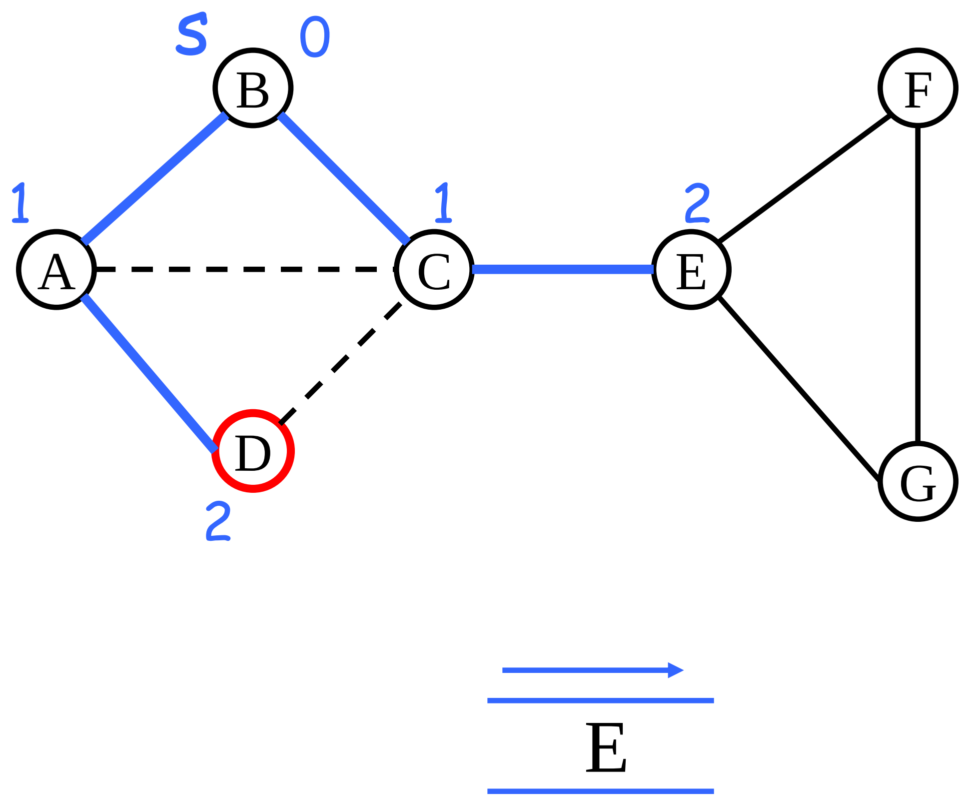
Un esempio



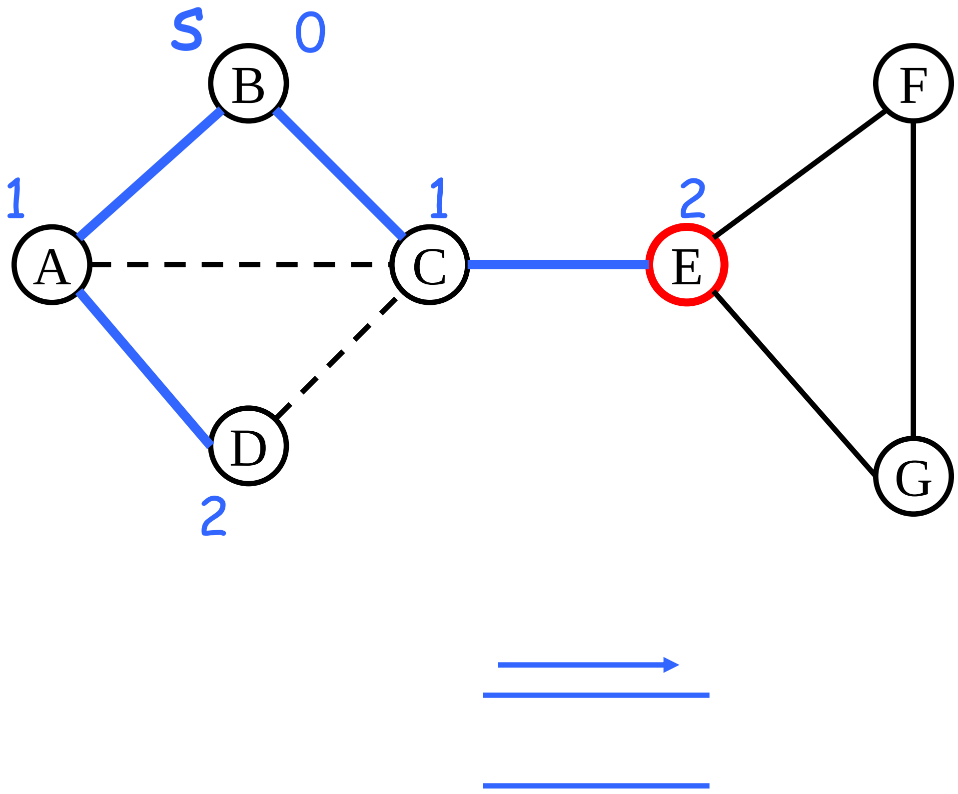
Un esempio



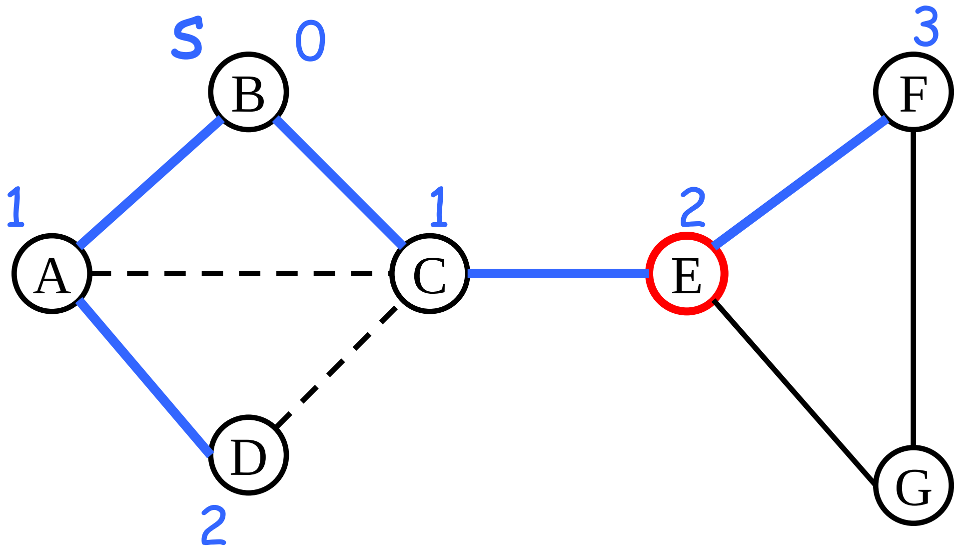
Un esempio

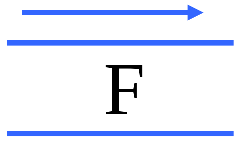


Un esempio

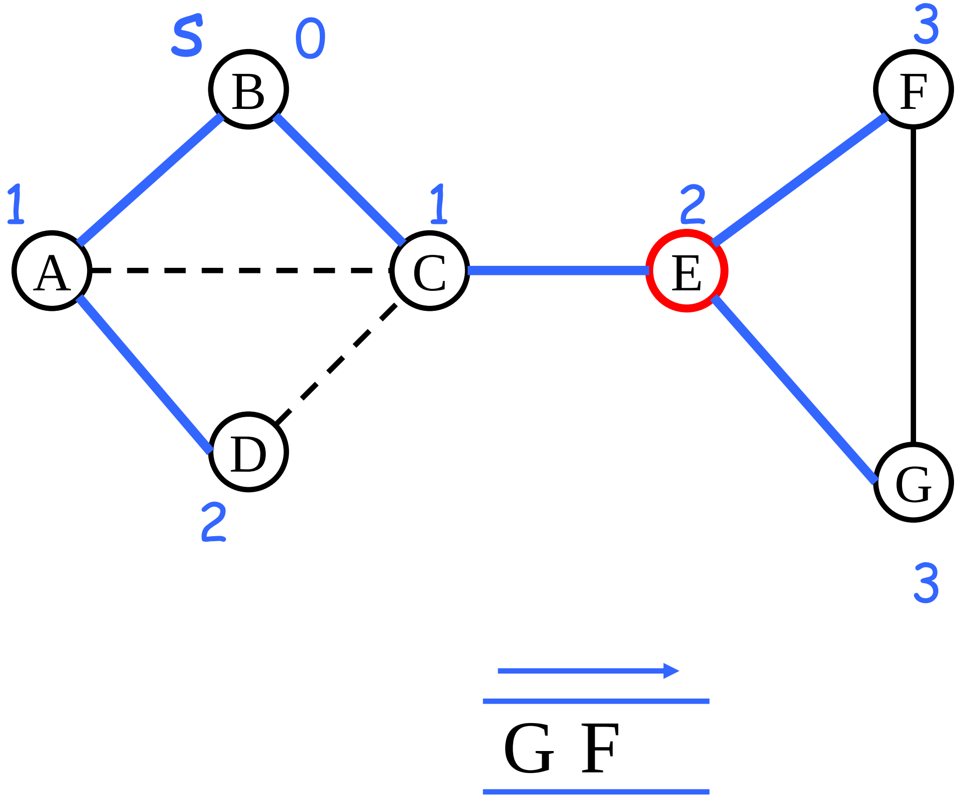


Un esempio

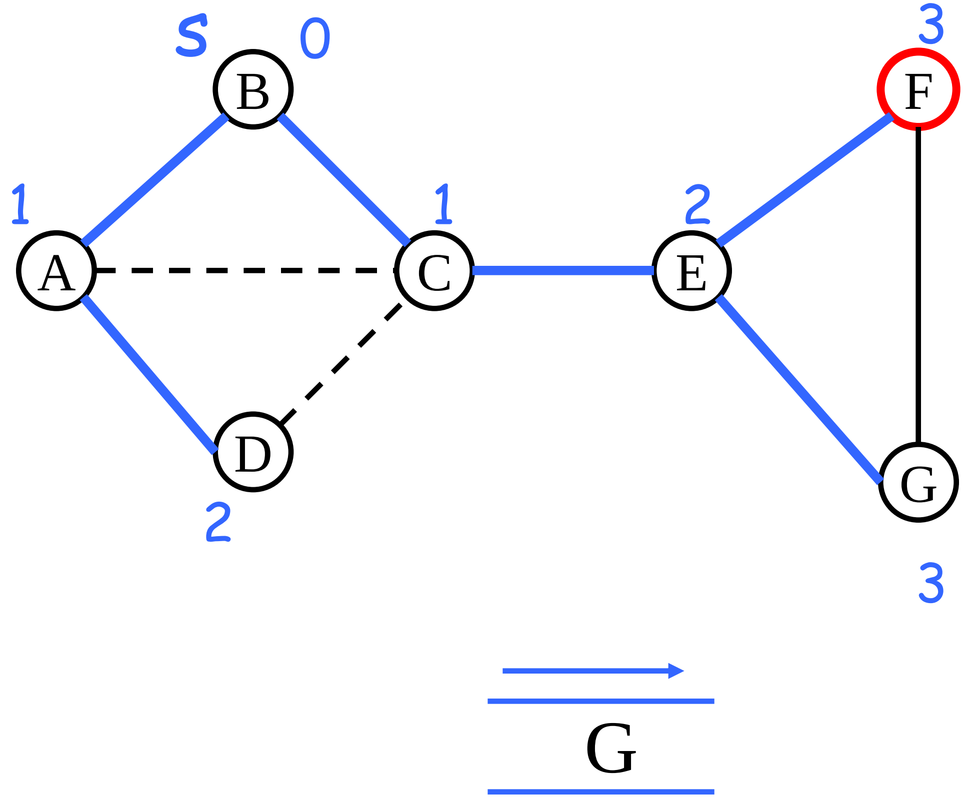




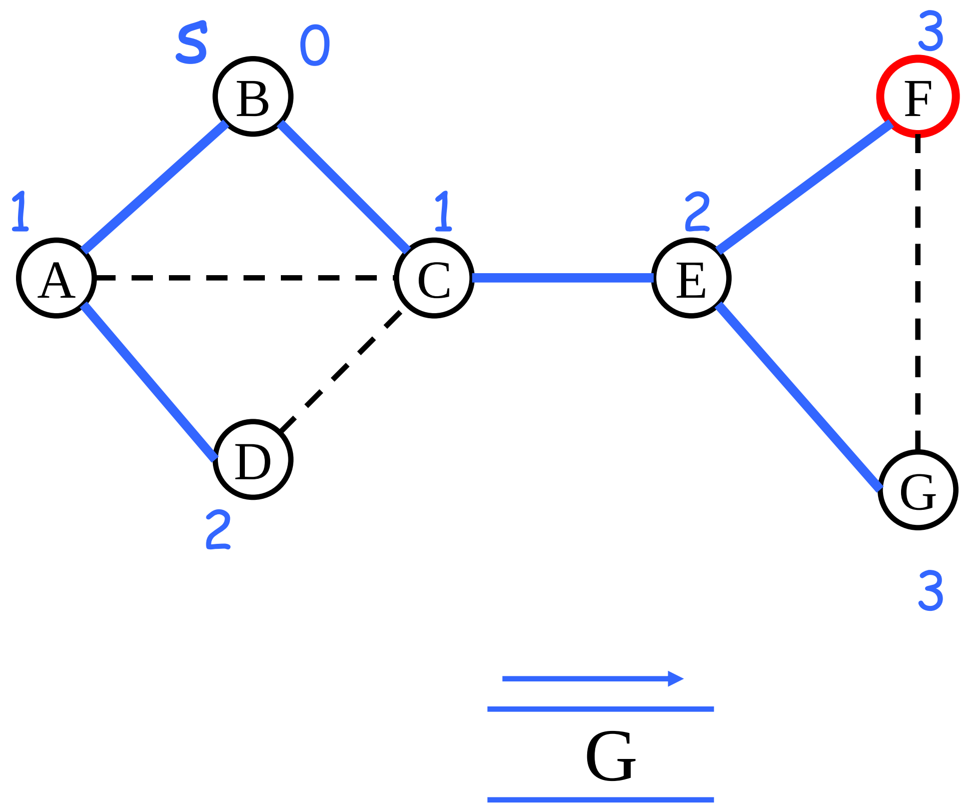
Un esempio



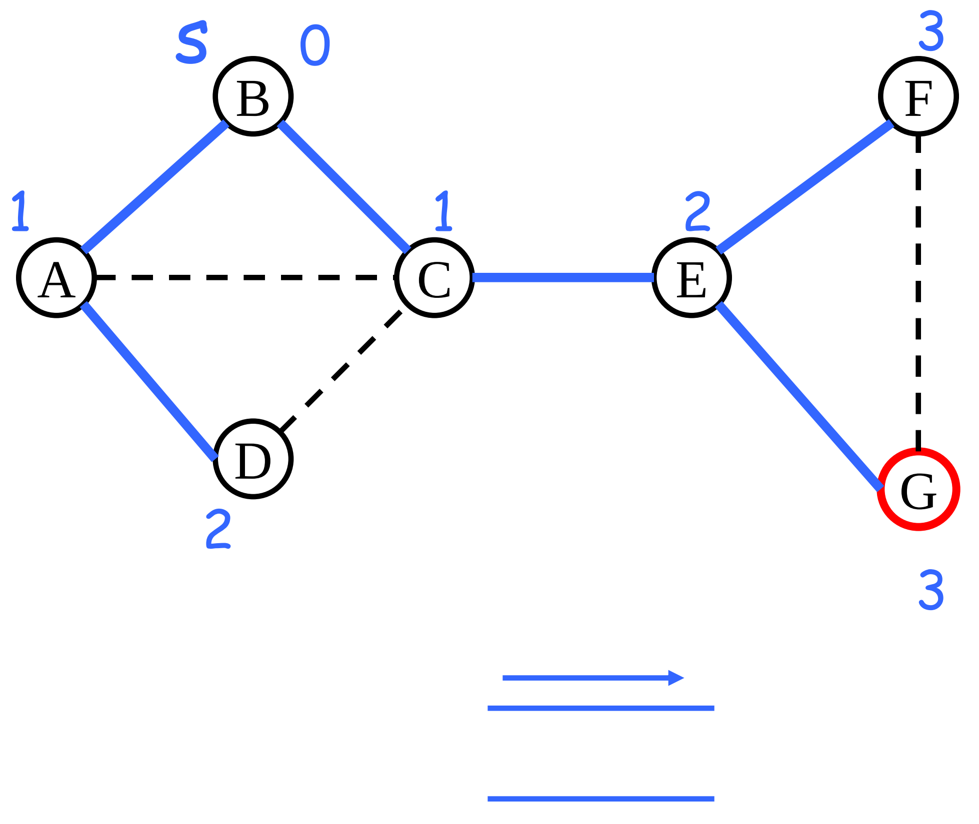
Un esempio



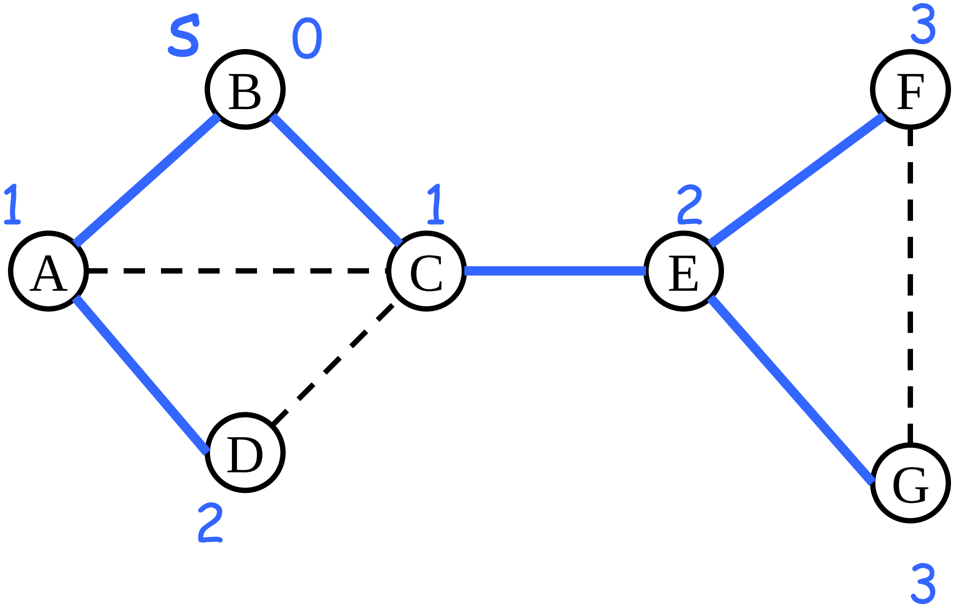
Un esempio



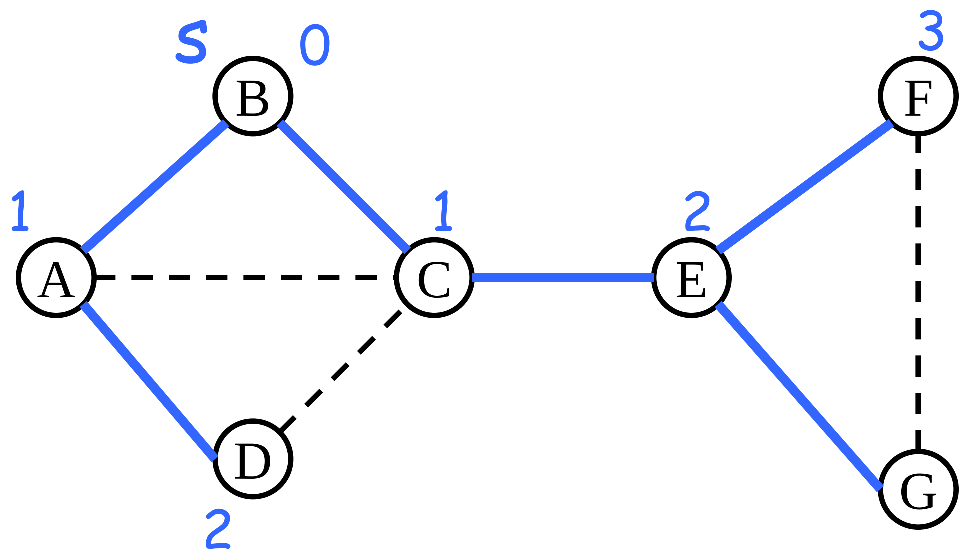
Un esempio

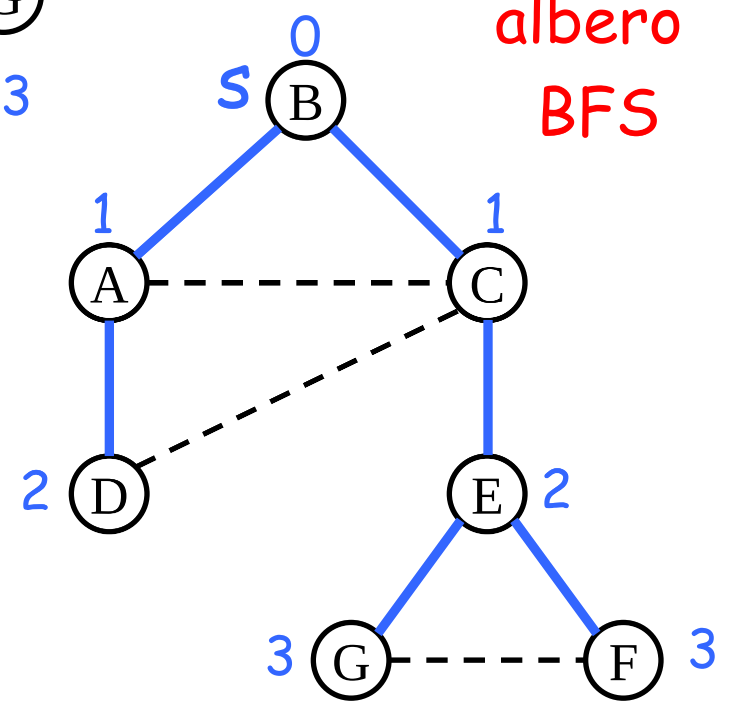


Un esempio



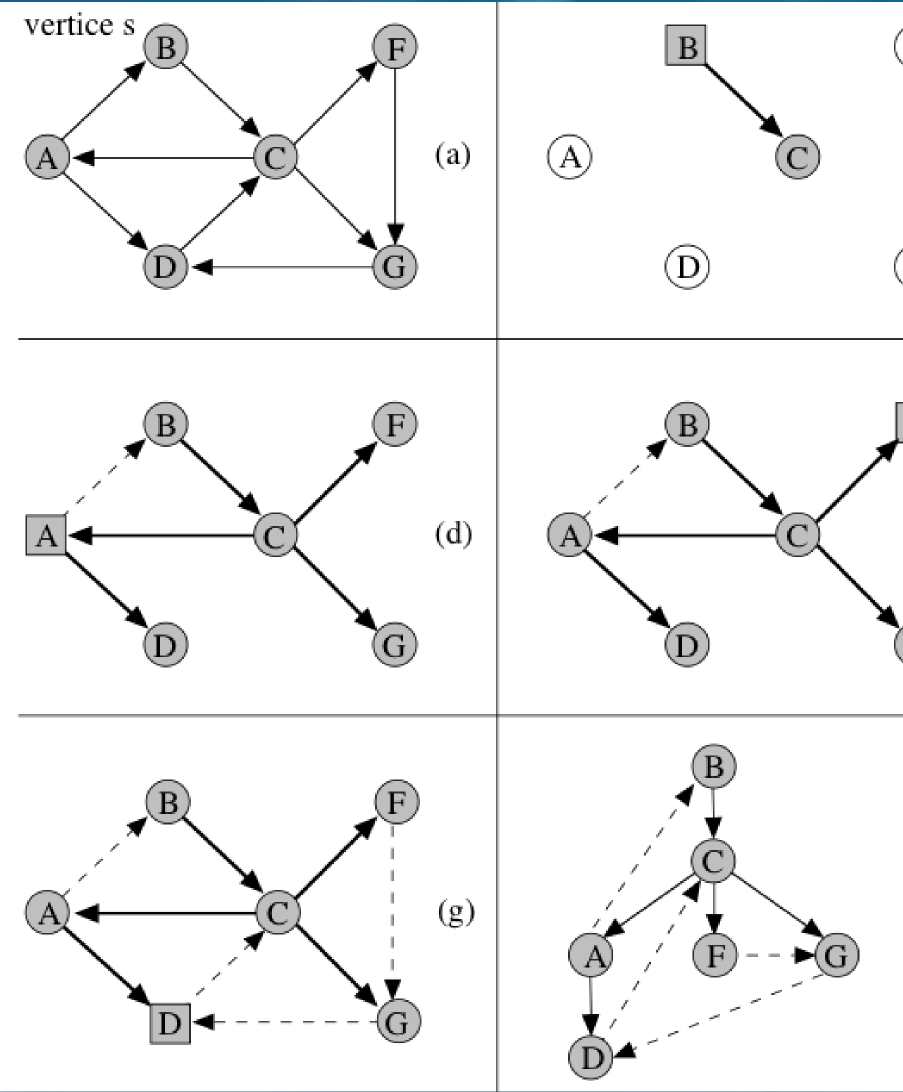
Un esempio





albero dei
cammini di *G*
radicato in *s*

Esempio: grafo orientato



archi con estremi nello stesso livello: (F,G)

archi da un livello a quello immediatamente successivo: (G,D)

archi da un livello a uno precedente: (A,B) e (D,C)

Costo della visita in ampiezza

grafo rappresentato con matrice di adiacenza

```
algoritmo visitaBFS(vertice s) → albero
    rendi tutti i vertici non marcati
    T ← albero formato da un solo nodo s
    Coda F
    marca il vertice s
    F.enqueue(s)
    while ( not F.isempty() ) do
        u ← F.dequeue()
        for each ( arco (u, v) in G ) do
            if ( v non è ancora marcato ) then
                F.enqueue(v)
                marca il vertice v
                rendi u padre di v in T
    return T
```

$O(n^2)$

$O(n)$

Costo della visita in ampiezza

grafo rappresentato con liste di adiacenza

algoritmo `visitaBFS`$(vertice\ s) \rightarrow albero$

rendi tutti i vertici non marcati
$T \leftarrow$ albero formato da un solo nodo s
`Coda F`
marca il vertice s
`F.enqueue`(s)
while (**not** `F.isempty()`) **do**
  $u \leftarrow$ `F.dequeue()`
  for each (arco (u, v) in G) **do**
    if (v non è ancora marcato) **then**
      `F.enqueue`(v)
      marca il vertice v
      rendi u padre di v in T
return T

$O(m+n)$

$\sum_u O(\delta(u))$
$= O(m)$

$O(\delta(u))$

Costo della visita in ampiezza

Il tempo di esecuzione dipende dalla struttura dati usata per rappresentare il grafo (e dalla connettività o meno del grafo rispetto ad s):

- Liste di adiacenza: $O(m+n)$
- Matrice di adiacenza: $O(n^2)$

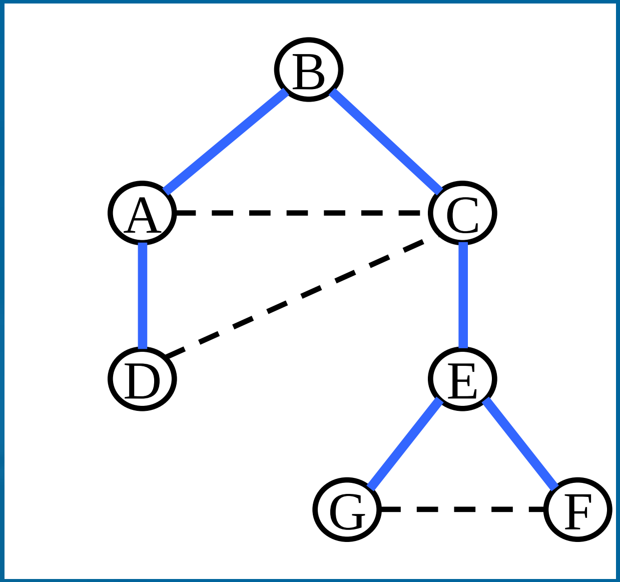
Osservazioni:

1. Si noti che se il grafo è connesso allora $m \geq n-1$ e quindi $O(m+n)=O(m)$
2. Ricordando che $m \leq n(n-1)/2$, si ha $O(m+n)=O(n^2)$

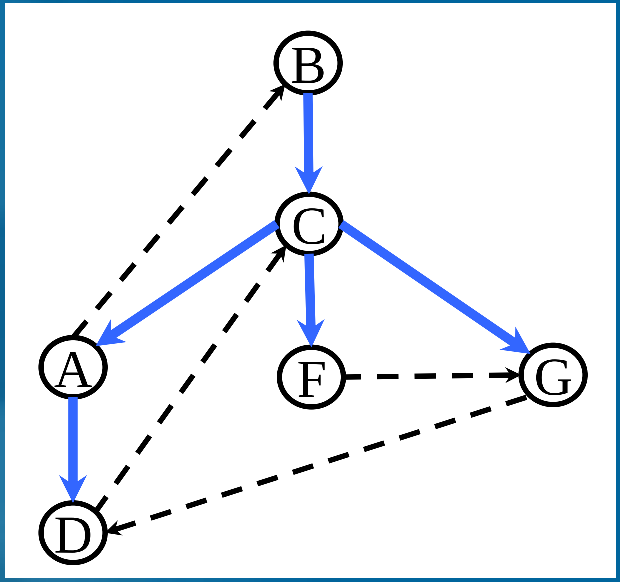
$\Rightarrow$ per $m=o(n^2)$ la rappresentazione mediante liste di adiacenza è temporalmente più efficiente!

Proprietà dell'albero BFS radicato in s

- Se il grafo è non orientato, per ogni arco (u,v) del grafo gli estremi u e v appartengono allo stesso livello o a livelli consecutivi dell'albero BFS



- Se il grafo è orientato, allora gli archi orientati verso il basso uniscono nodi sullo stesso livello o su livelli adiacenti, mentre gli archi orientati verso l'alto possono unire nodi su livelli non adiacenti



Proprietà dell'albero BFS radicato in s

- Per ogni nodo v, il livello di v nell'albero BFS è pari alla distanza di v dalla sorgente s (sia per grafi orientati che non orientati)
  - Perché? Conseguenza delle seguenti proprietà:

Proprietà 1

I nodi di G vengono inseriti nella coda F in ordine non decrescente di distanza dalla sorgente s

Proprietà 2

Quando un nodo v è inserito in F, il livello di v nell'albero BFS è uguale alla sua distanza da s

Proprietà dell'albero BFS radicato in s

- Per ogni nodo v, il livello di v nell'albero BFS è pari alla distanza di v dalla sorgente s (sia per grafi orientati che non orientati)

dimostrazione informale

- all'inizio inserisco s in F (che è a distanza 0 da se stesso) e gli assegno livello 0; chiaramente s è l'unico nodo a distanza 0.

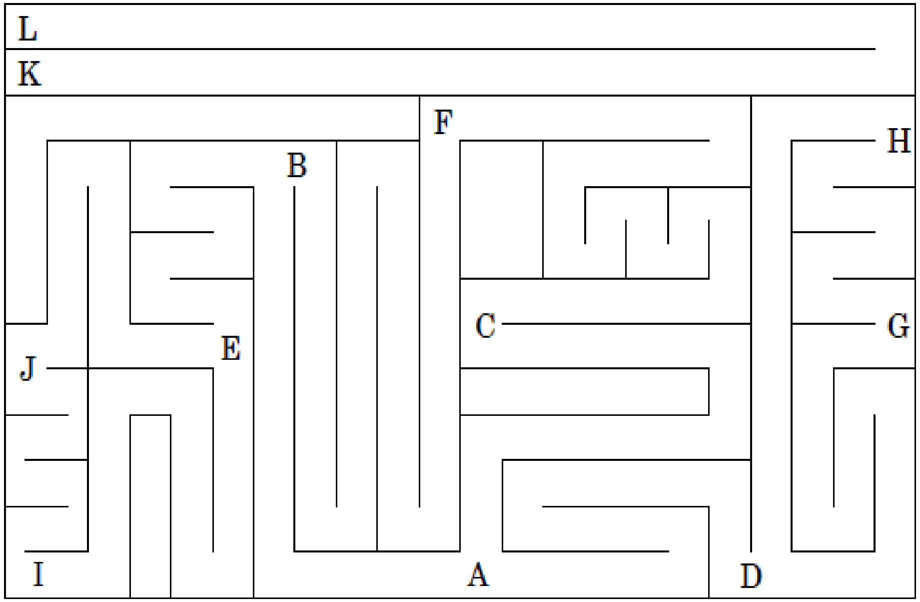
- estraggo s e guardo tutti suoi vicini; questi sono tutti i nodi a distanza 1 da s; li inserisco in F e assegno loro livello 1. Ora in F ho tutti i nodi a distanza 1.

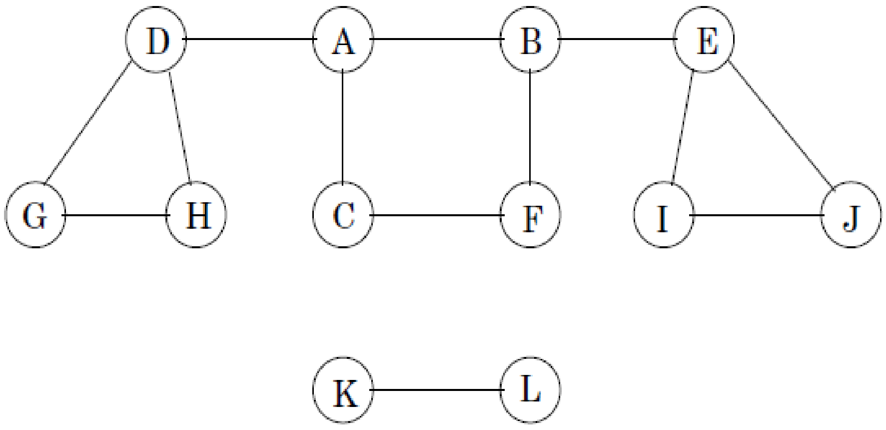
- estraggo uno a uno tutti i nodi di livello/distanza 1 e per ognuno guardo tutti suoi vicini; i vicini non marcati sono a distanza 2 da s; li inserisco in F e assegno loro livello 2; quando ho estratto e visitato tutti i nodi di livello 1, in F ho tutti i nodi a distanza 2 da s.

- estraggo uno a uno tutti i nodi di livello/distanza 2 e per ognuno guardo tutti suoi vicini; i vicini non marcati sono a distanza 3 da s…

Visita in profondità

un'analogia: esplorare un labirinto





Cosa mi serve?

gesso: per segnare le strade prese

variabile booleana: dice se un nodo è stato già visitato

corda: per tornare indietro se necessario

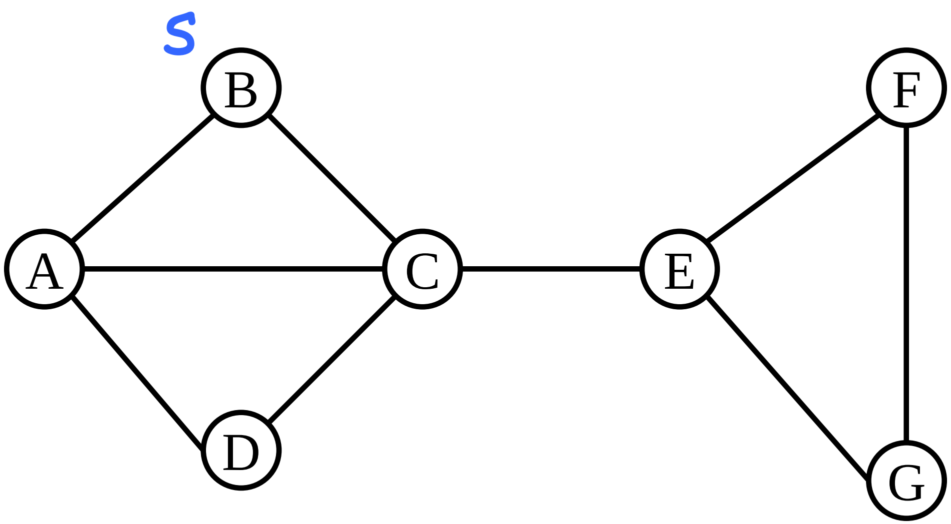
pila: push vuol dire srotolare
pop vuol dire arrotolare

Visita in profondità

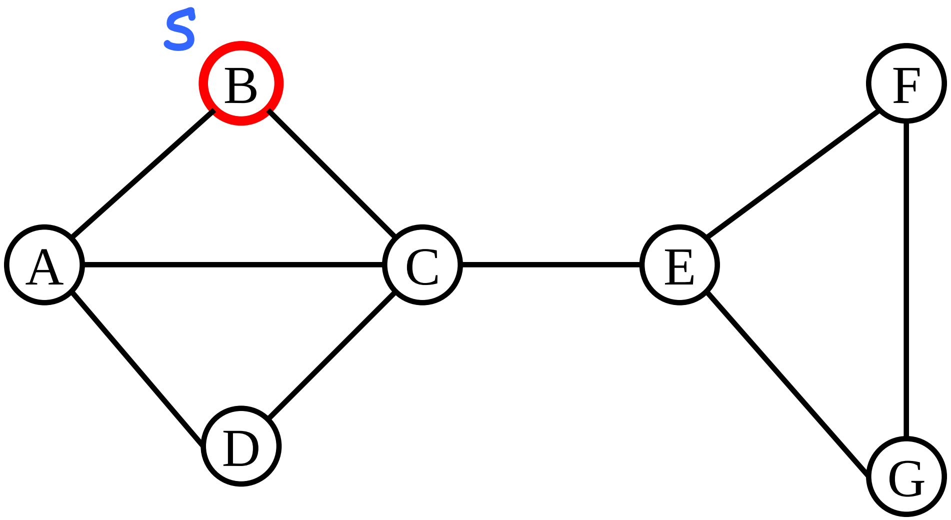
```
procedura visitaDFSRicorsiva(vertice v, albero T)
1.   marca e visita il vertice v
2.   for each ( arco (v, w) ) do
3.      if ( w non è marcato ) then
4.         aggiungi l'arco (v, w) all'albero T
5.         visitaDFSRicorsiva(w, T)

algoritmo visitaDFS(vertice s) → albero
6.   T ← albero vuoto
7.   visitaDFSRicorsiva(s, T)
8.   return T
```

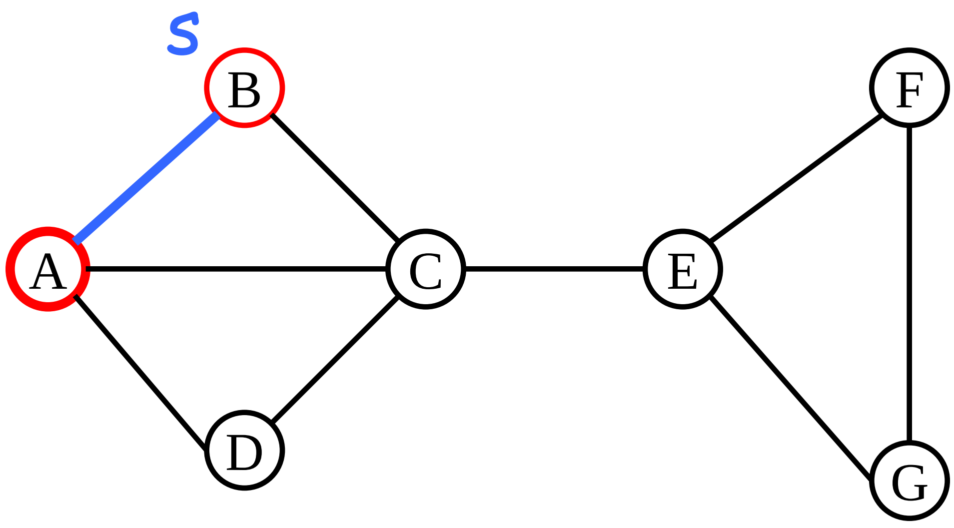
Un esempio: visita DFS



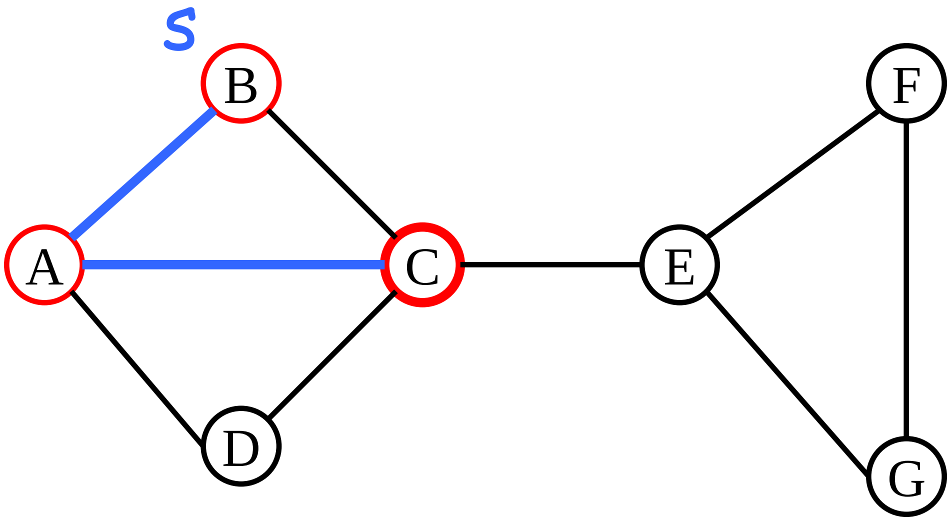
Un esempio: visita DFS



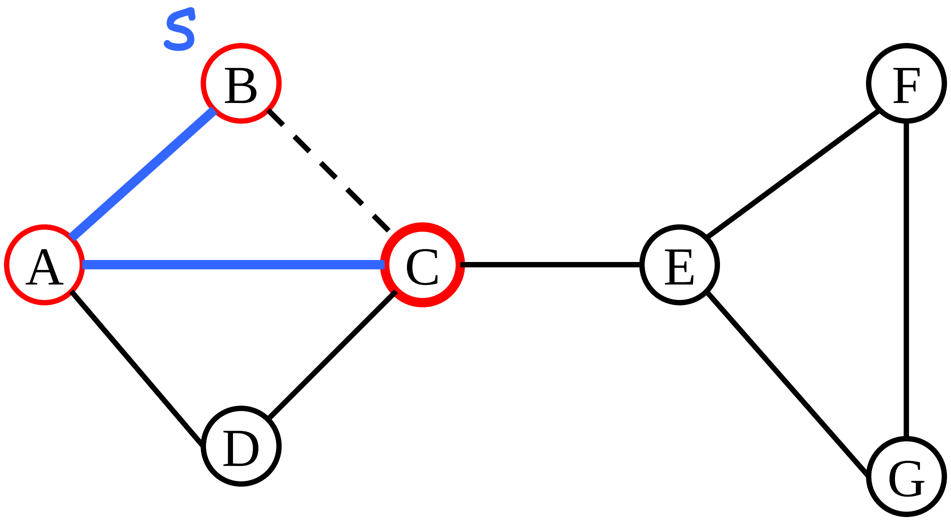
Un esempio: visita DFS



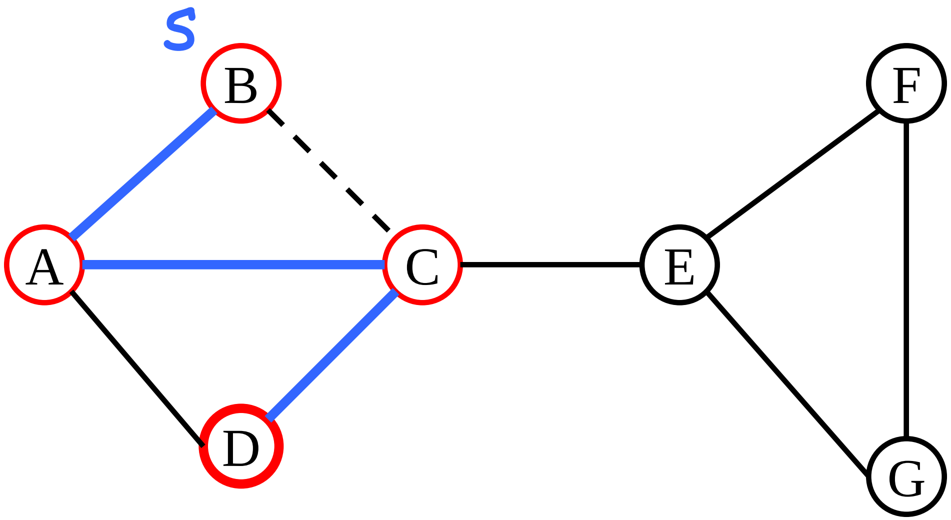
Un esempio: visita DFS



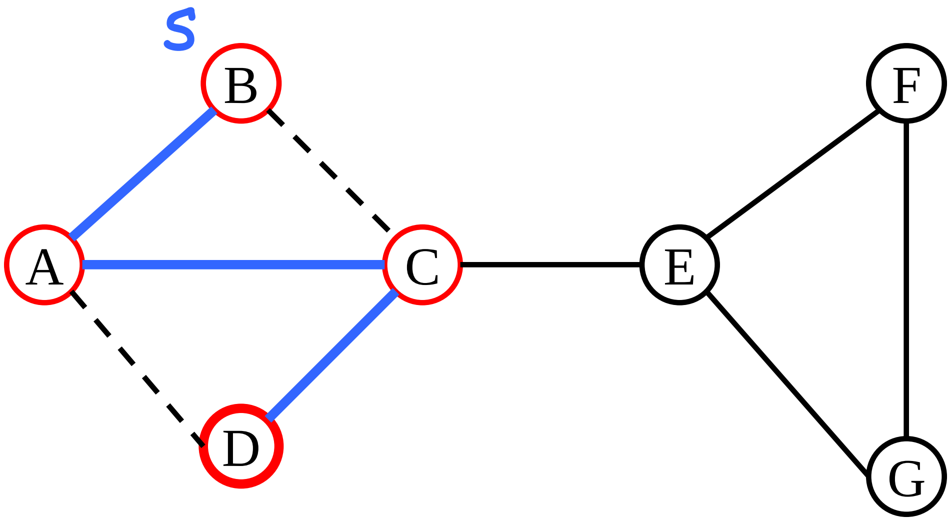
Un esempio: visita DFS



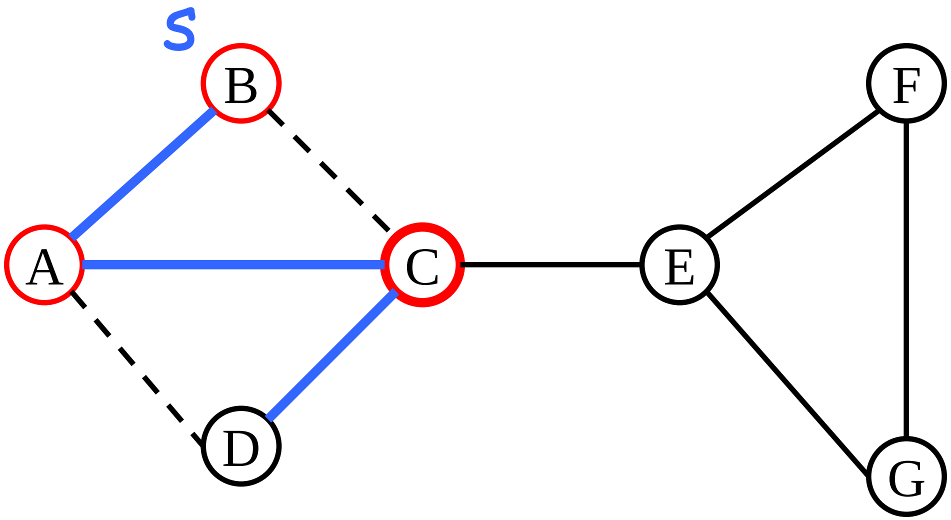
Un esempio: visita DFS



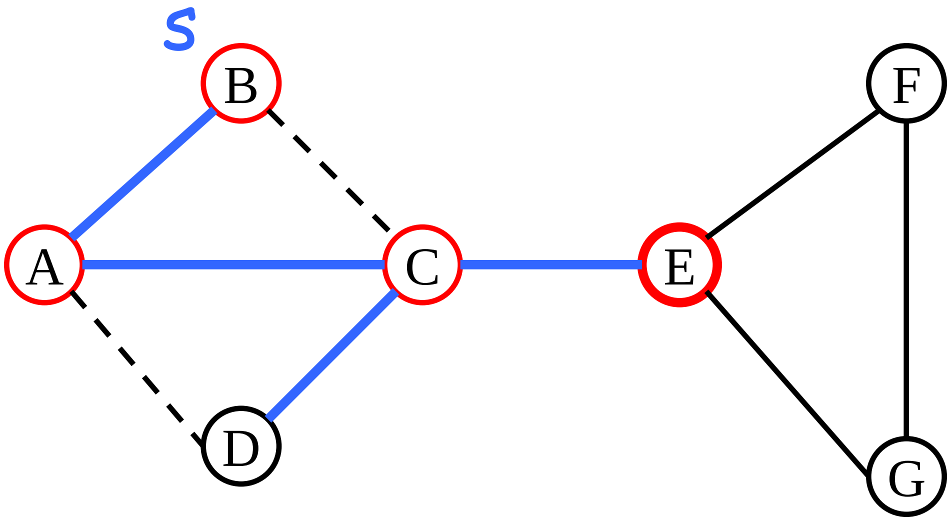
Un esempio: visita DFS



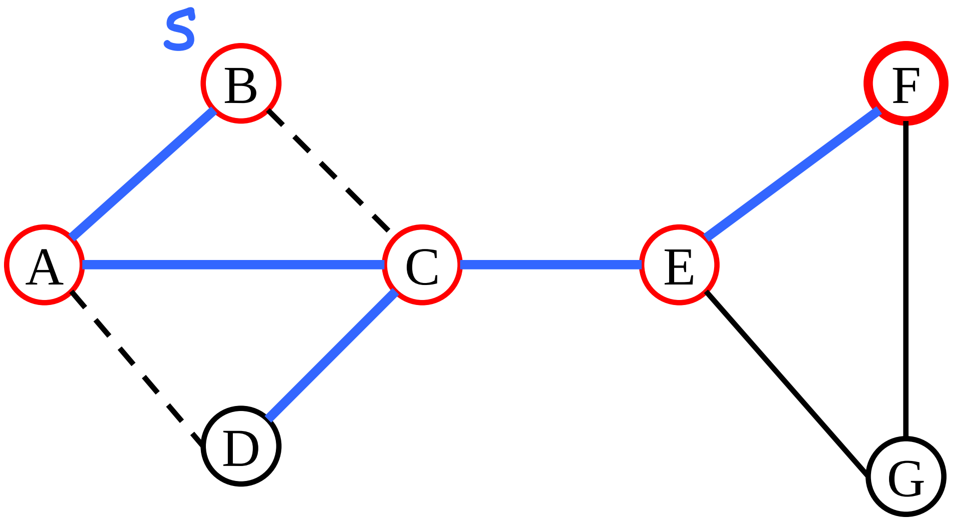
Un esempio: visita DFS



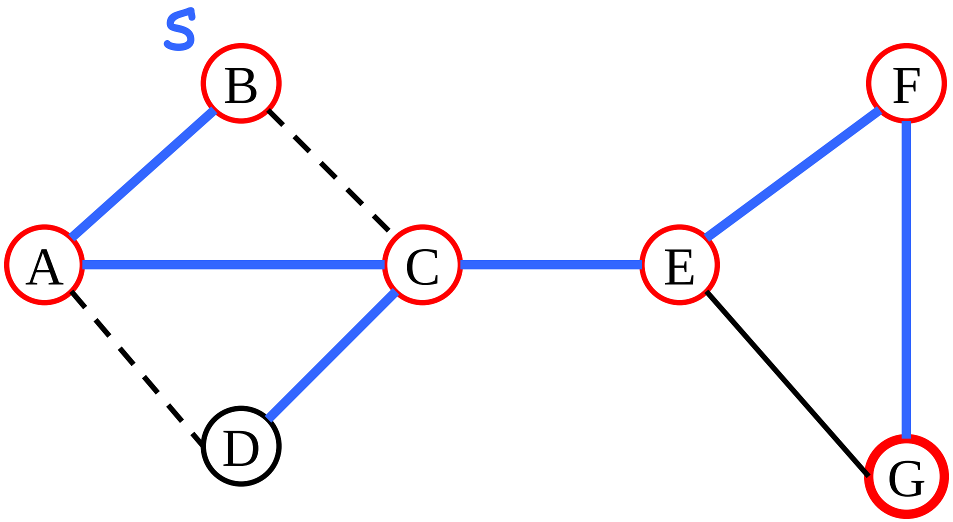
Un esempio: visita DFS



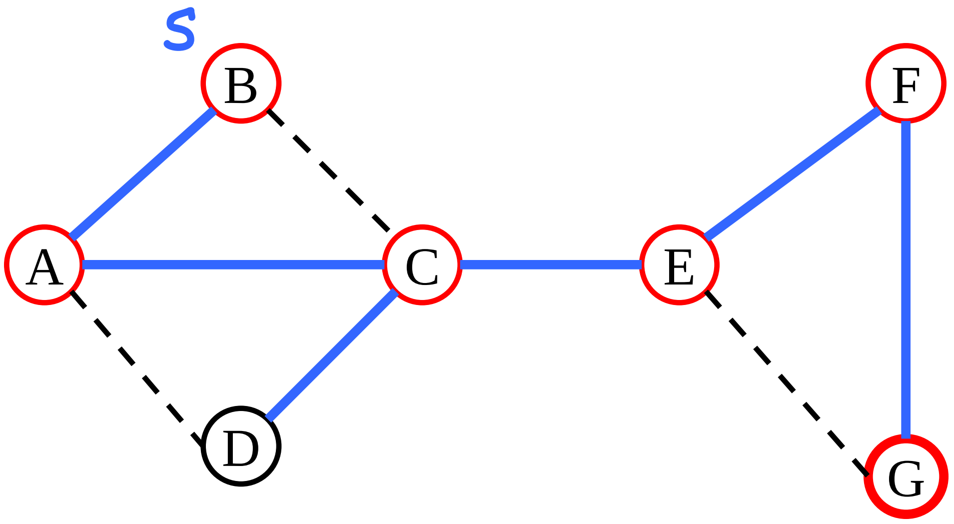
Un esempio: visita DFS



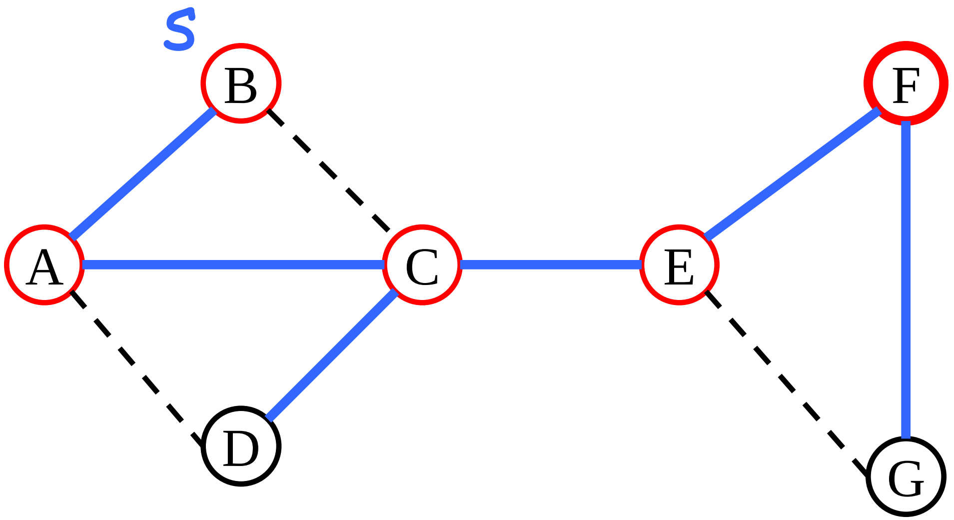
Un esempio: visita DFS



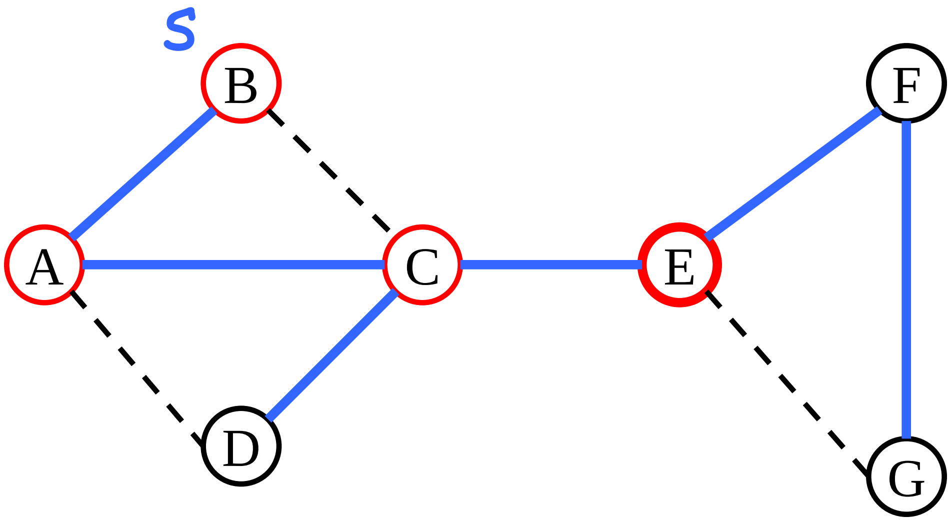
Un esempio: visita DFS



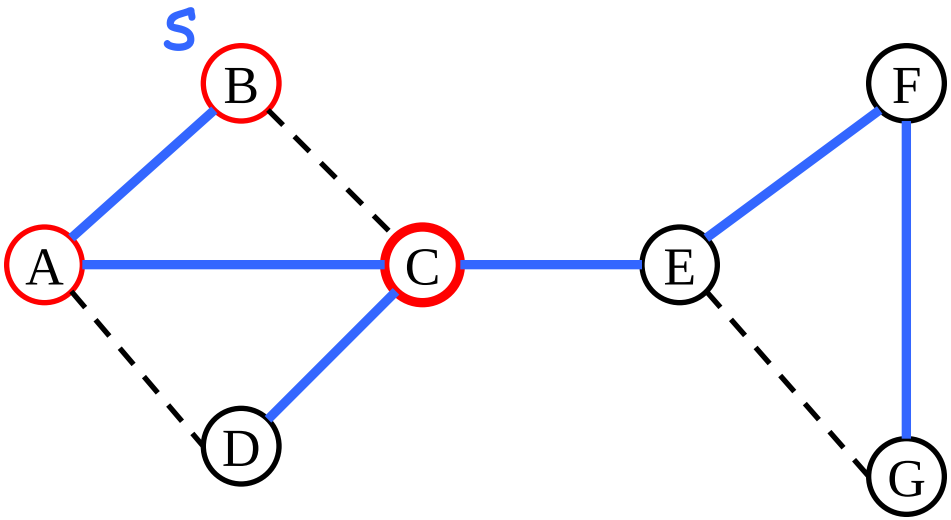
Un esempio: visita DFS



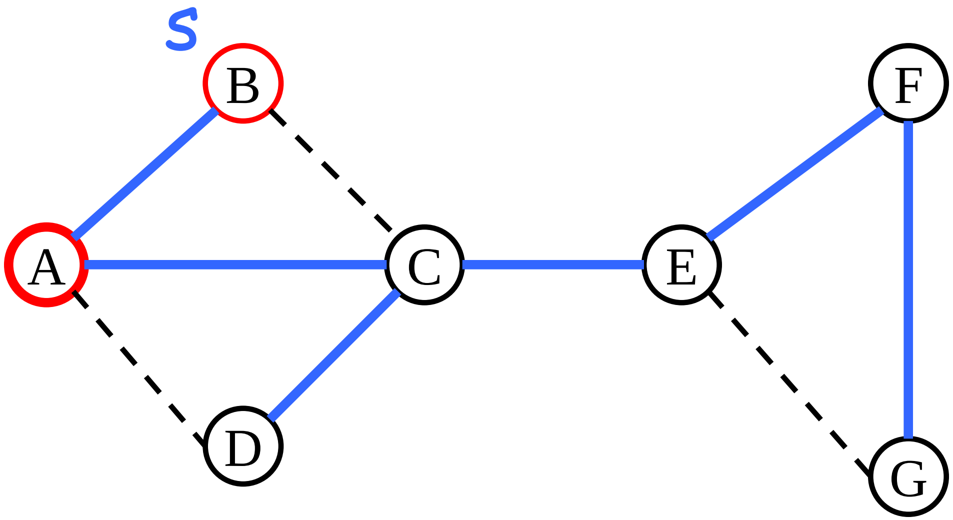
Un esempio: visita DFS



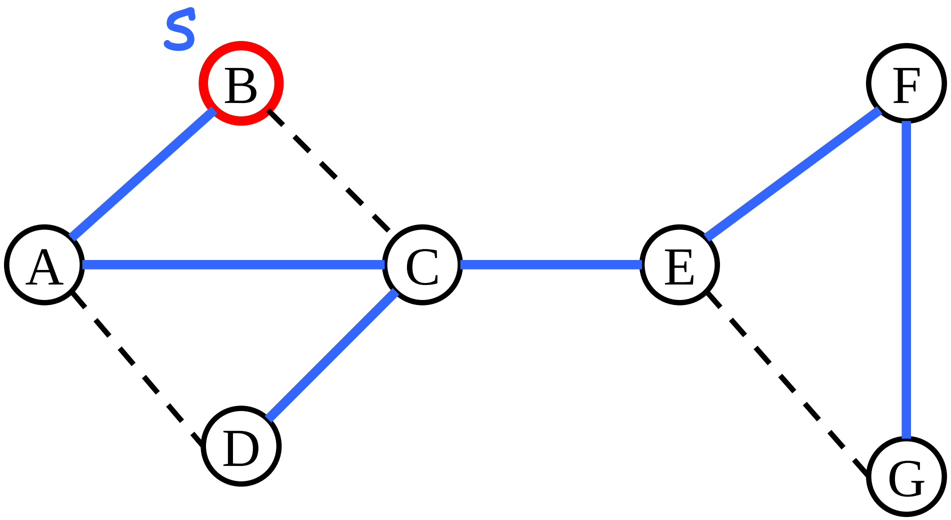
Un esempio: visita DFS



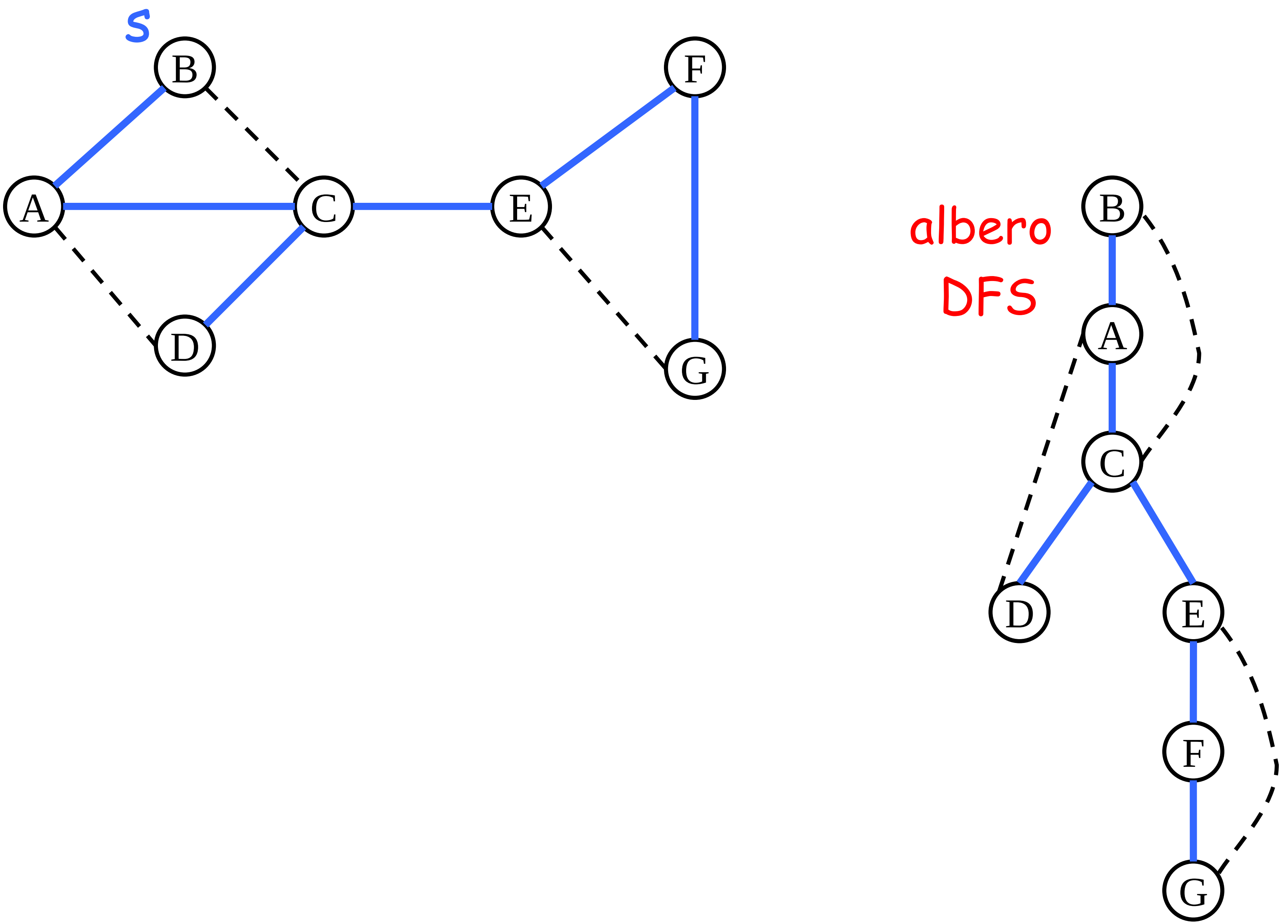
Un esempio: visita DFS



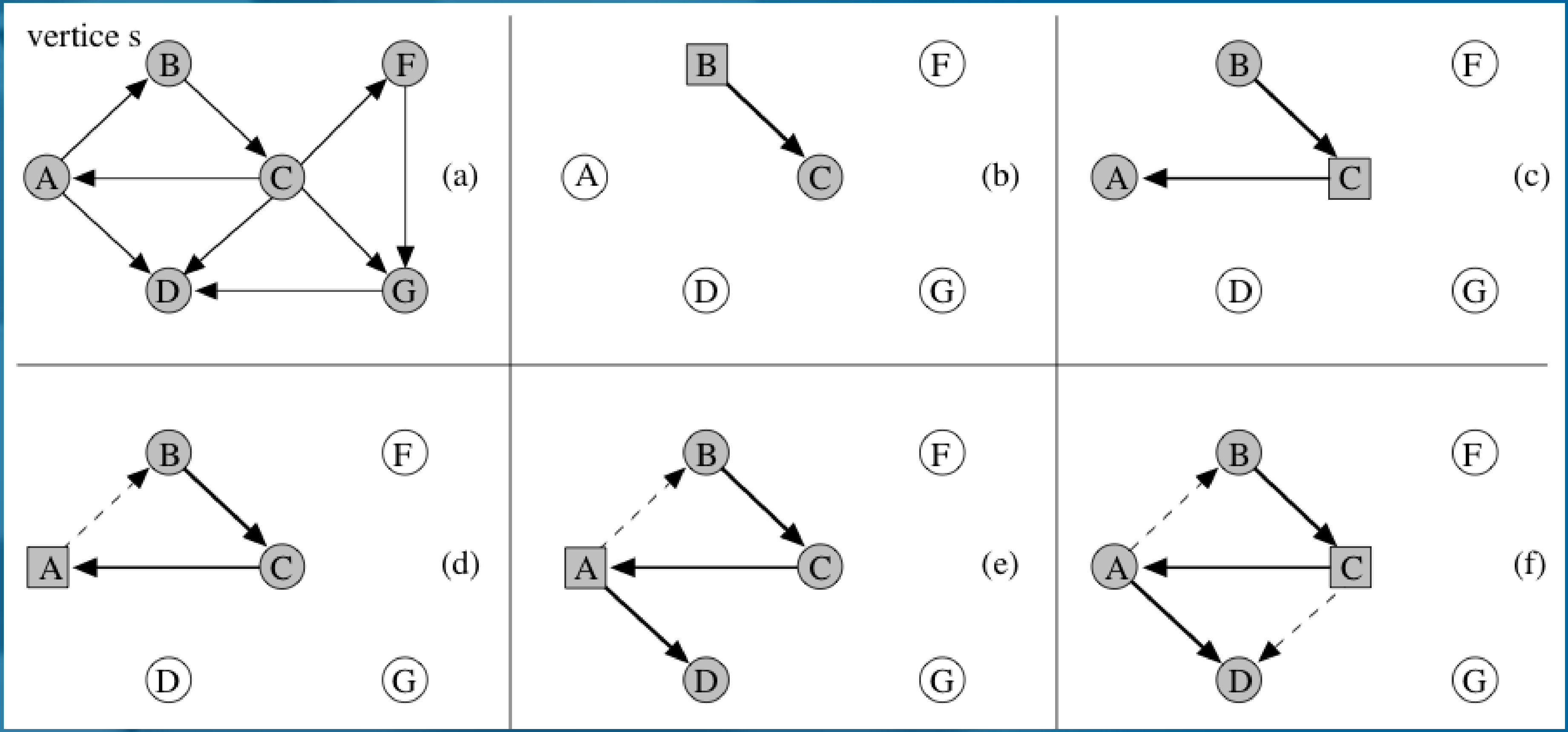
Un esempio: visita DFS



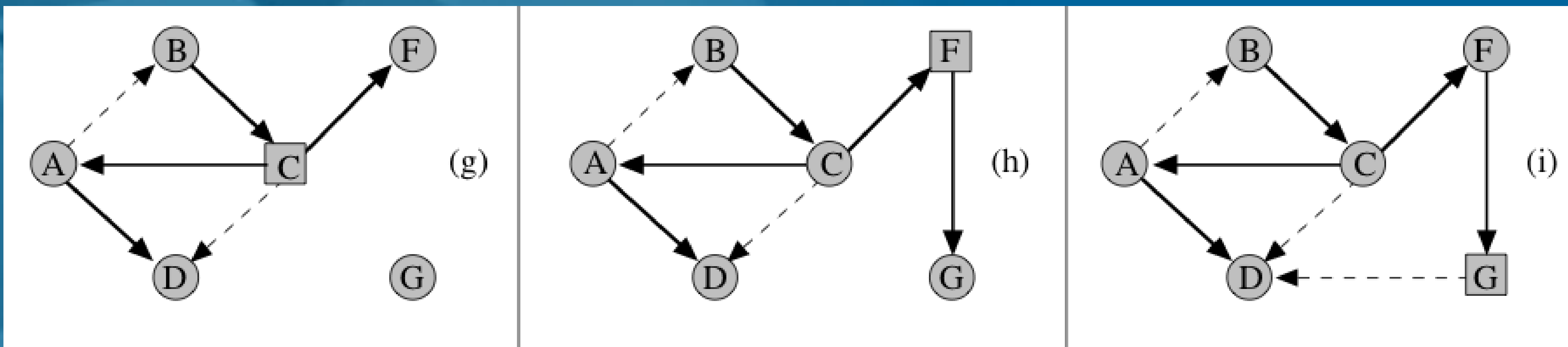
Un esempio: visita DFS

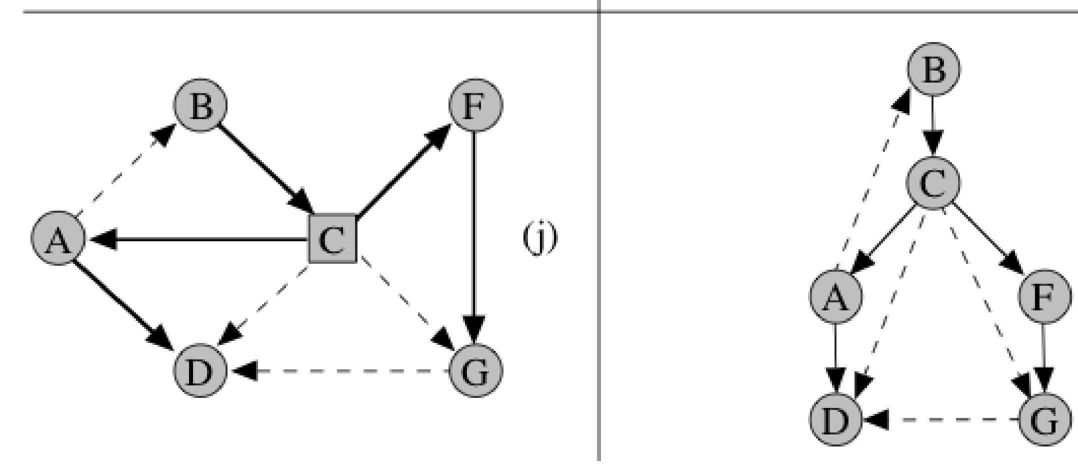


Esempio: grafo orientato (1/2)



Esempio: grafo orientato (2/2)



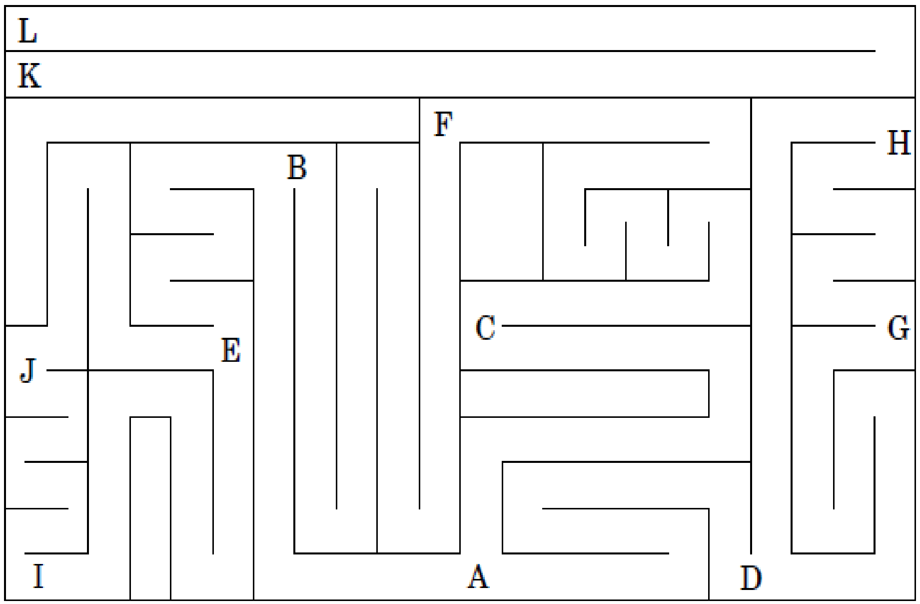


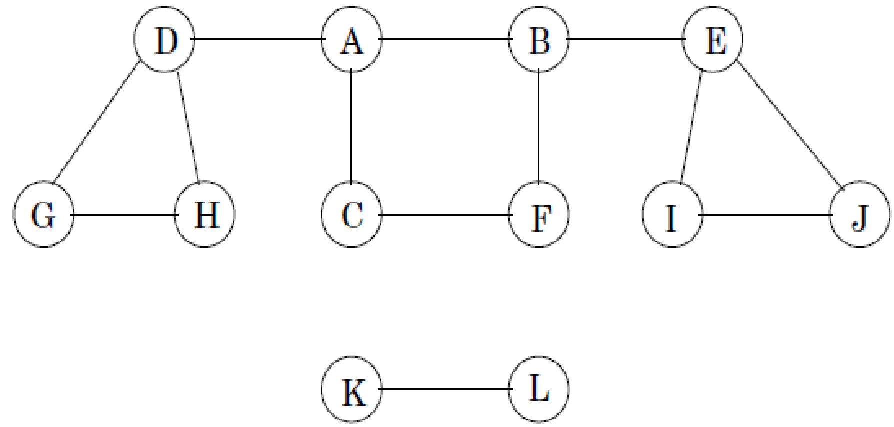
archi in avanti: (C,D) e (C,G)

archi all'indietro: (A,B)

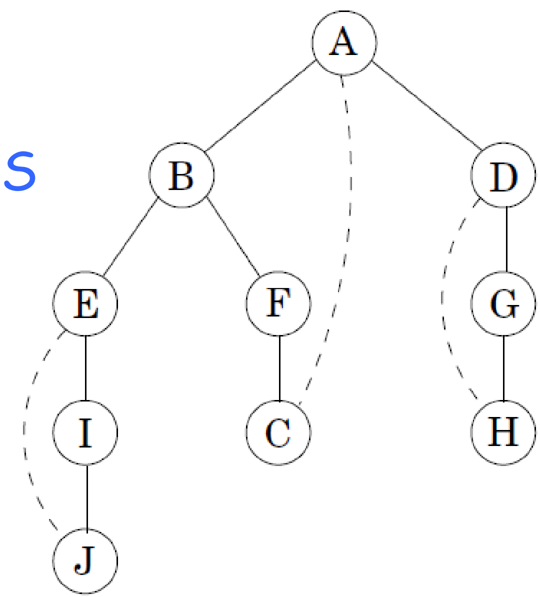
archi trasversali a sinistra: (G,D)

…tornando al labirinto





albero DFS



Costo della visita in profondità

Il tempo di esecuzione dipende dalla struttura dati usata per rappresentare il grafo (e dalla connettività o meno del grafo rispetto ad s):

- Liste di adiacenza: $O(m+n)$
- Matrice di adiacenza: $O(n^2)$

Proprietà dell'albero DFS radicato in s

- Se il grafo è non orientato, per ogni arco (u,v) si ha:
  - (u,v) è un arco dell'albero DFS, oppure
  - i nodi u e v sono l'uno discendente/antenato dell'altro
- Se il grafo è orientato, per ogni arco (u,v) si ha:
  - (u,v) è un arco dell'albero DFS, oppure
  - i nodi u e v sono l'uno discendente/antenato dell'altro, oppure
  - (u,v) è un arco trasversale a sinistra, ovvero il vertice v è in un sottoalbero visitato precedentemente ad u