Algoritmi e Strutture Dati (Modulo II)

Luciano Gualà

guala@mat.uniroma2.it

http://www.mat.uniroma2.it/~guala/

Informazioni utili

- **Orario lezioni**
  - lunedì: 9,00 – 11,00
  - martedì: 9,00 – 11,00
- **Orario ricevimento**
  - martedì: 14,30 – 16,00 (meglio sempre accordarsi per email)
  - Ufficio: dip. di matematica, piano 0, corridoio B0, stanza 206

Copyright © 2004 - The McGraw - Hill Companies, srl

Struttura del modulo II

- Corso strutturato in due moduli
  - Modulo II.1
    - 3 CFU
    - 6 settimane
    - docente: L. Gualà
  - Modulo II.2
    - 3 CFU
    - 6 settimane
    - docente: dot. G. Scornavacca

Copyright © 2004 - The McGraw - Hill Companies, srl

Libro di testo

C. Demetrescu, I. Finocchi, G. Italiano

Algoritmi e Strutture dati (*sec. ed.*)

McGraw-Hill

Slide e materiale didattico

http://www.mat.uniroma2.it/~guala/

Copyright © 2004 - The McGraw - Hill Companies, srl

…altri testi utili…

P. Crescenzi, G. Gambosi, R. Grossi, G. Rossi
Strutture di dati e algoritmi
Pearson

T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein
Introduzione agli algortimi e strutture dati
McGraw-Hill

A. Bertossi, A. Montresor
Algoritmi e strutture di dati
Città Studi

J. Kleinberg, E. Tardos
Algorithm Design
Addison Wesley

S. Dasgupta, C. Papadimitriou, U. Vazirani
Algorithms
McGraw-Hill

Copyright © 2004 - The McGraw - Hill Companies, srl

Modalità d'esame

- L'esame consiste in una prova scritta e una prova orale
- Quattro appelli
  - 2 giugno/luglio
  - 1 settembre
  - 1 gennaio/febbraio
- Prova parziale a febbraio
- Per sostenere l'esame è **obbligatorio** prenotarsi online (una settimana prima) su delphi.uniroma2.it

Copyright © 2004 - The McGraw - Hill Companies, srl

Algoritmi e Strutture Dati

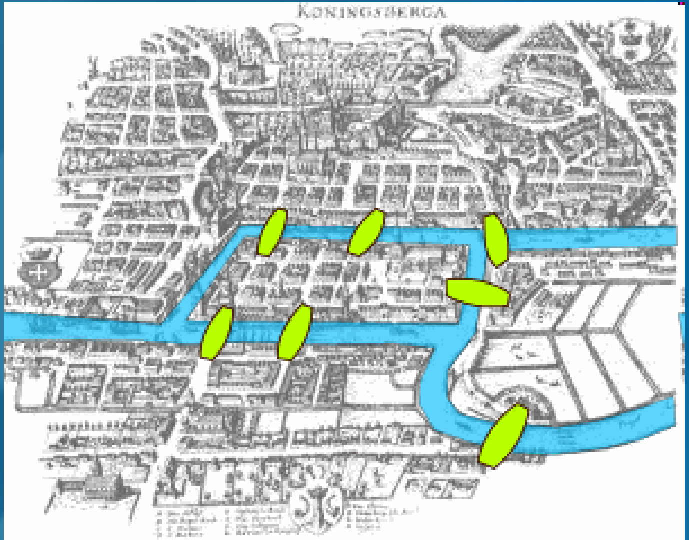
Capitolo 11
Grafi e visite di grafi

grafi, teoria dei grafi, problemi su grafi, algoritmi su grafi

Copyright © 2004 - The McGraw - Hill Companies, srl

Origini storiche

Nel 1736, il matematico Eulero, affrontò l'annoso problema dei 7 ponti di Königsberg (Prussia):

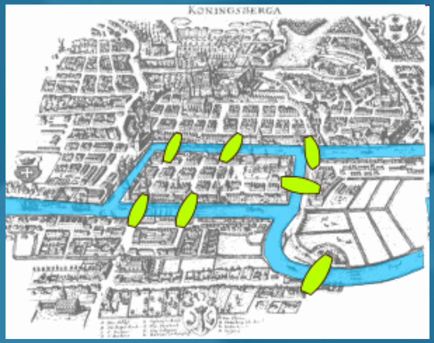


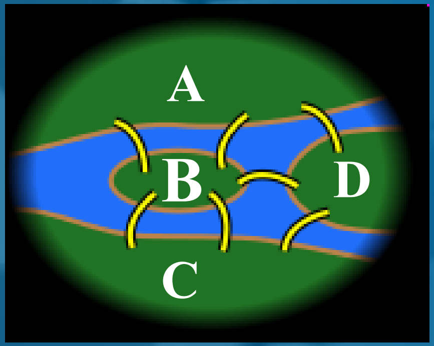
È possibile o meno fare una passeggiata che parta da un qualsiasi punto della città e percorra una ed una sola volta ciascuno dei 7 ponti?

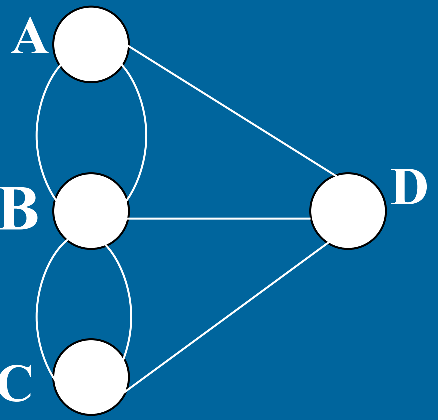
Copyright © 2004 - The McGraw - Hill Companies, srl

Origini storiche (2)

Eulero affrontò il problema schematizzando topologicamente la pianta della città, epurando così l'istanza da insignificanti dettagli topografici:







…e così Königsberg venne rappresentata con un insieme di 4 punti (uno per ciascuna zona della città), opportunamente uniti da 7 linee (una per ciascun ponte)

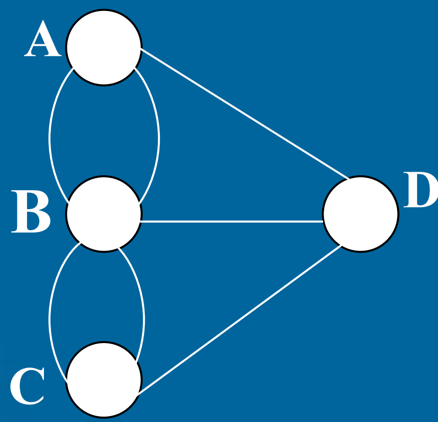
Copyright © 2004 - The McGraw - Hill Companies, srl

Definizione di grafo

Un grafo $G=(V,E)$ consiste in:

- un insieme $V=\{v_1,\ldots, v_n\}$ di vertici (o nodi);
- un insieme $E=\{(v_i,v_j) \mid v_i,v_j \in V\}$ di coppie (non ordinate) di vertici, detti archi.

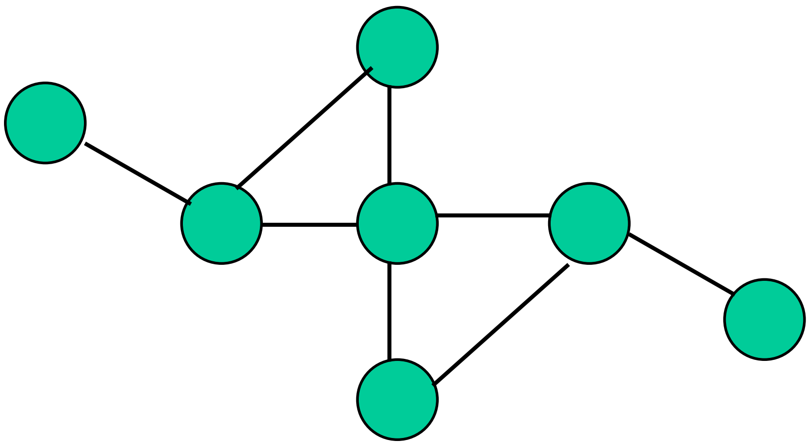
Esempio: Grafo di Eulero associato alla città di Königsberg: $V=\{A,B,C,D\}$, $E=\{(A,B), (A,B), (A,D), (B,C), (B,C), (B,D), (C,D)\}$

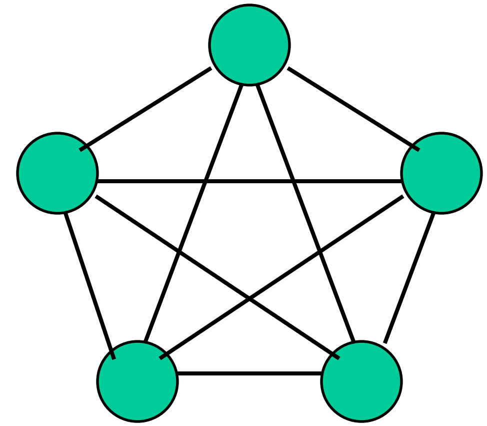


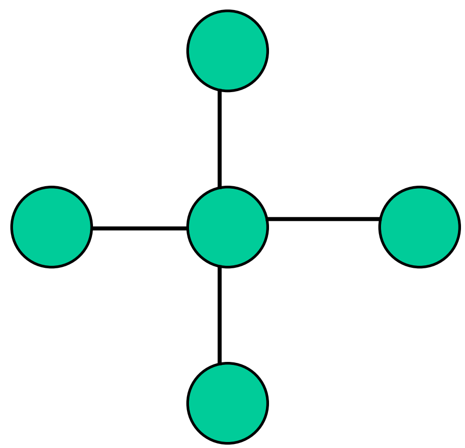
Nota: È più propriamente detto multigrafo, in quanto contiene archi paralleli.

Copyright © 2004 - The McGraw - Hill Companies, srl

...esempi



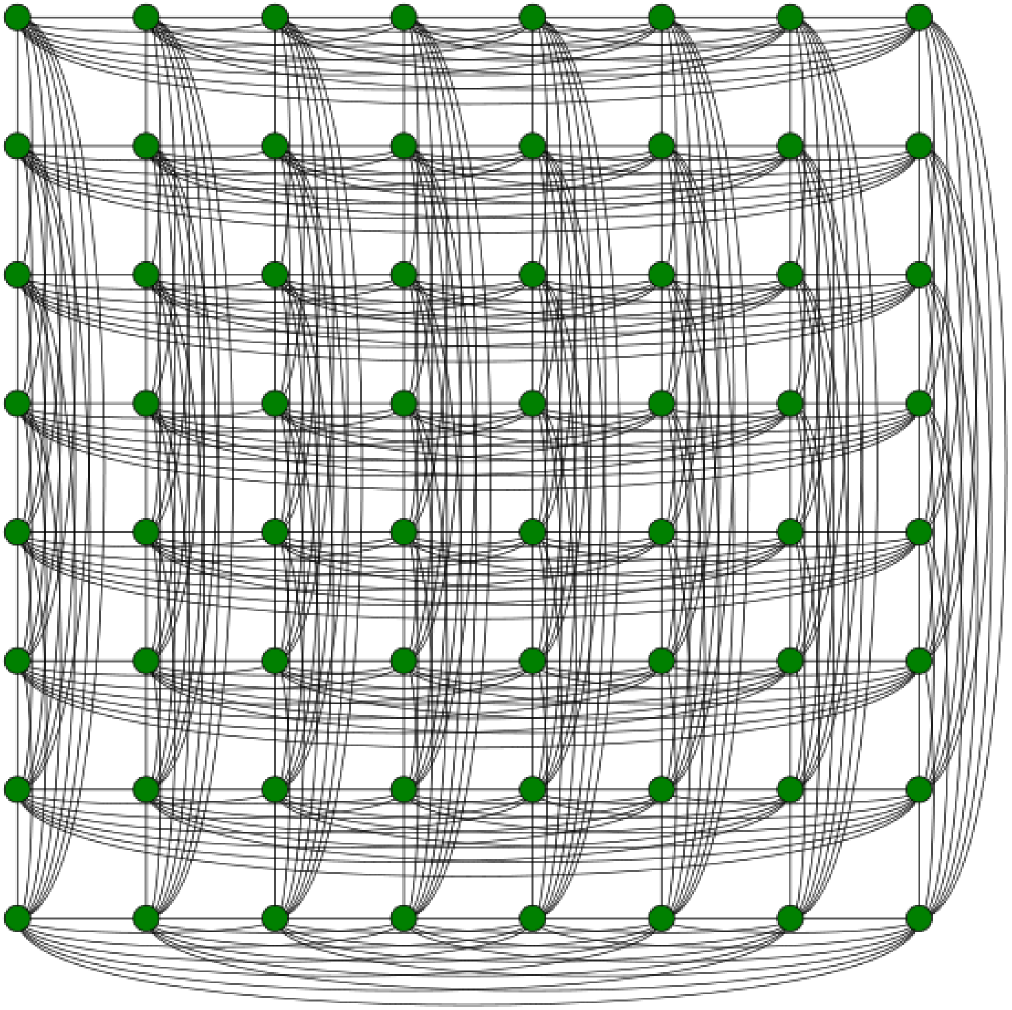




Rook's Graph

un nodo per ogni posizione della scacchiera

c'è un arco fra due nodi/posizioni se e solo se una torre può spostarsi dall'una all'altra posizione

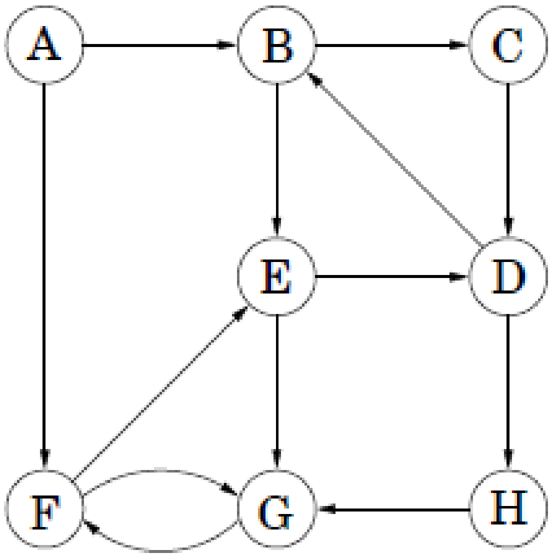


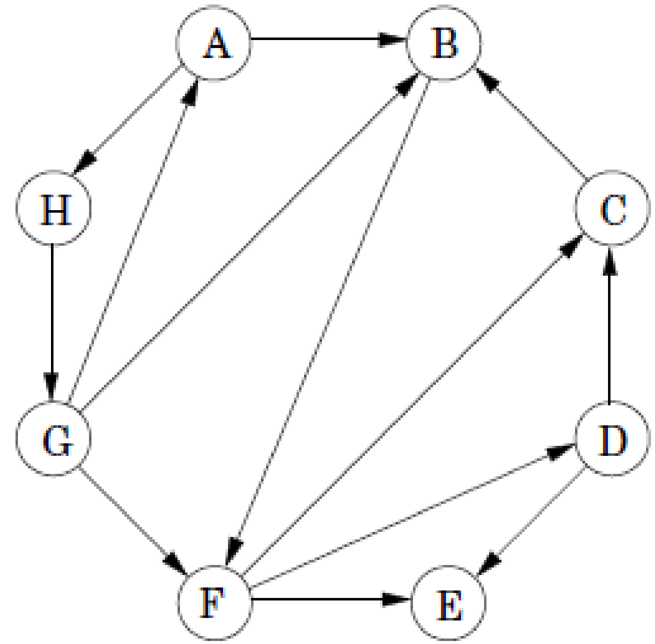
Definizione di grafo diretto

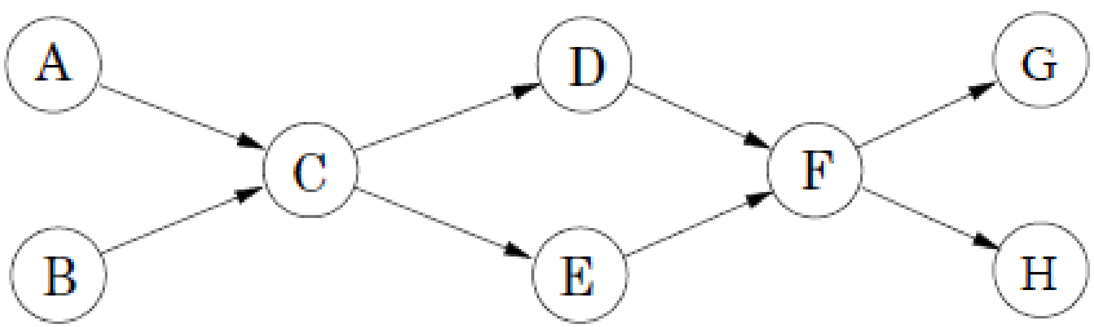
Un grafo diretto $D=(V,A)$ consiste in:

- un insieme $V=\{v_1,\dots, v_n\}$ di vertici (o nodi);
- un insieme $A=\{(v_i,v_j) \mid v_i,v_j \in V\}$ di coppie ordinate di vertici, detti archi diretti.

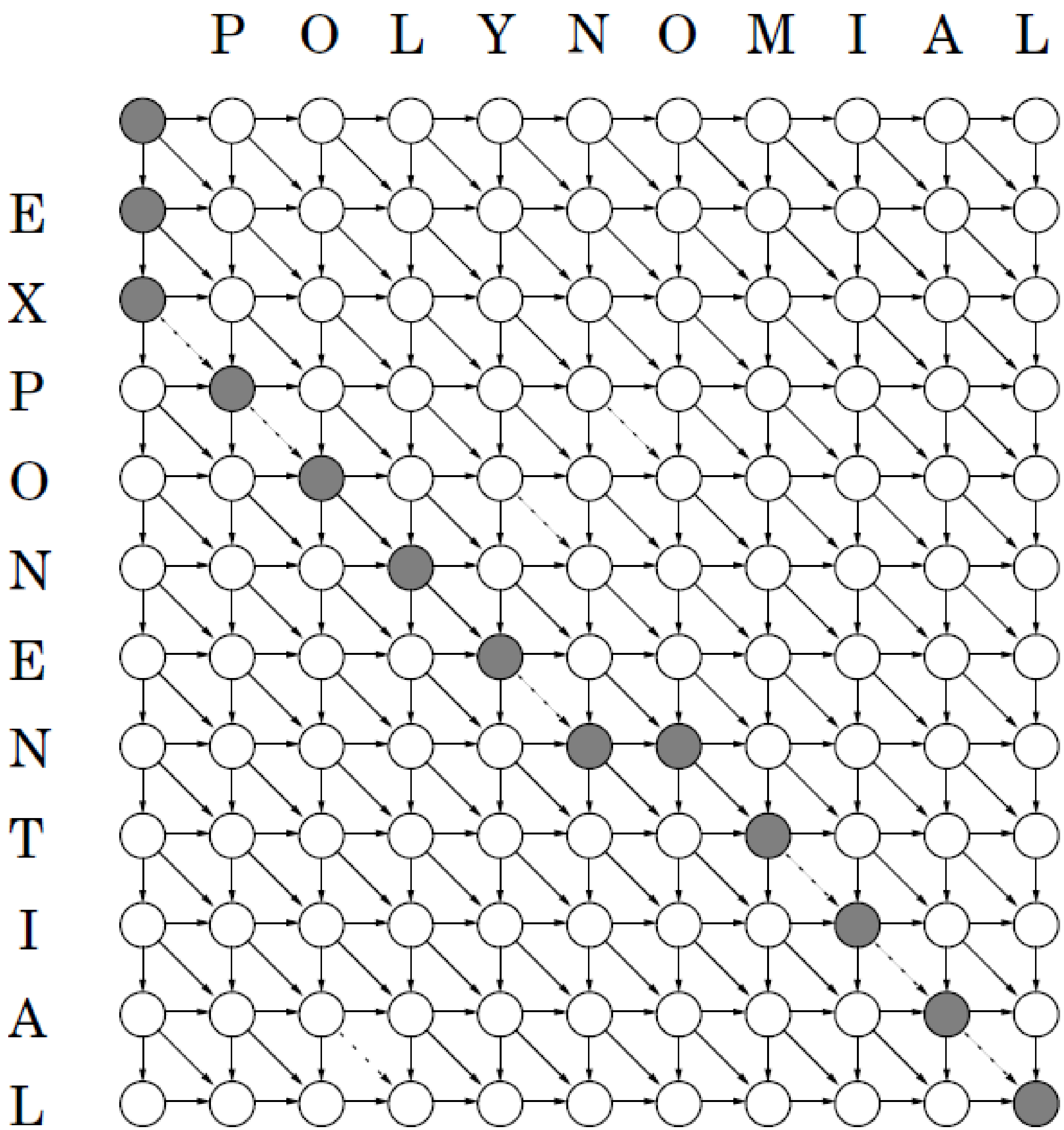
...esempi







un altro esempio: distanza fra due parole
(ricordate l'algoritmo di programmazione dinamica?)

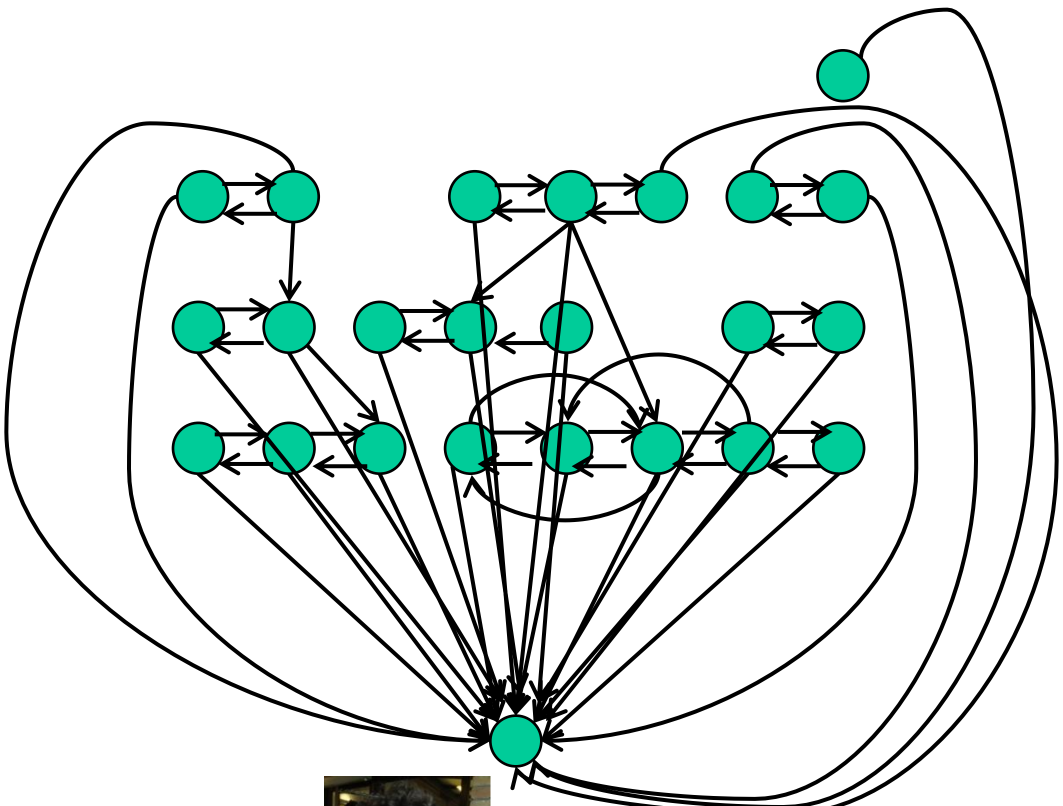


grafo
delle dipendenze
dei sottoproblemi

i nodi corrispondono
a sottoproblemi

c'è un arco (u,v) se
la soluzione del
sottoproblema v
usa la soluzione
del sottoproblema u

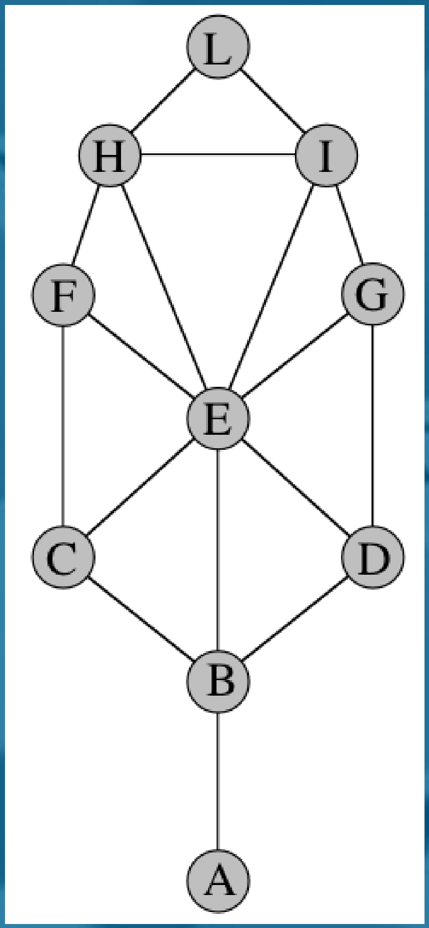
un altro esempio: grafo sociale della classe di ASD



i nodi rappresentano
le persone in aula

c'è un arco (u,v) se
la u conosce
nome e cognome di v

Terminologia



Esempio: Sia G=(V,E) non diretto con V={A,B,C,D,E,F,G,H,I,L}, ed E={(A,B),(B,C),(B,D),(B,E),(C,E) ,(C,F),(D,E),(D,G),(E,F),(E,G),(E,H) ,(E,I),(F,H),(G,I),(H,I) ,(H,L),(I,L)}

n = numero di vertici (nell'esempio, n=10)

m = numero di archi (nell'esempio, m=17)

L ed I sono adiacenti

(L,I) è incidente ad L e ad I (detti estremi)

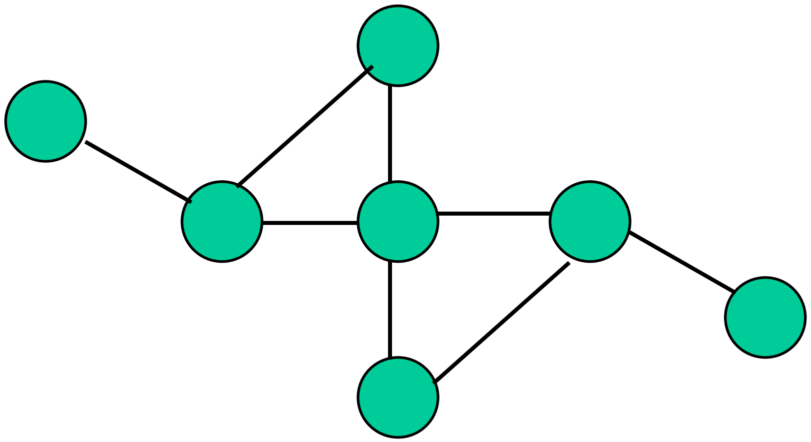
I ha grado 4: $\delta(I)=4$

Il grafo ha grado 7 = $\max_{v \in V}\{\delta(v)\}$

Copyright © 2004 - The McGraw - Hill Companies, srl

che relazione c'è fra grado dei nodi e numero di archi?

Una semplice proprietà



cosa ottengo se sommo
i gradi di ogni nodo?

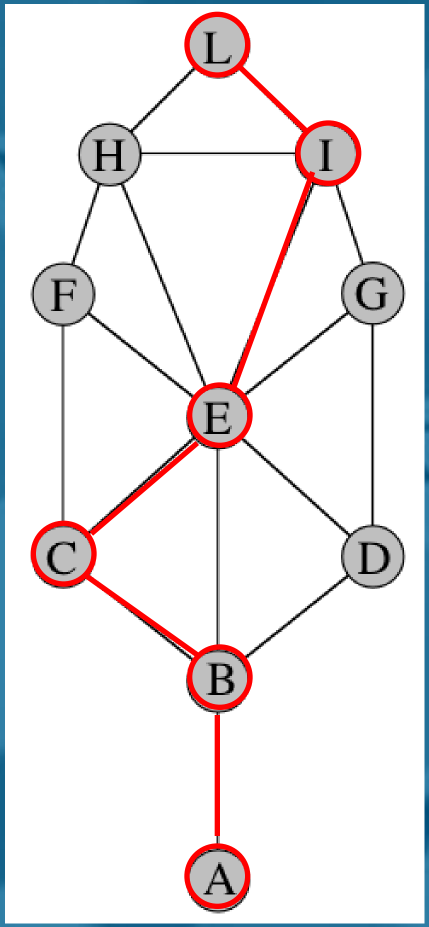
$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2m$$

in ogni grafo
il numero di nodi
di grado dispari
è pari

domanda (sui grafi diretti):
cosa ottengo se sommo il grado
uscente di tutti i nodi?

Camil Demetrescu, Irene Finocchi, Giuseppe F. Italiano

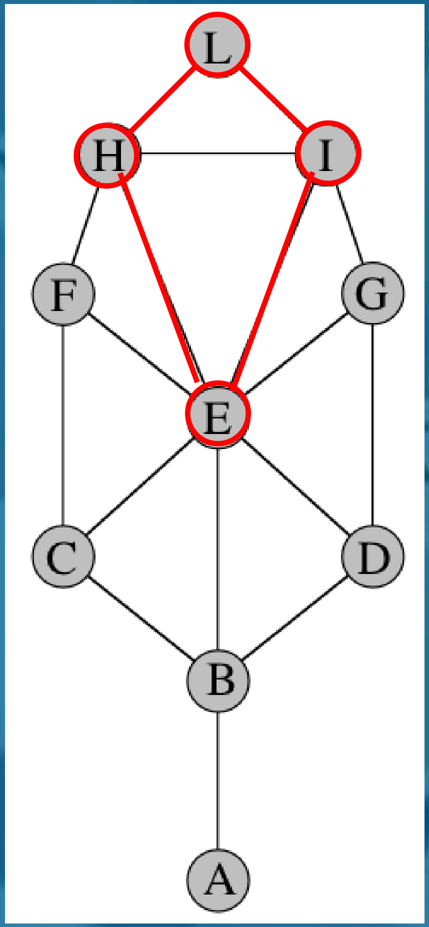
Terminologia



- <L,I,E,C,B,A> è un cammino semplice (cioè, senza nodi ripetuti) di lunghezza 5
- Se il grafo è orientato, il cammino deve rispettare il verso di orientamento degli archi
- La lunghezza del più corto cammino tra due vertici si dice *distanza* tra i due vertici
- L ed A hanno distanza 4

Copyright © 2004 - The McGraw - Hill Companies, srl

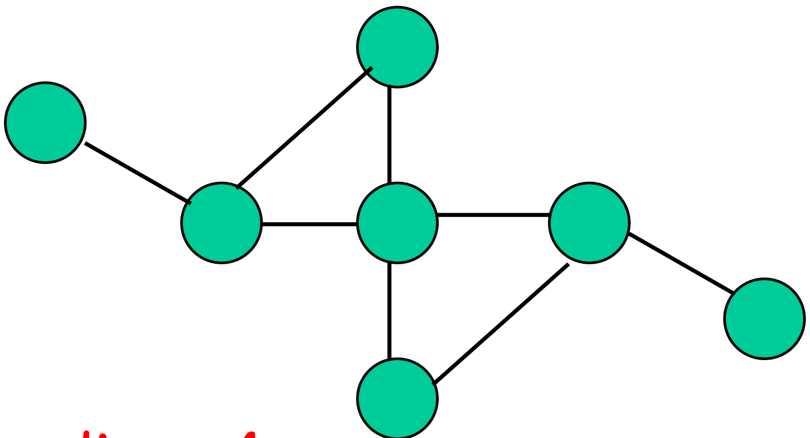
Terminologia



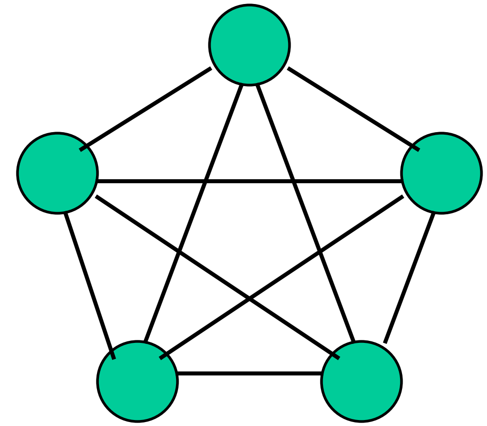
- Se esiste un cammino per ogni coppia di vertici, allora il grafo si dice connesso
- il diametro è la massima distanza fra due nodi (qui il diametro è 4)
  - il diametro di un grafo non connesso è ∞
- Un cammino chiuso, ovvero un cammino da un vertice a se stesso si dice ciclo (ad esempio, <L,I,E,H,L> è un ciclo)

Copyright © 2004 - The McGraw - Hill Companies, srl

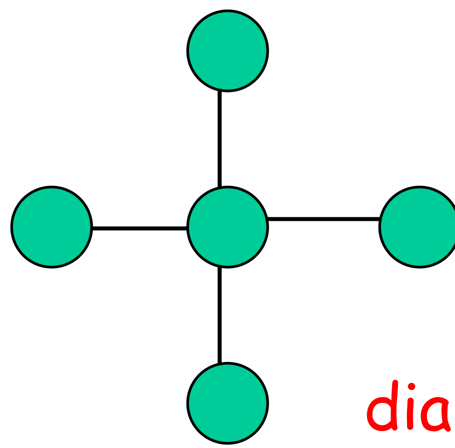
…esempi



diam=4



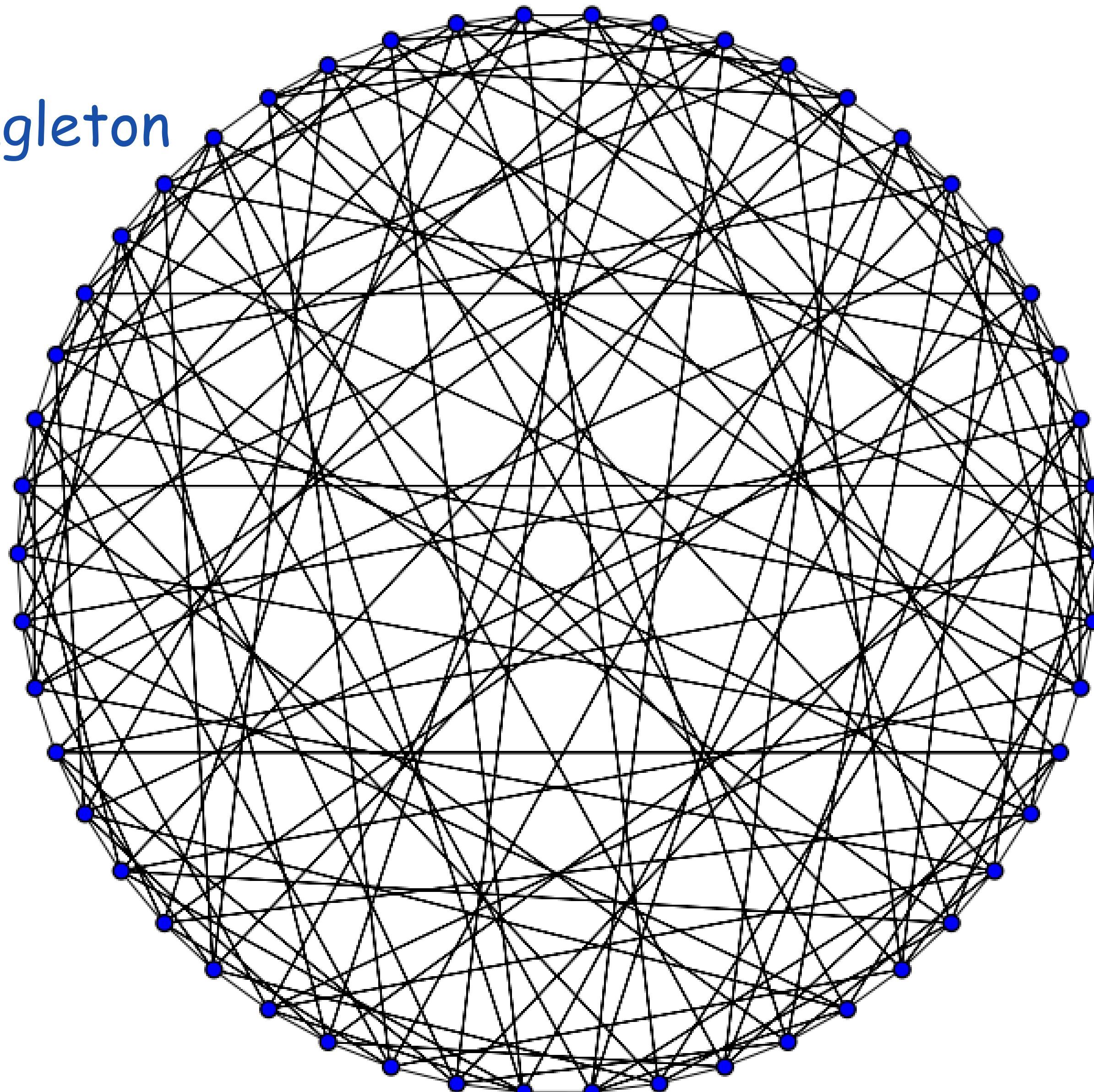
diam=1

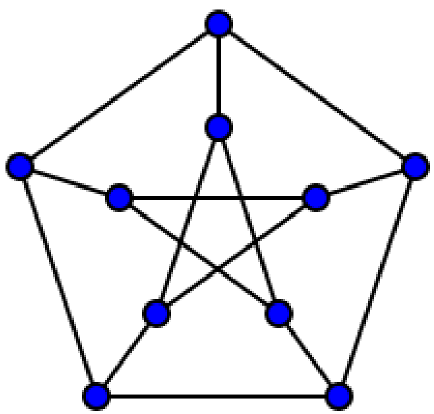


diam=2

...altri due grafi di diametro 2

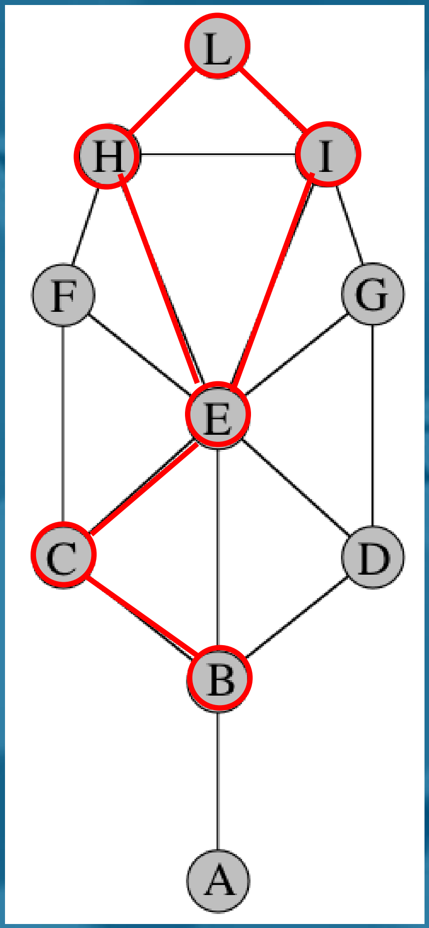
grafo
Hoffman-Singleton





grafo di
Petersen

Terminologia

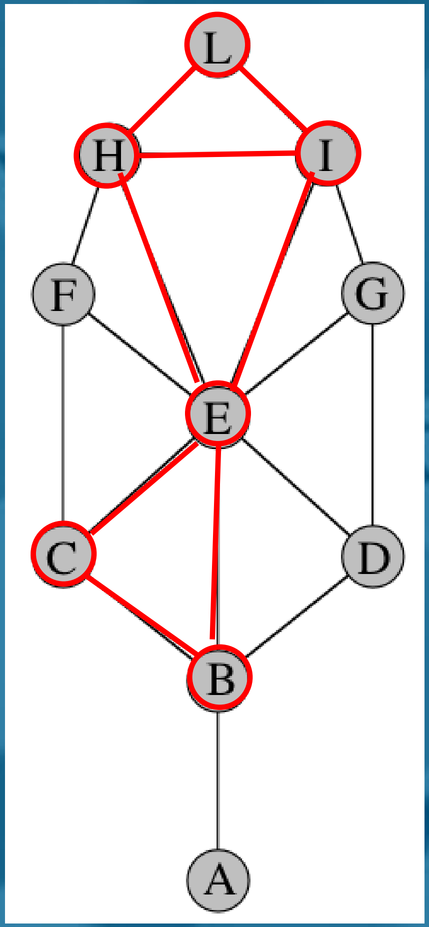


- Un grafo $H=(V',E')$ è un sottografo di $G=(V,E) \Leftrightarrow V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.

- Dato un grafo $G=(V,E)$, il sottografo indotto da un insieme di vertici $V' \subseteq V$ è il grafo
  - $G[V']=(V',E')$ ove
  - $E'=\{(x,y) \in E \text{ t.c. } x,y \in V'\}$.
  - ad esempio, il sottografo indotto da L,H,I,E,C,B nel seguente grafo è:

Copyright © 2004 - The McGraw - Hill Companies, srl

Terminologia



- Un grafo H=(V′,E′) è un sottografo di G=(V,E) $\Leftrightarrow$ V′$\subseteq$V e E′$\subseteq$E.

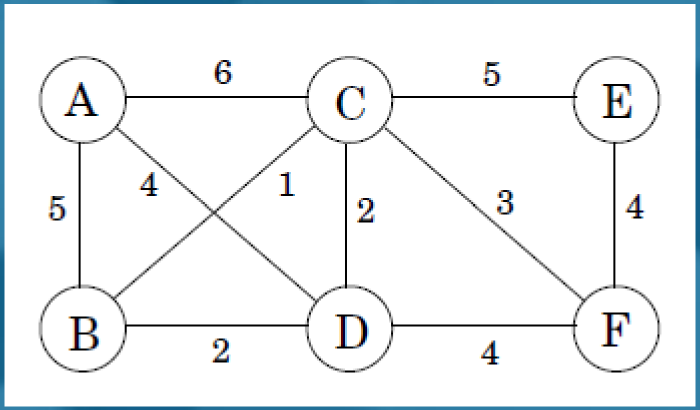
- Dato un grafo G=(V,E), il sottografo indotto da un insieme di vertici V′$\subseteq$V è il grafo
  - G[V′]=(V′,E′) ove
  - E′={(x,y)$\in$E t.c. x,y $\in$ V′}.

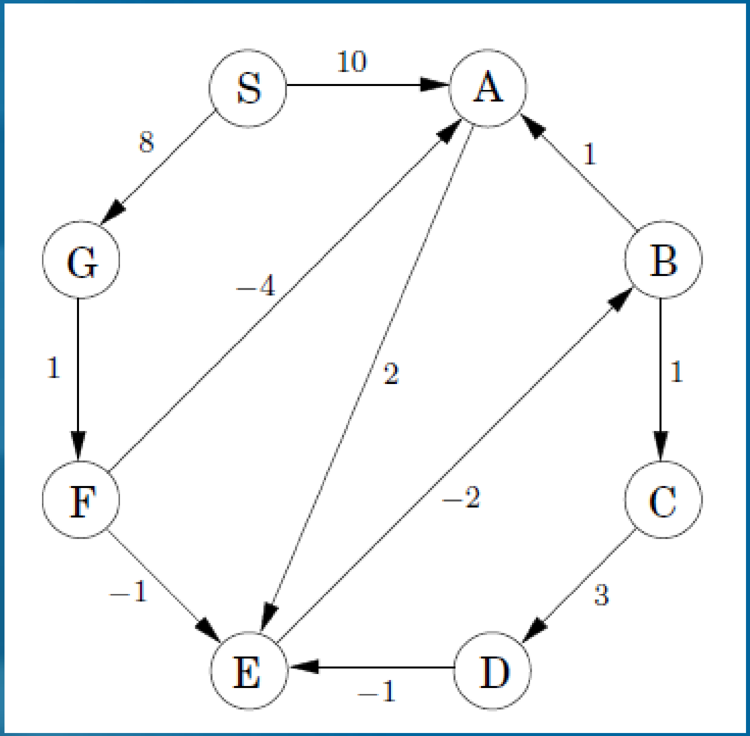
  - ad esempio, il sottografo indotto da L,H,I,E,C,B nel seguente grafo è:

Copyright © 2004 - The McGraw - Hill Companies, srl

Terminologia

- Grafo pesato: è un grafo $G=(V,E,w)$ in cui ad ogni arco viene associato un valore definito dalla funzione peso w (definita su un opportuno insieme, di solito i reali).

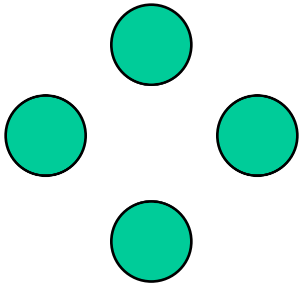




Copyright © 2004 - The McGraw - Hill Companies, srl

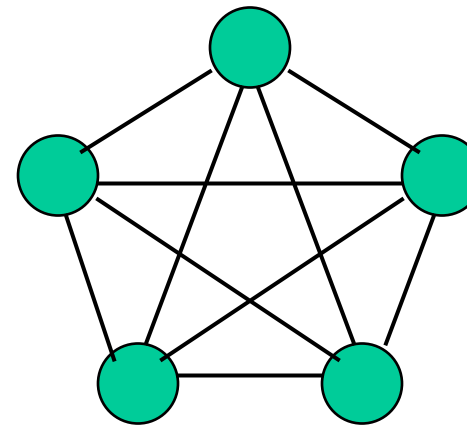
quanti archi può avere un grafo di n nodi?

due grafi molto particolari



Grafo totalmente sconnesso: è un grafo $G=(V,E)$ tale che $V\neq\emptyset$ ed $E=\emptyset$.

Grafo completo: per ogni coppia di nodi esiste un arco che li congiunge.



K_5

Il grafo completo con n vertici verrà indicato con K_n

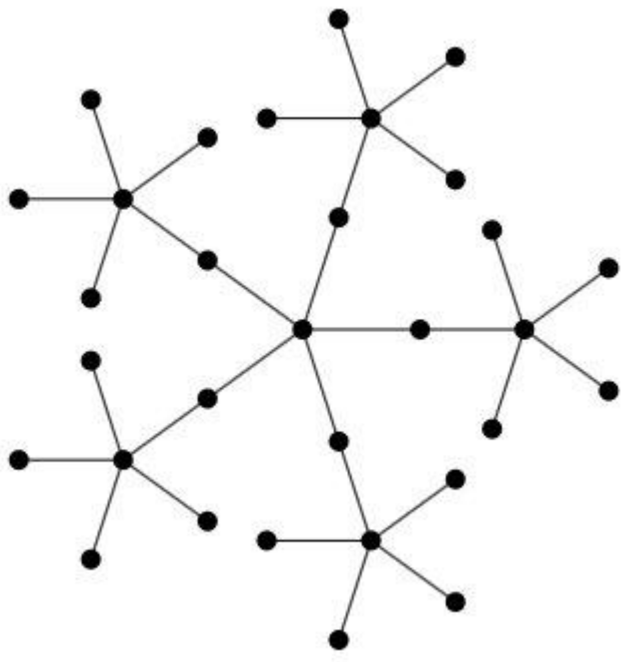
$m=|E|= n\cdot(n-1)/2$

un grafo (senza cappi o archi paralleli) può avere un numero di archi m compreso tra 0 e $n(n-1)/2=\Theta(n^2)$.

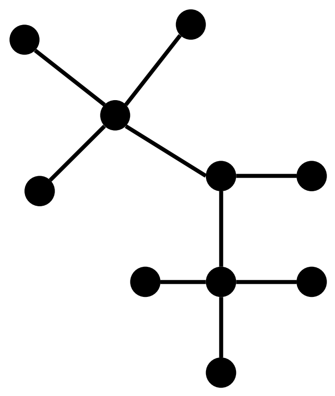
come è fatto un grafo connesso con il minimo numero di archi?

Definizione

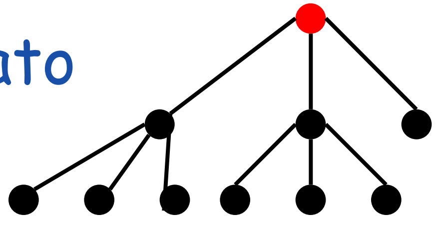
Un albero è un grafo connesso ed aciclico.



libero



radicato



Teorema

Sia T=(V,E) un albero; allora $|E|=|V|-1$.

dim. (per induzione su $|V|$)

caso base: $|V|=1$ T • $|E|=0=|V|-1$

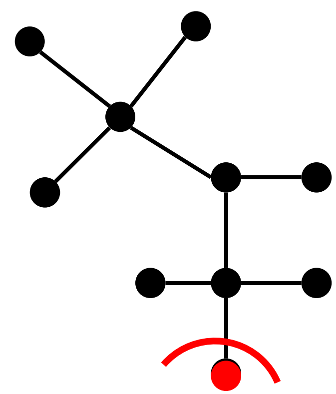
caso induttivo: $|V|>1$

Sia k il numero di nodi di T

poiché T è connesso e aciclico ha almeno una foglia (nodo con grado 1)

se tutti i nodi avessero grado almeno 2 ci sarebbe un ciclo (riuscite a vedere perché?)

T



rimuovendo tale foglia si ottiene grafo connesso e aciclico con k-1 nodi che per ipotesi induttiva ha k-2 archi

T ha k-1 archi

Esercizio

Sia G=(V,E) un grafo non orientato. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono tutte equivalenti:

(a) G è un albero;
(b) due vertici qualsiasi di G sono collegati da un unico cammino semplice;
(c) G è connesso, ma se viene rimosso un arco qualsiasi da E, non grafo risultante non è connesso;
(d) G è connesso e |E|=|V|-1;
(e) G è aciclico e |E|=|V|-1;
(f) G è aciclico, ma se un arco qualsiasi viene aggiungo a E, il grafo risultante contiene un ciclo.

per un grafo connesso con n nodi e m archi vale:

$n-1 \leq m \leq n(n-1)/2$, cioè $m=\Omega(n)$ ed $m=O(n^2)$.

Nota bene: se un grafo ha $m \geq n-1$ archi, non è detto che sia connesso. Quanti archi deve avere un grafo per essere sicuramente connesso?

Copyright © 2004 - The McGraw - Hill Companies, srl

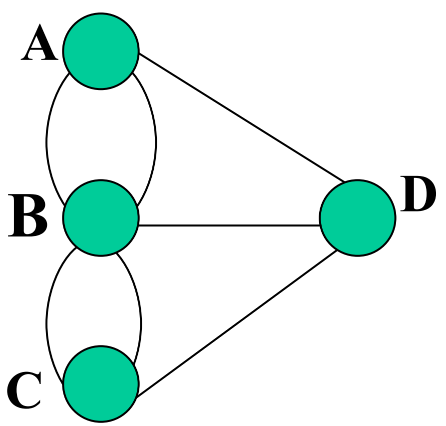
…tornando al problema dei 7 ponti

Definizione

Dato un grafo G, un ciclo (rispettivamente un cammino) Euleriano è un ciclo (rispettivamente un cammino non chiuso) di G che passa per tutti gli archi di G una e una sola volta.

Teorema (di Eulero)

Un grafo G ammette un ciclo Euleriano se e solo se tutti i nodi hanno grado pari. Inoltre, ammette un cammino Euleriano se e solo se tutti i nodi hanno grado pari tranne due (i due nodi di grado dispari sono gli estremi del cammino).

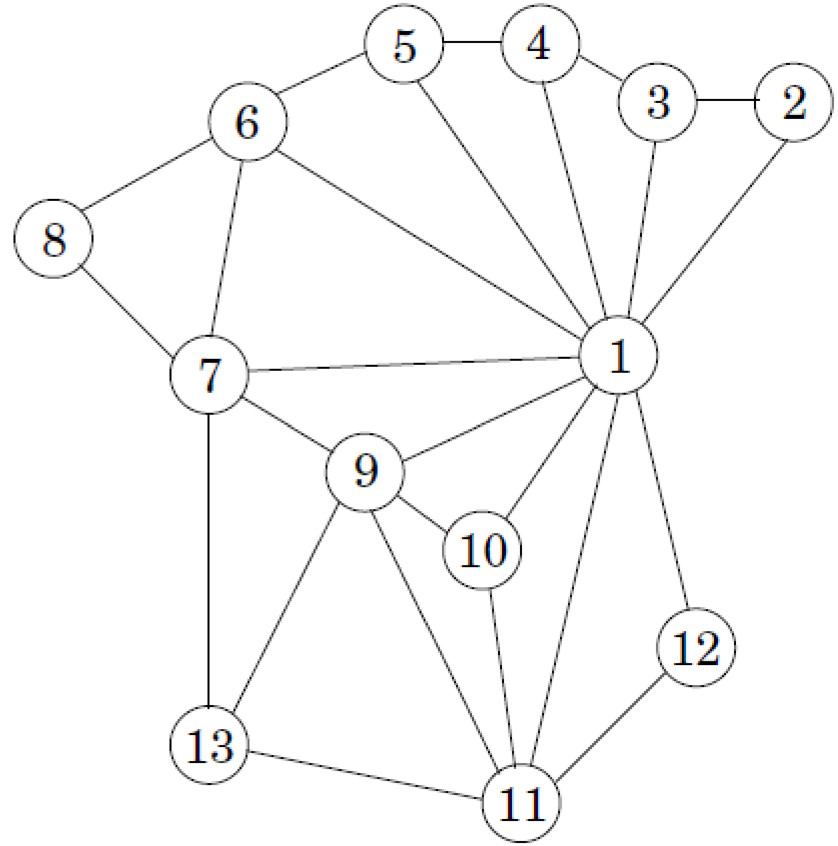


il problema dei 7 ponti non ammette soluzione!

grafi, teoria dei grafi, problemi su grafi, algoritmi su grafi

i grafi costituiscono un linguaggio potente
per descrivere problemi
algoritmici

Problema:
colorare una mappa usando il minimo numero di colori in modo che due stati confinanti non abbiano lo stesso colore



Problema:
colorare i nodi di un grafo usando il minimo numero di colori in modo che due nodi adiacenti non abbiano lo stesso colore

Il problema della colorazione di un grafo:

Dato un grafo G, assegnare a ogni nodo di G un colore in modo tale che due nodi adiacenti hanno colori differenti. Usare meno colori possibile.

Def.:
il minimo numero di colori per cui una tale colorazione esiste è detto numero cromatico di G e di denota con $\chi(G)$.

Problema:

Si devono fissare le date di un insieme di esami sotto il vincolo che certi esami non possono essere svolti lo stesso giorno (perché esami dello stesso anno e corso di laurea, o usano la stessa aula multimediale, ecc.). Si vuole minimizzare il numero di giorni utilizzati per fare esami.

Un altro modo di vedere il problema:

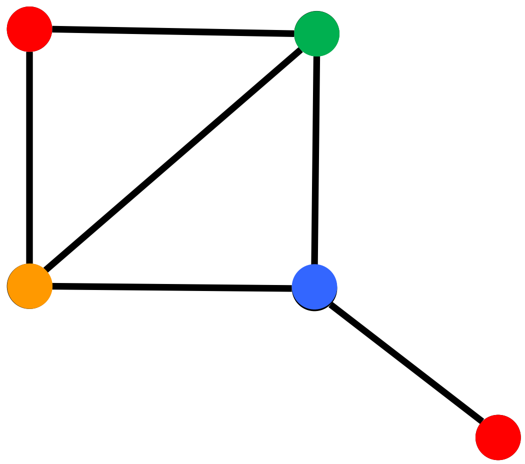
Definisci il seguente grafo:

1. un nodo per ogni esame
2. se due esami sono in conflitto aggiungi l'arco fra i nodi corrispondenti

→ colorare i nodi del grafo risultante usando il minimo numero di colori in modo che due nodi adiacenti non abbiano lo stesso colore

esami/nodi in conflitto non possono essere svolti/colorati lo stesso giorno/colore

un esempio



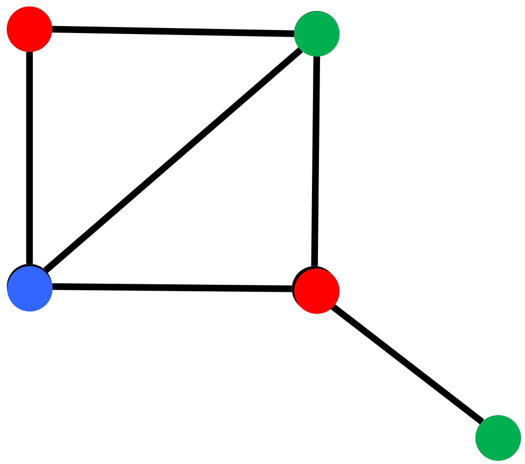
c_1 =
c_2 =
c_3 =
c_4 =
c_5 =

giorni disponibili:
mercoledì
giovedì
venerdì
sabato
domenica

possiamo fare meglio?

possiamo usare 3 colori?

un esempio



giorni disponibili:

c_1 = mercoledì
c_2 = giovedì
c_3 = venerdì
c_4 = sabato
c_5 = domenica

possiamo usare 2 colori?

..no: ogni ciclio da tre ha bisogno di almeno tre colori!

$$\chi(G)=3$$

calcolare $\chi(G)$ è un problema algoritmico difficile

anche capire se un grafo G può essere colorato con 3 colori è un problema difficile

problemi NP-completi

se trovate un algoritmo polinomiale che ne risolve uno o dimostrate che un tale algoritmo non può esistere vincete $ 1.000.000 e gloria eterna!!

(…ne saprete di più quando farete Informatica Teorica)

quindi che possiamo fare?

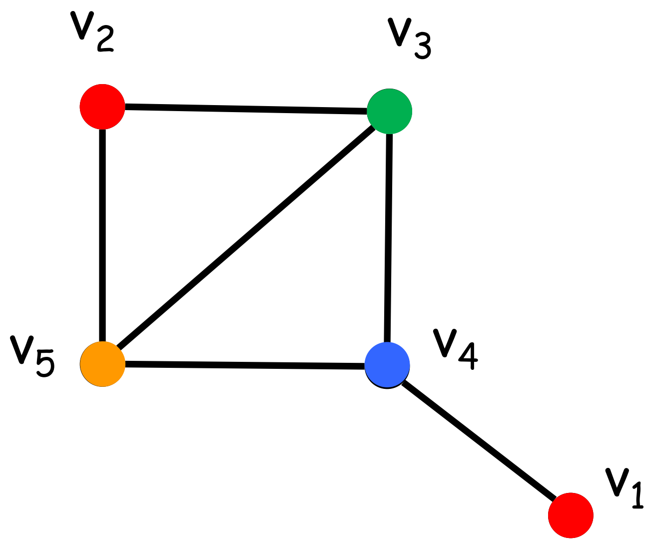
…progettiamo un algoritmo veloce che colora il grafo usando pochi colori anche se non un numero minimo

Un semplice algoritmo greedy (goloso):

1. dai un ordine arbitrario ai nodi: $v_1, v_2, \ldots, v_n$
2. dai un ordine arbitrario ai colori: $c_1, c_2, \ldots$
3. per $i=1, 2, \ldots, n$

   assegna a v_i il primo colore (nell'ordine)
   che è ammissibile

un esempio



giorni disponibili:

c_1 = mercoledì
c_2 = giovedì
c_3 = venerdì
c_4 = sabato
c_5 = domenica

Nota: un ordine diverso dei nodi può fornire una colorazioni diversa (più o meno buona)

Teorema

Se ogni nodo in G ha grado $\leq \Delta$, l'algoritmo greedy colora propriamente il grafo usando al più Δ+1 colori.

dim. (per induzione sul numero di nodi n)

caso base: n=1 G ● Δ=0 #colori=1

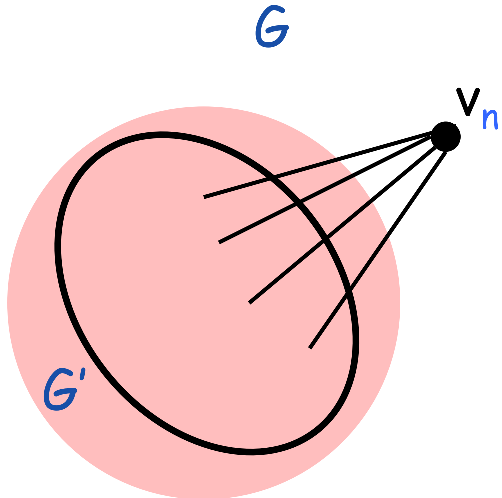
caso induttivo: n>1.

sia G' il grafo ottenuto da G rimuovendo v_n (e tutti i suoi archi incidenti)

G' ha grado massimo $\leq\Delta$

l'algoritmo greedy ha colorato G' usando al più Δ+1 colori

poiché $\delta(v_n) \leq \Delta$, c'è almeno un colore fra i Δ+1 che posso usare per colorare v_n



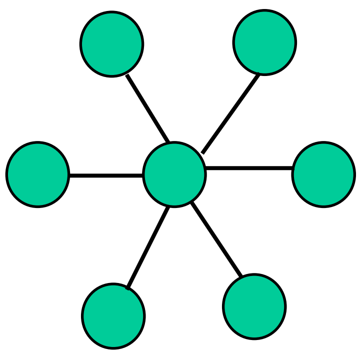
■

abbiamo dimostrato che per ogni G di grado Δ, vale

$$\chi(G) \leq \Delta+1$$

…se $\chi(G)$ e Δ fossero sempre "vicini" l'algoritmo greedy si comporterebbe sempre bene

quanto possono essere lontani $\chi(G)$ e Δ nel caso peggiore?



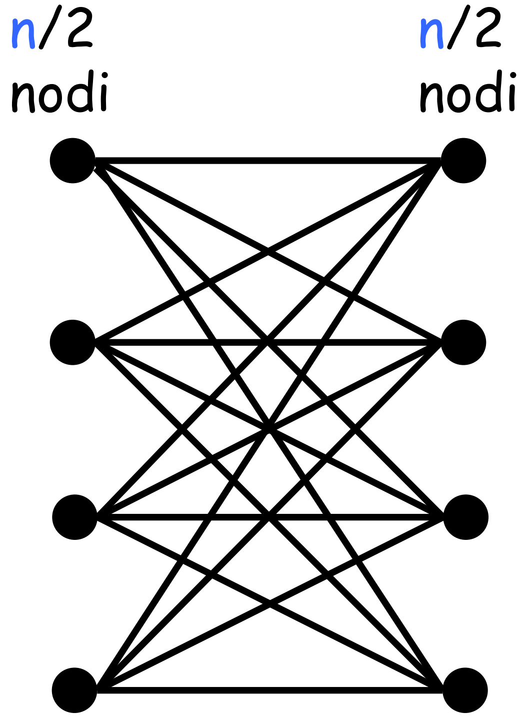
$\Delta=n-1$
$\chi(G)=2$

come si comporta l'alg greedy in questo caso?

usa due colori: trova l'ottimo

quanto può andare male nel caso peggiore l'algoritmo greedy?

vediamo come va su questo grafo



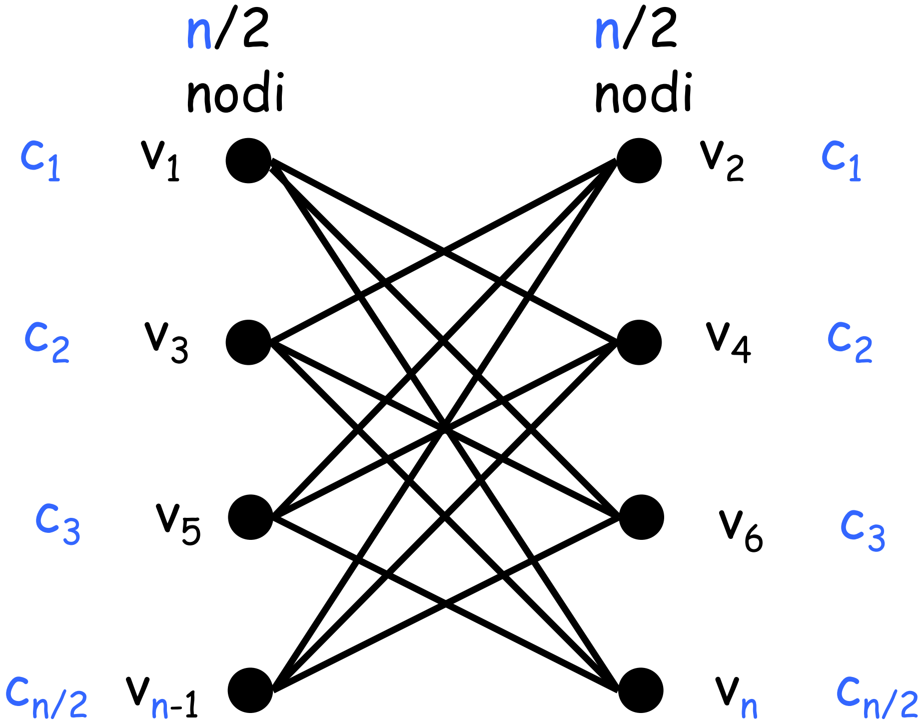
grafo bipartito completo: ogni nodo a sinistra è collegato a tutti quelli di destra

$$\chi(G)=2$$

come si comporta l'alg greedy in questo caso?

indipendentemente dall'oridine dei nodi usa due colori: trova l'ottimo

una brutta istanza per l'algoritmo greedy



$\chi(G)=2$

qual è l'ordine con cui l'algoritmo considera i nodi?

in alcuni casi va bene?
(ne vedete uno?)

...ma in altri male!

\# colori usati n/2 !!

Esercizio

Dire quali delle seguenti figure possono essere disegnate senza staccare la penna dal foglio (e senza ripassare più volte sulla stessa linea). Motivare la risposta.