Fisica Matematica I

Secondo Appello, Invernale Autunnale, 13-02-26

Cognome......................... Nome.........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 10 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Sia $X(t)$ la soluzione dell'equazione
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x$$
$$x(0) = x_0.$$
Si ponga
$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} t + \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
e si stimi $\|X(t) - e^{A(t)} x_0\|$ per t piccoli.

2. Si consideri una particella di massa m che muove su una retta unidimensionale soggetta al potenziale $V_n(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Si mostri che tutti i moti con tali potenziali sono periodici.
   (b) Si considerino i moti con condizioni iniziali $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v$, $v > 0$. Sia $T_n(v)$ il periodo di tale moto soggetto al potenziale V_n. Si calcoli $\lim_{n\to\infty} T_n(v)$.

3. Due punti materiali P_1 e P_2 di massa $m = 1$ sono posti agli estremi di una barra rigida priva di peso di lunghezza $2l$ e si muovono su di un piano orizzontale soggetti al vincolo che il centro della barra rimanga su di una circonferenza di raggio $3l$ e centro in un punto fisso O del piano. Il punto P_1 è collegato al punto fisso O mediante una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Si scriva la Lagrangiana del sistema, si individuino gli integrali del moto e si dica se esistono moti periodici.

Soluzione

1. Si noti che, per $t \in [0,1]$, $\|A(t)\| \leqslant Ct$ per qualche costante C. Dunque, ponendo
$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
in modo tale che $\dot{x} = (E + tJ)x$, abbiamo
$$\begin{aligned} e^{A(t)}x_0 &= x_0 + A(t)x_0 + \frac{1}{2}A(t)^2 x_0 + \frac{1}{6}A(t)^3 x_0 + \mathcal{O}(t^4) \\ &= x_0 + tEx_0 + \frac{t^2}{2}(E^2 + J)x_0 + \frac{t^3}{6}(E^3 + 3EJ + 3JE)x_0 + \mathcal{O}(t^4) \end{aligned}$$
D'altro canto
$$\begin{aligned} \ddot{x} &= E\dot{x} + Jx + tJ\dot{x} = (E + tJ)^2 x + Jx \\ \dddot{x} &= (E + tJ)^2 \dot{x} + J\dot{x} + (EJ + JE + 2tJ)x \\ &= \{[(E + tJ)^2 + J](E + tJ) + (EJ + JE + 2tJ)\}x. \end{aligned}$$
Quindi,
$$\begin{aligned} X(t) &= x_0 + \dot{x}(0)t + \frac{1}{2}\ddot{x}(0)t^2 + \frac{1}{6}\dddot{x}(0)t^3 + \mathcal{O}(t^4) \\ &= x_0 + tEx_0 + \frac{t^2}{2}(E^2 + J)x_0 + \frac{t^3}{6}[E^3 + 2JE + EJ] + \mathcal{O}(t^4). \end{aligned}$$
In conclusione,
$$e^{A(t)}x_0 - X(t) = \frac{t^3}{6}[JE + 2EJ]x_0 + \mathcal{O}(t^4) = \frac{t^3}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} x_0 + \mathcal{O}(t^4).$$

2. La periodicità segue banalmente dalla convessità del potenziale. Il periodo è dato dalla formula
$$T_n(v) = 4\int_0^{x_+(v)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_n(x))}}$$
dove $V_n(x_+(v)) = E$, $E = \frac{m}{2}v^2$. Ovvero, $x_+(v) = \left[\frac{m}{2}v^2\right]^{\frac{1}{2n}}$. Si consideri il cambio di coordinate $x = \left[\frac{m}{2}v^2\right]^{\frac{1}{2n}} z$, da cui
$$T_n(v) = 4\int_0^1 \left[\frac{2}{m}(\frac{m}{2}v^2 - \frac{m}{2}v^2 z^{2n})\right]^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{m}{2}v^2\right]^{\frac{1}{2n}} dz = 4v^{-1}\left[\frac{m}{2}v^2\right]^{\frac{1}{2n}} \int_0^1 \left[1 - z^{2n}\right]^{-\frac{1}{2}} dz.$$
Dunque,
$$\lim_{n\to\infty} T_n(v) = \lim_{n\to\infty} 4v^{-1}\left[\frac{m}{2}v^2\right]^{\frac{1}{2n}} \int_0^1 \left[1 - z^{2n}\right]^{-\frac{1}{2}} dz = 4v^{-1} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left[1 - z^{2n}\right]^{-\frac{1}{2}} dz.$$
Per concludere si noti che, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^{1-\varepsilon} \left[1 - z^{2n}\right]^{-\frac{1}{2}} dz &= \int_0^{1-\varepsilon} \lim_{n\to\infty} \left[1 - z^{2n}\right]^{-\frac{1}{2}} dz = \int_0^{1-\varepsilon} dz = 1 - \varepsilon \\ \lim_{n\to\infty} \int_{1-\varepsilon}^1 \left[1 - z^{2n}\right]^{-\frac{1}{2}} dz &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \int_{1-\varepsilon}^1 [1 - \xi]^{-\frac{1}{2}} \xi^{-1+\frac{1}{2n}} d\xi \\ &\leqslant (1 - \varepsilon)^{-1} \lim_{n\to\infty} \int_{1-\varepsilon}^1 \frac{1}{2n} [1 - \xi]^{-\frac{1}{2}} d\xi \\ &\leqslant (1 - \varepsilon)^{-1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt{\varepsilon} = 0. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ε segue che

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \sqrt{1-z^{2n}}dz = 1$$

(si può arrivare alla stessa conclusione per monotonicità), da cui

$$\lim_{n\to\infty} T_n(v) = 4v^{-1}.$$

Ovvero, il tempo impiegato per andare da -1 a 1 e ritorno con velocità costante v, il che corrisponde al moto nell'intervallo $[-1, 1]$ senza potenziale con riflessioni elastiche ai bordi.

3. Sia θ l'angolo che identifica la posizione del centro della barretta e φ l'angolo che la barretta fa con l'asse delle x. Allora

$$\begin{aligned} P_1 &= 3lv(\theta) + lv(\varphi) \\ P_2 &= 3lv(\theta) - lv(\varphi), \end{aligned}$$

dove $v(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ e $n(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$. Conseguentemente

$$\begin{aligned} \dot P_1 &= 3ln(\theta)\dot\theta + ln(\varphi)\dot\varphi \\ \dot P_2 &= 3ln(\theta)\dot\theta - ln(\varphi)\dot\varphi, \end{aligned}$$

Segue

$$\mathcal{L} = 9l^2\dot\theta^2 + l^2\dot\varphi^2 - 3kl^2\langle v(\theta), v(\varphi)\rangle = 9l^2\dot\theta^2 + l^2\dot\varphi^2 - 3kl^2\cos(\theta-\varphi).$$

Sembra quindi opportuno introdurre l'angolo $\alpha = \theta - \varphi$. In questa variabile

$$\mathcal{L} = 9l^2\dot\theta^2 + l^2(\dot\theta - \dot\alpha)^2 - 3kl^2\cos(\alpha).$$

Le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(10\,\dot\theta - \dot\alpha) = 0 \\ &\frac{d}{dt}(\dot\theta - \dot\alpha) + 3k\sin\alpha = 0. \end{aligned}$$

Ne segue che $A = 10\,\dot\theta - \dot\alpha$ è una costante del moto. Dunque

$$\ddot\alpha - \frac{10\,k}{3}\cos\alpha = 0.$$

Queste solo le equazioni di Lagrange per la Lagrangiana

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\dot\alpha^2 + \frac{10\,k}{3}\sin\alpha$$

Questo significa che α ha sempre un moto periodico a parte i punti di equilibrio $\alpha = \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$. Sia T il periodo del moto di α. Per avere un moto periodico, occorre che esista $j \in \mathbb{N}$ tale che $\theta(jT) = \theta(0) + 2n\pi$, per qualche $n \in \mathbb{N}$. In tal caso, abbiamo un'orbita periodica di periodo jT. Ma

$$\theta(jT) - \theta(0) = \frac{AjT}{10}.$$

Quindi, date le condizioni iniziali di α, basta scegliere delle condizioni iniziali di θ tali che $\frac{AjT}{10} = 2n\pi$ per avere un'orbita periodica.