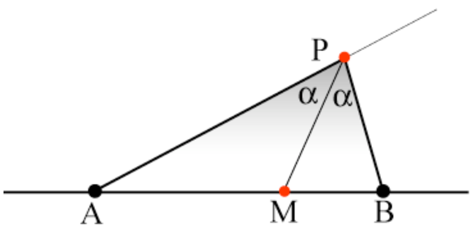
Il "metodo" di Cartesio

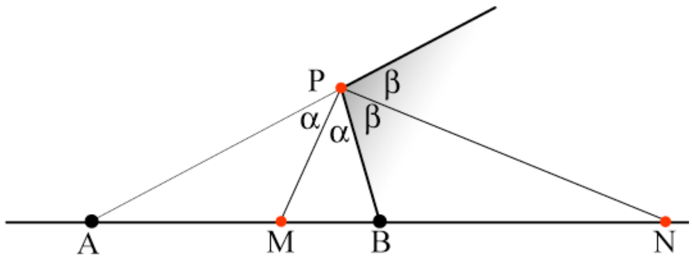
Il metodo di Cartesio, il *metodo delle coordinate* cioè, è oggi talmente usuale che si fa fatica a capire quanto abbia rivoluzionato il modo di fare la matematica. La facilità del suo uso e la vastità delle sue applicazioni ne decretò immediatamente un successo tale da mettere definitivamente in ombra i metodi così detti *sintetici*, alcune volte più profondi, finendo per ridurre gli enti geometrici a equazioni e le dimostrazioni a manipolazioni algebriche. Oggi, che il definitivo trionfo di questo metodo, si è imposto anche a livello scolastico, ci riesce difficile capirne la genesi e la grande novità che esso rappresentò a metà del XVII secolo quando Descartes lo pubblicò per la prima volta come parte del *Discorso sul metodo* (1637). Per capire l'importanza di questo metodo e quali differenze lo separino dal metodo sintetico precedente discutiamo un particolare problema coi due metodi..

Problema

Sono dati su un piano due punti A *e* B *diversi. Cerchiamo il luogo dei punto* P *di quel piano per i quali il rapporto* PA : PB *è una costante positiva* k.

Il problema consiste nel descrivere la posizione di tutti e soli i punti P che verificano la condizione richiesta.
Le figure si riferiscono al caso k=2.





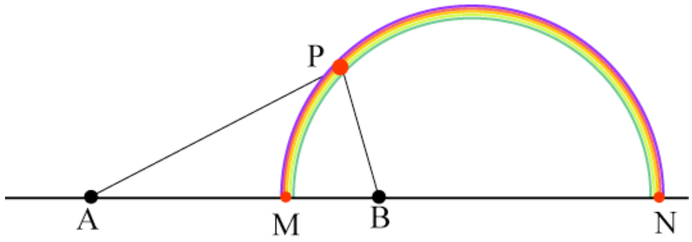
Se P è un punto del luogo un punto cioè per il quale PA = k PB, allora, per un noto teorema di geometria piana, il così detto *teorema della bisettrice* (Euclide, Elementi, VI. 3), un punto M, interno al segmento AB, divide questo segmento nello stesso rapporto k, cioè

$$MA : MB = PA : PB$$

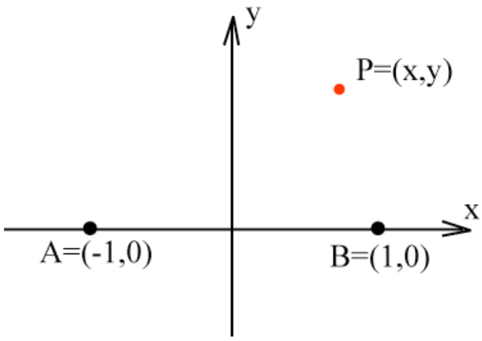
se e solo se PM è la bisettrice dell'angolo (interno) APM. Analogamente un punto N esterno al segmento AB è tale che

$$NA : NB = PA : PB$$

se e solo se la retta PN è la bisettrice dell'angolo esterno all'angolo APB.
Questo teorema, la cui conoscenza pare sia molto antica, ci permette di risolvere il nostro problema. Infatti abbiamo che i punti M ed N, che possiamo costruire a partire da A, B e k sono punti del nostro luogo, inoltre, dato che $2\alpha+2\beta$ è uguale a due angoli retti, l'angolo $\alpha+\beta$ = MPN è un angolo rettangolo e dunque il punto P si trova sulla circonferenza di dimetro MN. Viceversa non è difficile dimostrare che un punto P che si trovi su quella circonferenza fa parte del luogo.
In definitiva, per trovare il luogo richiesto, dobbiamo trovare, prima di tutto, due punti M e N sulla retta AB che dividano il segmento AB internamente ed esternamente nel rapporto k assegnato e poi tracciare la circonferenza di diametro MN.
Aristotele nella sua metereologia utilizza questo teorema per tentare una spiegazione geometrica del fenomeno dell'arcobaleno e della sua apparenza circolare.



Vediamo ora come si può risolvere questo problema col il metodo delle coordinate.
Si fissa prima di tutto un sistema di riferimento cartesiano: si stabilisce cioè la posizione nel piano di un punto O, detto origine , si fissa una unità di misura per le distanze e due assi ortogonali orientati passanti per O che mi diano l'alto e il basso, la destra e la sinistra. Fissiamo il riferimento come nella figura scegliendo l'origine degli assi nel punto medio del segmento AB, l'unità di misura la metà della distanza tra A e B e come asse delle ascisse scegliamo la retta AB.



Ora un generico punto P del piano è individuato da una coppia ordinata di numeri x e y e questo punto è un punto del luogo se e solo se la distanza PA è k volte la distanza PB, cioè se e solo se

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2} = k\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

che, elevando al quadrato, raccogliendo i termini simili e, se k non è 1, dividendo per k^2-1, diventa

$$x^2+2x+1+y^2 = k^2\left(x^2-2x+1+y^2\right)$$

$$\left(k^2-1\right)\left(x^2+y^2\right)-2x\left(k^2+1\right)+\left(k^2-1\right) = 0$$

$$x^2-2x\frac{k^2+1}{k^2-1}+y^2+1 = 0$$

Possiamo ora completare il quadrato di x in modo da ottenere l'equazione

$$\left(x-\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2+y^2-\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2+1 = 0$$

in definitiva, manipolando il termine noto, troviamo

$$\left(x-\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2+y^2 = \left(\frac{2k}{k^2-1}\right)^2$$

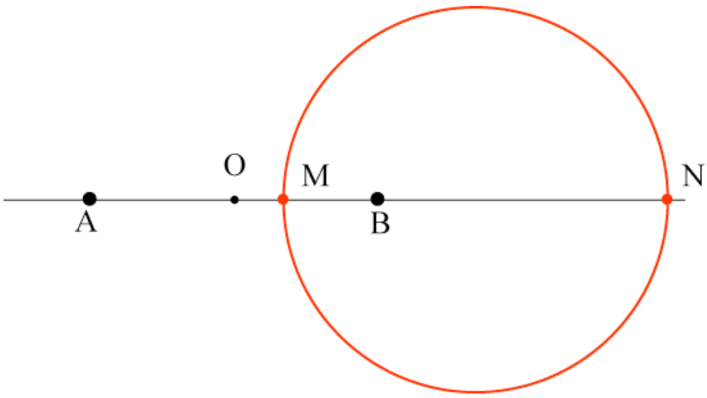
Supponendo k>1 è facile vedere che i punti P=(x,y) che verificano l'equazione che abbiamo trovato sono tutti e solo quelli la cui distanza dal punto C di coordinate $((k^2+1)/(k^2-1),0)$ vale $2k/(k^2-1)$. Il luogo cercato è dunque una circonferenza che ha il centro C sull'asse delle ascisse e interseca questo asse nei punti due punti M e N che si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ \left(x - \dfrac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{2k}{k^2-1}\right)^2 \end{cases} \qquad \text{cioè} \quad x = \frac{k^2+1 \pm 2k}{k^2-1}$$

semplificando l'espressione delle due soluzioni troviamo

$$x_1 = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k-1)} = \frac{k+1}{k-1} \qquad , \qquad x_2 = \frac{(k-1)^2}{(k+1)(k-1)} = \frac{k-1}{k+1}$$

Possiamo ora dare la soluzione del problema: il luogo cercato è una circonferenza che ha il centro sulla retta AB e passa per i punti M ed N di AB la cui distanza dal punto medio O di AB vale rispettivamente (k-1)/(k+1) volte la distanza AO e (k+1)/(k-1) volte la distanza AO.



Nella figura abbiamo rappresentato il caso k=2. In questo caso OM=1/3AO e ON =3AO. La soluzione trovata è uguale a quella di prima per il fatto che AM:BM $=(1+x_1)/(1-x_1)=k$ e AN:BN$=(1+x_2)/(x_2-1)=k$.

Osservazioni.
Per risolvere il problema col metodo sintetico era necessaria una cultura geometrica specifica. Ignorando il teorema della bisettrice sarebbe stato ben difficile risolvere la questione. Il metodo delle coordinate invece necessita solo della conoscenza delle tecniche dell'algebra letterale: calcolo sui polinomi e sulle funzioni algebriche, equazioni e sistemi di equazioni. La conoscenza di queste tecniche di calcolo e solo questo permette teoricamente di risolvere qualsiasi problema. I ragionamenti geometrici lasciano il posto a semplici procedure di calcolo che portano in modo pressoché automatico alla soluzione. Ogni concetto si traduce in un corrispondente concetto algebrico, non solo quello di distanza ma anche, come vedremo, quello di area e di tangente. Il prezzo da pagare per questo paradiso è il dover scegliere un determinato punto di vista col quale inquadrare il problema, il dover scegliere un sistema di riferimento. Mentre le proprietà sintetiche delle configurazioni geometriche sono intrinseche alla configurazioni stesse, ora le equazioni che si associano dipendono strettamente dalla scelta del riferimento: l'oggetto geometrico che studiamo (ad esempio una parabola) ha le sue proprietà intrinseche ma l'equazione con la quale la osserviamo

dipende dal punto di vista nel quale ci siamo messi. L'equazione $y-x^2=0$ è ben diversa dall'equazione $x^2 + y^2 -2xy-x-y=0$ pur rappresentando lo stesso oggetto geometrico: una parabola. Questo problema, spesso sottovalutato, porterà allo studio della difficile teoria degli invarianti per capire cosa non cambi cambiando il punto di vista, quali proprietà delle equazioni non dipendono dal particolare sistema di coordinate scelto.