La teoria delle grandezze omogenee

Una grandezza è un concetto astratto, primitivo. Esempi concreti di grandezze sono le lunghezze di un segmento, le aree di figure piane, i volumi di i solidi, il peso, ecc.

Proprietà
1. Date due grandezze omogenee A e B è possibile stabilire se A> B o se B >A
2. Date due grandezze A e B è possibile calcolare la grandezza A + B e
   - (A + B) + C=A + (B + C) ,
   - A + B = B + A,
   - A + B > A , A + B > B
   - Se A > B esiste una grandezza C tale che A = B + C
3. (Divisibilità in parti uguali) Dato un intero positivo n e una grandezza A esiste una grandezza U tale che nU=A
4. (*Postulato di Archimede*) Data una qualunque grandezza B e una grandezze A anche piccolissima, esiste sempre un intero naturale n tale che nA > B. Una grandezza piccolissima A può diventare grande come si vuole costruendo suoi multipli A, 2A, 3A, 4A un numero sufficientemente grande di volte.

La formulazione di Euclide di questo postulato è la seguente:
Euclide (Elementi, Definizione V.4)
Si dice che hanno fra loro rapporto (o ragione) le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente.

Questo postulato ha due formulazioni in termini di limiti. La prima dice che data una grandezza A

$$\lim_{n \to \infty} nA = \infty$$

infatti questa scrittura significa che, per ogni grandezza K (grande a piacere), esiste un intero n_0 (dipendente da K) tale che nA > K per ogni $n \geq n_0$. L'esistenza di questo intero n_0 è garantita dal postulato di Archimede e dal fatto che, se $n \geq n_0$ allora $nA > n_0A > K$.
Lo stesso postulato implica anche che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} A = 0$$

infatti questa scrittura significa che data comunque una grandezza E (piccola a piacere), esiste un intero n_0 (dipendente da E) tale che (1/n)A < E per ogni $n \geq n_0$. L'esistenza di questo intero n_0 è garantita dal postulato di Archimede che ci dice che esiste un multiplo di E che supera A, cioè un numero intero n_0 tale che $n_0E>A$ cioè $E>(1/ n_0)$ A e quindi E>(1/n)A per ogni $n \geq n_0$.
E' interessante notare come il postulato di Archimede formalizza matematicamente l'affermazione filosofica di Anassagora (V secolo a.C.):
Rispetto al piccolo non c'è un minimo, ma c'è sempre un ancor più piccolo, ma anche rispetto al grande c'è anche un ancor più grande.

Anche nel *Parmenide* (Cap. XX) di Platone troviamo un interessante uso del concetto di limite. Ci sono due entità che hanno una età diversa la prima, più vecchia, ha un'età A e la seconda, più giovane, ha una età B. Col passare del tempo T la differenza (A+T) - (B+T) tra le due età resterà immutata: la prima entità resterà ancora più giovane della seconda, ma il rapporto (A+T) /(B+T) col passare del tempo tenderà a uno cioè le due età tenderanno ad uguagliarsi di modo che il più vecchio, rispetto al più giovane, tenderà a ringiovanire, mentre il più giovane, in rapporto al più vecchio, tenderà a invecchiare. Così argomenta Platone:

-Se a un periodo di tempo più grande e più piccolo aggiungiamo un uguale periodo di tempo, il periodo di tempo più grande differirà dal più piccolo in base a una parte uguale, o più piccola?
-Più piccola.
E' la risposta.
Infatti se $A > B$ e se aggiungiamo ad A e a B un uguale periodo di tempo T, il rapporto $(A+T)/(B+T)$ rispetto al rapporto A/B sarà più piccolo e, col passare del tempo, le due età tendono a diventare uguali una rispetto all'altra senza tuttavia mai uguagliarsi ma mantenendo costante la loro differenza. Così se pensiamo all'età di un individuo, la differenza tra 20 e 15 anni è significativa mentre quella tra 75 e 70 molto meno.
In Euclide troviamo una proposizione che permette di trovare delle successioni di grandezze che tendono a zero, equivalente ma più complessa al postulato di Archimede, che si pensa di Eudosso, un allievo di Platone (IV sec. a.C.) come tutta la teoria delle grandezze.

Euclide , Elementi, X.1
Date due grandezze diseguali, se si sottrae dalla maggiore una grandezza maggiore della metà, dalla parte restante un'altra grandezza maggiore della metà, e così si procede successivamente (letteralmente *e questo procede sempre di seguito), rimarrà una grandezza che sarà minore della grandezza minore inizialmente considerata.*

Se E è una grandezza data a piacere più piccola di A e se $A, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ è una successione di grandezze tale che $A_1 < 1/2A$, $A_2 < 1/2A_1$, $A_3 < 1/2A_2$ ecc. allora esiste un n tale che $A_n < E$. Naturalmente dato che la successione di grandezze è decrescente ciò significa che $A_m < E$ per ogni $m \geq n$. In simboli moderni scriviamo

$$\lim_{n \to \infty} A_n = 0$$

Dato che $A_n < (1/2^n)A$, ciò è anche equivalente al fatto che:

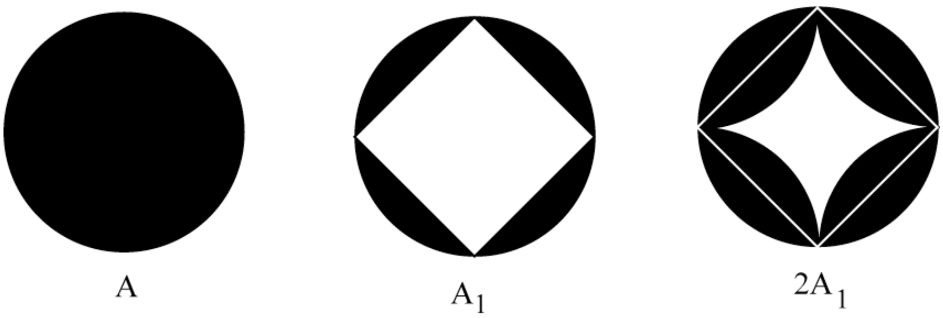
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} A = 0$$

Questa proposizione viene esposta nel libro X degli Elementi (proposizione X.1) che Euclide dimostra usando il postulato di Archimede che ci permette di affermare che, da un certo m in poi, $A < mE$ cioè $(1/m)A < E$ e, non appena sia $2^n > m$, risulta $A_n < (1/2^n)A < (1/m)A < E$.
Usando questa proposizione si può dimostrare (Euclide, Elementi, XII. 2) che, se P_n è un poligono regolare con n lati inscritto in un cerchio C e se Q_n è un poligono regolare circoscritto al cerchio C allora

$$\lim_{n \to \infty} (C - P_n) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \to \infty} (Q_n - C) = 0$$

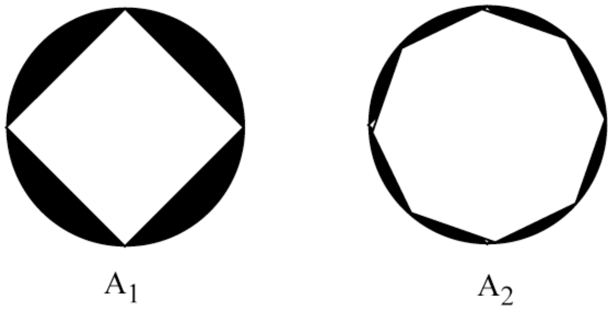
Ecco in sostanza l'idea di Euclide.

Sia A un cerchio e $A_1 = A - Q_1$ è il cerchio a cui togliamo il quadrato Q_1 inscritto



$$A_1 < (1/2)A$$

Leviamo ora ad A_1 un la parte di un ottagono Q_2 regolare contenuto in A_1 ottenendo $A_2 = A_1 - Q_2$.

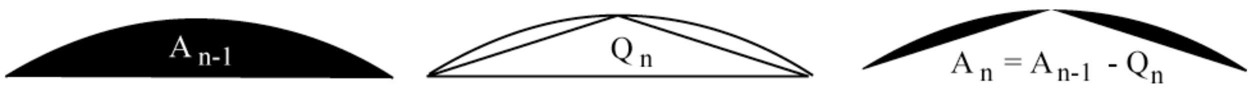


$$A_2 < (1/2)A_1$$

Per dimostrare che $2A_2 < A_1$ usiamo un metodo generale che permette di dimostrare che procedendo in questo modo, raddoppiando cioè via via i lati dei poligoni regolari inscritti nel cerchio, si passa da A_{n-1} ad A_n levando una parte Q_n maggiore della metà di A_{n-1} . Facciamo questo su ogni lato del poligono. Ora

$$2A_n = 2A_{n-1} - 2Q_n < A_{n-1}$$

se e solo se $2Q_n > A_{n-1}$ ma la cosa è evidente perché $2Q_n$ è un rettangolo che contiene A_{n-1}.



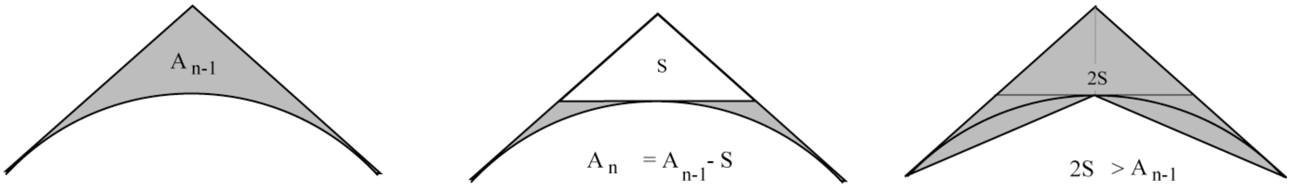
$2Q_n > A_{n-1}$

Possiamo concludere dicendo che i poligoni regolari inscritti in un cerchio approssimano per difetto sempre meglio l'area del cerchio nel senso che se il numero n dei lati del poligono è abbastanza grande la differenza $C - Q_n$ è più piccola di una qualunque grandezza data.

In altri termini, per ogni grandezza E esiste un n_o dipendente da E tale che $C - Q_n < E$ per ogni $n < n_o$. Tutto ciò si scrive in modo compatto nel modo seguente

$$\lim_{n \to \infty} (C - Q_n) = 0$$

Un ragionamento analogo può farsi per i poligoni regolari circoscritti con un numero pari di lati. La parte del poligono che rimane levando il cerchio, man mano che si raddoppia il numero di lati, si ottiene dalla grandezza precedente levando più della sua metà:



Quando si passa da un poligono circoscritto al successivo si leva, per ogni angolo, ad A_{n-1} il triangolo S che è maggiore della metà di A_{n-1} dato che 2S è dato dai due triangoli grigi la cui somma contiene insiemisticamente A_{n-1}.

Osserviamo ancora che il metodo può applicarsi non solo ai cerchi ma anche a figure convesse come l'ellisse, le parabole ecc. ecc.

Questo mi permette di affermare che se R_n è un poligono regolare circoscritto a un cerchio C, allora

$$\lim_{n \to \infty} (R_n - C) = 0$$

o anche che per ogni n

$$Q_n < C < R_n$$

e le grandezze poligonali Q_n inscritte nel cerchio, delle quali so trovare l'area e so quadrare con riga e compasso, approssimano per difetto la grandezza C, mentre le grandezze poligonali R_n circoscritte al cerchio, delle quali so trovare l'area e so quadrare con riga e compasso, approssimano per difetto la grandezza C.

Il metodo di esaustione

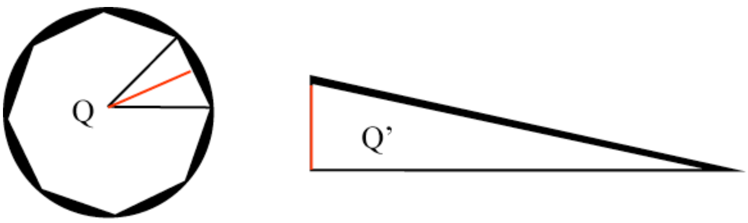
Enunciato (Archimede)
Il cerchio è equivalente al triangolo che ha come altezza il raggio del cerchio e come base la circonferenza.

Sia C il cerchio e T il triangolo la cui altezza è il raggio del cerchio e la cui base è la circonferenza.

Supponiamo che sia C > T, allora esiste un poligono Q con un numero pari di lati inscritto nel cerchio tale che

$$C - Q < C - T$$

infatti aumentando il numero dei lati del poligono Q la grandezza C-Q diventa più piccola di una grandezza arbitraria e quindi posso farla diventare più piccola di C-T.



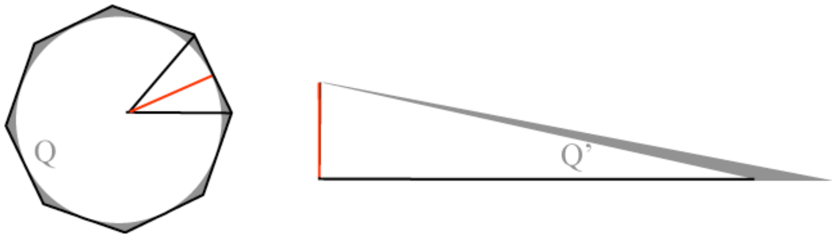
Ma se C - T > C - Q allora

$$T < Q$$

e questo è assurdo perché Q è equivalente al triangolo Q' che ha come base il perimetro di Q (più piccolo della circonferenza) e come altezza l'apotema (più piccolo del raggio) dunque Q' essendo contenuto in T è più piccolo di T. T sarebbe dunque sia più piccolo che più grande di Q il che è impossibile.
Se non può essere C > T, supponiamo che sia C< T, allora esiste un poligono regolare Q circoscritto al cerchio tale che

$$Q - C < T - C$$

Infatti aumentando il numero dei lati del poligono circoscritto Q, Q-C diventa una grandezza minore di una qualunque grandezza data.



Ma, se Q - C < T - C allora Q < T ma questo è assurdo perché Q è equivalente al triangolo Q' che ha come altezza il raggio del cerchio e come base il perimetro del poligono circoscritto che è maggiore della circonferenza. Dunque Q' contenendo T è più grande di T ed essendo equivalente a Q sarà Q > T mentre avevamo visto che Q < T. Non è dunque possibile neppure che sia C >T. La sola possibilità che resta è che C=T.

Il calcolo di Al-Haytham per il volume della sfera

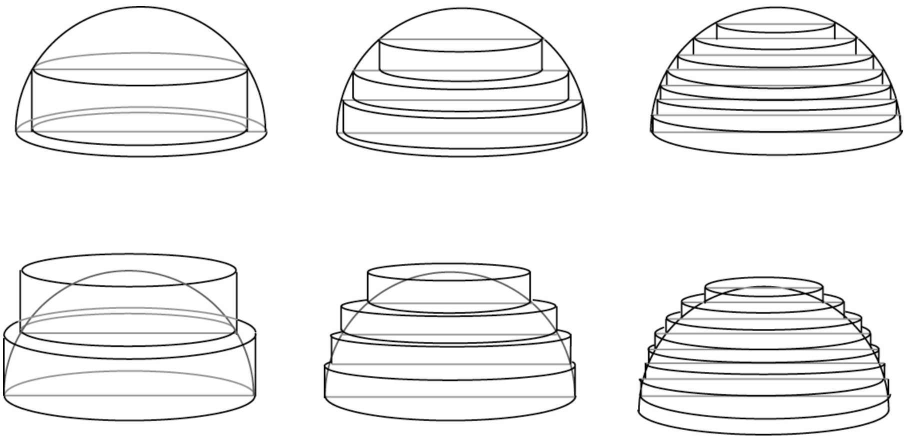
In seguito alla caduta dell'impero romano si assiste in Europa ad un impressionante buio culturale. Gregorio di Tours (538-594) nella *Historia Francorum* riferisce che "la pratica della lettura si è estinta nelle città della Gallia" e nelle stessa scuola che Carlo Magno istituisce per istruire i giovani si insegna a calcolare l'area di un triangolo facendo la media aritmetica di due lati e moltiplicando il risultato per la metà del terzo (Alcuino di York, *Propositiones ad acuendos juvenes*, propositiones 24) o si attribuisce a π il valore 3 o 4 a seconda dei casi. Archimede aveva approssimato π calcolando il perimetro di un poligono con 96 lati trovando il valore 22/7 esatto fino alla seconda cifra decimale.
Ben diversa la situazione nel mondo arabo dove si inizia, a partire da IX secolo, un lavoro di traduzione metodica dei testi classici e si prosegue nella direzione ereditata dai greci sviluppando il

metodo dimostrativo e dando vita a nuovi campi di ricerca come l'Algebra fondata da Al-Kwarizmi nel IX secolo e via via sviluppata dai matematici arabi successivi.

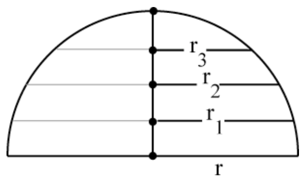
Al-Haytham. (965,1039) matematico latinizzato col nome di Alhazen, dimostra che il volume della sfera è 2/3 il volume del cilindro che ha come altezza il diametro della sfera e come raggio il raggio della sfera. Per fare questo si utilizza il fatto che, se S è la semisfera, allora

$$\lim_{n\to\infty} (S - C_n) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} (D_n - S) = 0$$

dove C_n è il policilindro inscritto nella semisfera e D_n è il policilindro circoscritto. Nella figura è rappresentato il caso n=2,n=4, n=8.



Per ottenere questi solidi basta dividere il raggio r della sfera in n parti uguali e considerare le semicorde $r_0 = r$, r_1, r_2, r_3,.., r_{n-1}



Nella figura è n=4.

C_n è l'unione di n-1 cilindri con la stessa altezza r/n e raggi r_1, r_2, r_3,.., r_{n-1} mentre D_n è l'unione di n cilindri (uno in più!) di altezza r/n e raggi $r_0 = r$, r_1, r_2, r_3,.., r_{n-1}. Si vede dunque che la differenza $D_n - C_n$ è data da un cilindro di raggio r e altezza r/n cioè, se C è il cilindro di altezza r e raggio r, è l'ennesima parte di C

$$D_n - C_n = (1/n)C$$

Il postulato di Archimede implica allora che (1/n)C, se n è abbastanza grande, può essere reso più piccolo di una qualunque grandezza data cioè

$$\lim_{n\to\infty} (D_n - C_n) = 0$$

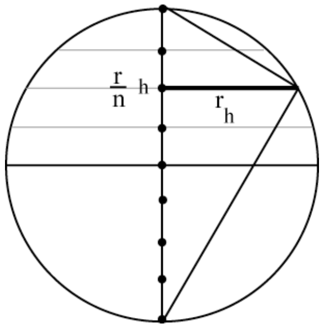
poiché abbiamo insiemisticamente le inclusioni

$$C_n \subset S \subset D_n$$

è facile vedere che

$$\lim_{n\to\infty}(S - C_n) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty}(D_n - S) = 0$$

Data infatti una grandezza E piccola a piacere, D_n - C_n < E per n abbastanza grande, ma S < D_n e quindi S - C_n < D_n - C_n < E, analogamente, essendo C_n < S, abbiamo D_n - S < D_n - C_n < E.
A questo punto Al-Haytham dimostra, col metodo di esaustione, che S = 2/3C: per fare questo vengono calcolati esplicitamente i volumi C_n e D_n . I quadrati dei raggi r_h si possono facilmente ottenere usando il II teorema di Euclide



$$r_h^2 = \left(r - \frac{r}{n}h\right)\left(r + \frac{r}{n}h\right) = \frac{r^2}{n^2}\left(n^2 - h^2\right)$$

I volumi dei cilindri che hanno il raggio r_h e altezza r/n vale dunque

$$\pi\ \frac{r}{n}r_h^2 = \pi\ \frac{r}{n}(r - \frac{r}{n}h)(r + \frac{r}{n}h) = \pi\ \frac{r^3}{n^3}(n-h)(n+h) = \pi\ \frac{r^3}{n^3}(n^2 - h^2)$$

e il volume del policilindro C_n sarà allora la somma di questi volumi

$$C_n = \pi\ \frac{r^3}{n^3}\left\{\left(n^2 - 1\right) + \left(n^2 - 2^2\right) + \left(n^2 - 3^2\right) + \ldots + \left(n^2 - (n-1)^2\right)\right\} =$$

$$= \pi\ \frac{r^3}{n^3}\left\{n^2(n-1) - \left[1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2\right]\right\}$$

La somma in parentesi quadra era ben nota ad Archimede e anche a Al-Haitham

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

e dunque

$$C_n = \pi\ \frac{r^3}{n^3}\left\{n^2(n-1) - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right\} = \pi\ \frac{r^3}{n^3}\left\{(n-1)\left[\frac{4n^2+n}{6}\right]\right\} = \pi\ r^3\frac{(n-1)(4n+1)}{6n^2}$$

Mentre il volume di D_n si ottine da questo aggiungendo l'ennesima parte del volume di C: dunque

$$D_n = \pi\ r^3\left[\frac{(n-1)(4n+1)}{6n^2} + \frac{1}{n}\right]$$

A questo punto Al-Haitham dimostra per esaustione che il volume S della semisfera è due terzi del volume C del cilindro che ha come altezza e come raggio il raggio della sfera. Questo, ovviamente, raddoippiando le misure, ci dice che il volume delle sfera di raggio r è due terzi il volume del cilindro di raggio r e altezza 2r. Poichè questo volume vale $2\pi r^3$, ne segue che quello della sfera vale $(4/3)\ \pi r^3$. Procedendo per assurdo, supponiamo che sia $S > (2/3)C$. Esiste allora un n tale che

$$S - C_n < E = S - (2/3)C$$

cioé $C_n >(2/3)\ C$ e questo è impossibile perché

$$\frac{4n^2-3n-1}{6n^2} < \frac{2}{3}$$

dato che $4n^2 > 4n^2 -3n -1$.

Non può dunque essere S>2/3C, ma non può neppure essere S<2/3C. In questo caso infatti possiamo trovare n tale che il policilindro D_n , circoscritto alla semisfera, è tale che

$$D_n - S < E = (2/3)C - S.$$

Ma allora risulterebbe $(2/3)C > D_n$ e questo è anche impossibile dato che

$$\frac{2}{3} < \frac{(n-1)(4n+1)}{6n^2} + \frac{1}{n}$$

essendo $4n^2 < 4n^2 +3n - 1$.

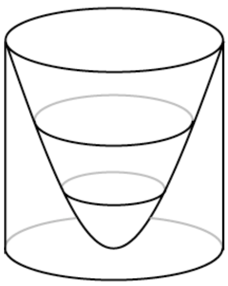
Si noti l'uso decisivo del calcolo algebrico.

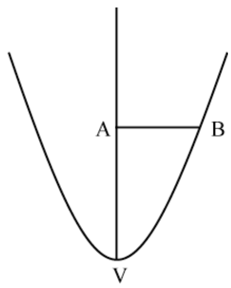
Notiamo anche che Al-Haitham non calcola il limite, cosa che avrebbe evitato il ricorso all'esaustione e avrebbe permesso di trovare, a posteriori, il volume cercato calcolando il limite.

$$S = \lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} \pi\ r^3 \frac{4n^2-3n-1}{6n^2} = \lim_{n\to\infty} \pi\ r^3 \frac{4-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{6} = \pi\ r^3 \frac{4}{6} = \frac{2}{3}\pi\ r^3$$

Esercizio

Usando il metodo di Al-Haitham calcolare il rapporto tra il volume di un paraboloide di rivoluzione e il cilindro che lo circoscrive.





Suggerimento: usare il fatto che in una parabola di vertice V e asse di simmetria VA, se AB è una semi corda perpendicolare all'asse, allora $AB^2 = p\ VA$, essendo p una costante che non dipende da punto A.