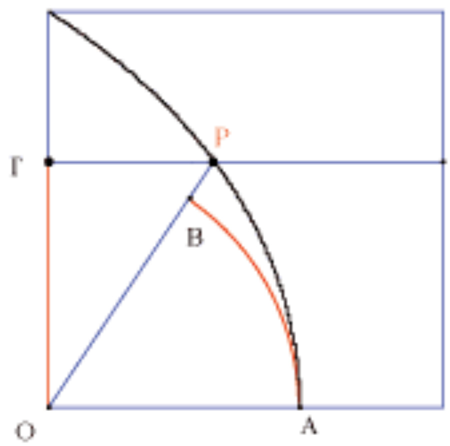
Le "curve-equazioni" di Cartesio

Il contributo principale di Cartesio alla storia della scienza è probabilmente quello di avere enormemente ampliato il campo di oggetti matematici concepibili dal nostro pensiero e suscettibili di essere studiati razionalmente e razionalmente compresi. E' il concetto di curva cambia radicalmente rispetto al passato. Ora una curva è un insieme di punti le cui coordinate verificano una equazione F(x,y)=0. L'equazione algebrica diviene l'essenza dell'oggetto geometrico che essa definisce. Nascono nuovissime forme, un nuovo universo di oggetti inediti e dei metodi per poterne studiare in tutta generalità le proprietà principali, nuovi oggetti a disposizione degli scienziati per interpretare e descrivere la natura, per creare nuova tecnologia. Il cambiamento è talmente radicale che fece fatica ad affermarsi immediatamente. Queste curve-equazione non venivano recepite come "vere" curve e per questo fecero fatica ad essere accettate come oggetti di studio. Le vere curve erano quelle definibili con una qualche proprietà meccanica o geometrica. Diamo una breve descrizione delle principali curve preesistenti alla rivoluzione cartesiana per cercare di capire la differenza tra la nuova proposta e le resistenze ad affermarla. Come vedremo, lo stesso Cartesio, per convincere i suoi contemporanei della legittimità dei nuovi oggetti, inventa una macchina ideale capace di realizzare delle curve meccaniche definite da polinomi di grado alto quanto si vuole.

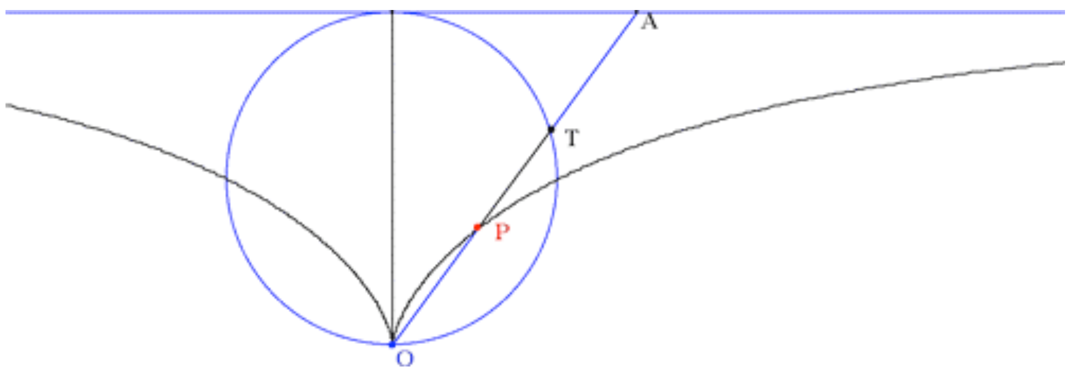
A parte i tre tipi di sezioni coniche (ellissi parabole e iperboli) e le spirali studiate da Archimede poche altre curve venivano studiate dalla matematica greca per lo più in relazione ai problemi classici come la quadratura del cerchio, la trisezione dell'angolo e la duplicazione del cubo. Facciamo una breve carrellata per presentare alcune di queste curve.

Quadratrice di Ippia (V sec. a.C.)
La quadratrice è ottenuta intersecando una retta TP che trasla parallelamente al segmento OA con la retta OP che ruota con la stessa velocità attorno al punto O.

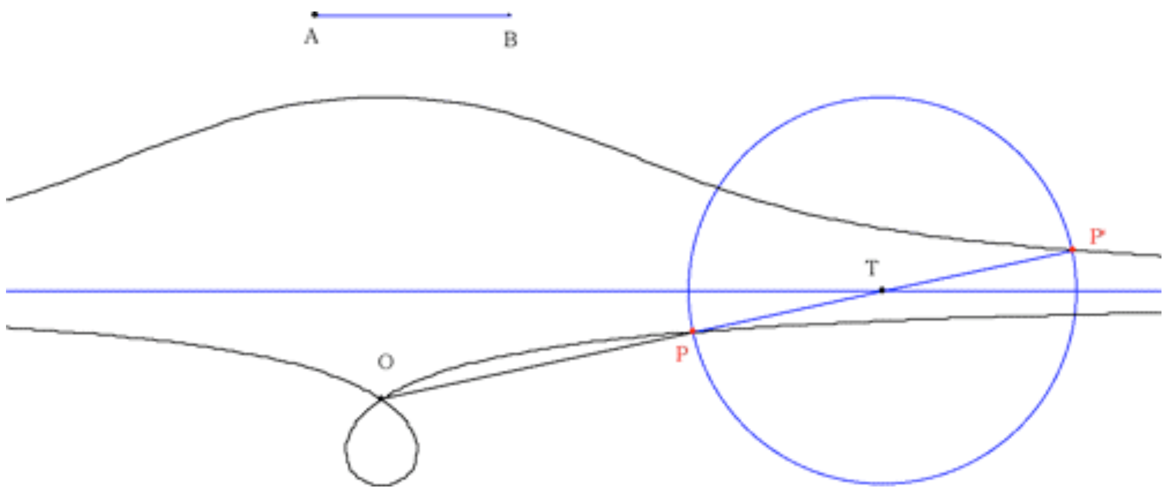


Usando questa linea che poteva essere tracciata con continuità da un apparecchio meccanico si poteva quadrare il cerchio e trisecare l'angolo. Per questo è anche chiamata trisettrice. Purtroppo questa curva, come le altre che seguono, non è costruibile con riga e compasso.

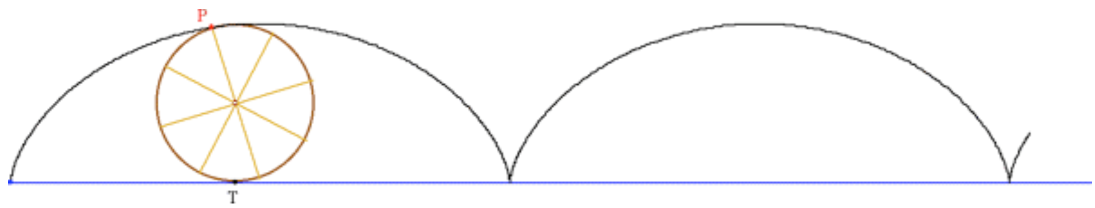
Cissoide di Diocle (III sec a.C)
E' il luogo dei punti P tali che OP=TA
Fermat e Roberval calcolano la tangente alla cissoide nel 1634



Concoide di Nicomde (IIIsec.a.C)
Dato un segmento AB, la concoide è il luogo dei punti P tali che PT=AB.

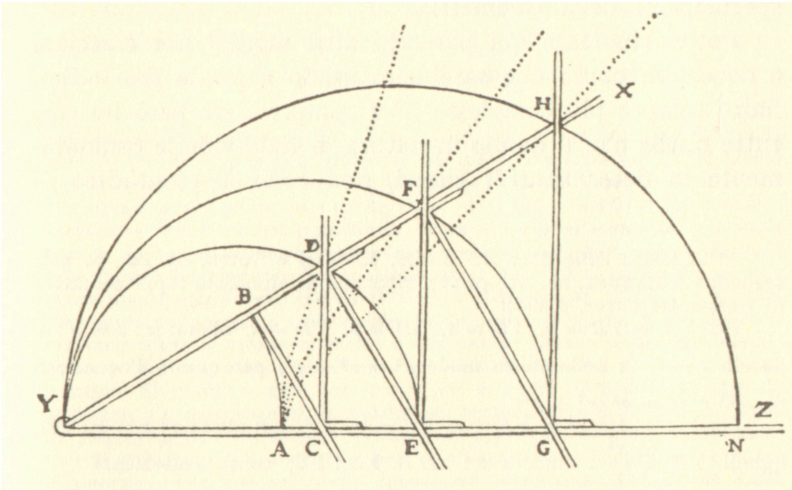


Cicloide (Cusano XV sec.)

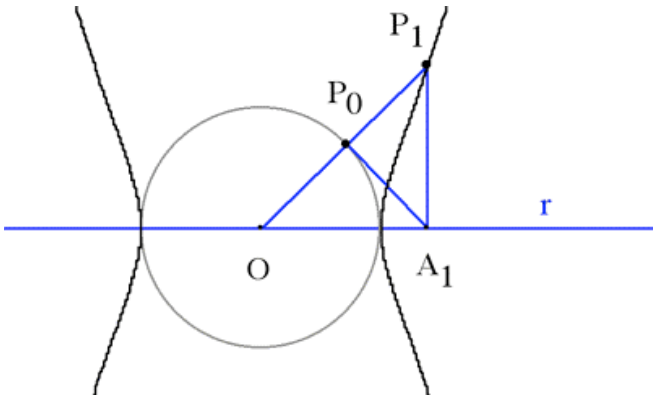


La ciloide, chiamata così da Galileo Galilei nel 1559, è il luogo descritto da un punto P di una circonferenza quando questa ruoti senza strisciare su una retta. La curva è stata introdotta dal filosofo Cusano e studiata lungamente nel XVII secolo. Torricelli ne calcola l'area e Viviani da un metodo per trovare la tangente in un suo punto. La curva è stata studiata anche da Cartesio, Roberval e Fermat.

Vediamo ora in così detto **compasso cartesiano**. Si tratta di un processo iterativo che, passo dopo passo, costruisce attraverso un movimento meccanico una curva algebrica la cui equazione ha un grado che aumenta di quattro unità alla vota. La curva iniziale è una circonferenza



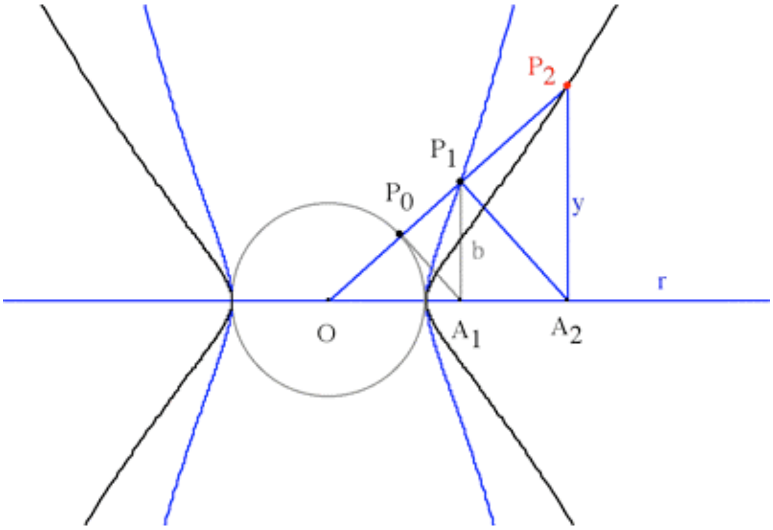
Prendiamo un punto P_0 variabile su una circonferenza di centro O. Fissiamo un retta r passante per il centro della circonferenza,



per ogni punto P_0 consideriamo la semiretta O P_0, la retta P_0 A_1 perpendicolare a O P_0 e la retta A_1 P_1 perpendicolare a r. Il luogo dei punti P_1 descrive una curva la cui equazione, scegliendo come origine il centro della circonferenza come asse delle x la retta r e come unità il raggio della circonferenza, , si determina immediatamente: sia x= O A_1 e y = A_1P_1. $x^2 + y^2 = OP_1^2$ ma , $OP_1.OP_0 = OA_1^2$ ed, essendo OP_0=1, si ricava OP_1=x^2 e quindi l'equazione della curva è di quarto grado

$$x^2 + y^2 = x^4 .$$

Iteriamo ora il procedimento. Per ogni punto P_1 di coordinate (a,b) della curva ottenuta, costruiamo la retta OP_1, la sua perpendicolare P_1A_2 e la perpendicolare a r, A_2P_2. Il luogo descritto da P_2 è una nuova curva



la cui equazione si calcola a partire dall'equazione precedente.
Abbiamo intanto essendo simili i triangoli O P_1A_1 e O P_2A_2

$$bx - ay=0$$

Consideriamo ora il triangolo rettangolo P_1A_2 P_2 , risulta $P_1A_2^2$ =by, e d'altra parte, guardando al triangolo rettangolo O P_1A_2, $P_1A_2^2$ =x(x-a). Otteniamo quindi

$$ax+by=x^2$$

ricaviamo da queste equazioni a e b in finzione di x e y

$$\begin{cases} a = \dfrac{x^3}{x^2+y^2} \\ b = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

sostituire questi valori nell'equazione della curva: $a^2 + b^2 = a^4$. Troviamo così l'equazione del secondo luogo

$$\left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)^2 = \left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right)^4 \quad \text{cioè} \quad \left(x^2+y^2\right)^3 = x^8$$

che è di grado 8. In generale se F(x,y)=0 è l'equazione del luogo n-esimo, quella del luogo successivo
è

$$F\left(\frac{x^3}{x^2+y^2}, \frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) = 0$$

In generale le equazione dei vari luoghi sono

$x^2 + y^2 = x^4$, $(x^2 + y^2)^3 = x^8$, $(x^2 + y^2)^5 = x^{12}$, $(x^2 + y^2)^7 = x^{16}$, $(x^2 + y^2)^9 = x^{20}$, ecc. ecc.

Ognuna di queste equazioni rappresenta una curva che si può ottenere con uno strumento meccanico (se pure ideale): il compasso cartesiano!