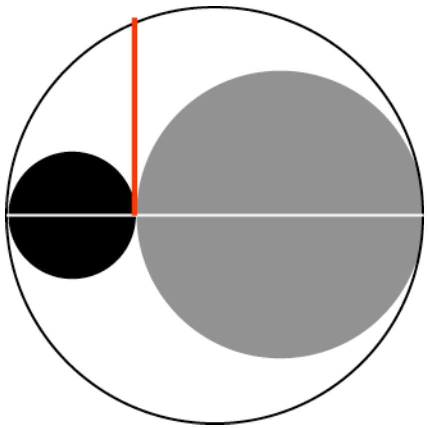
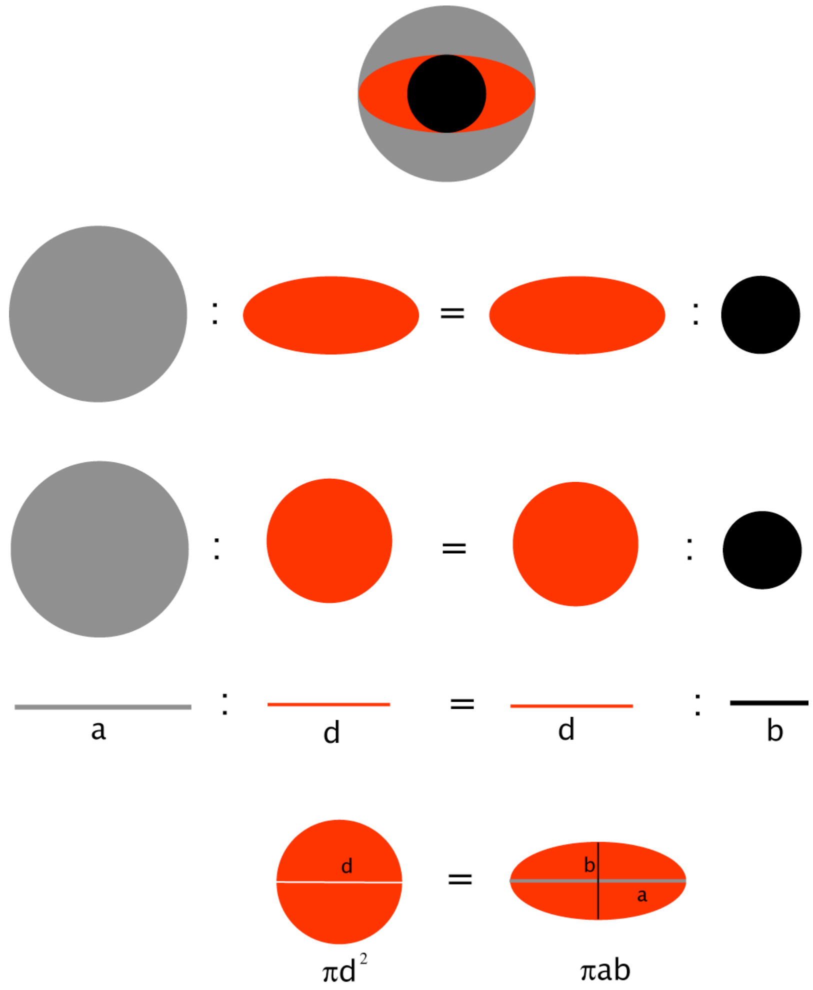
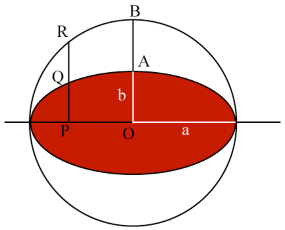
# Area dell'ellisse secondo Archimede
# con il metodo di esaustione

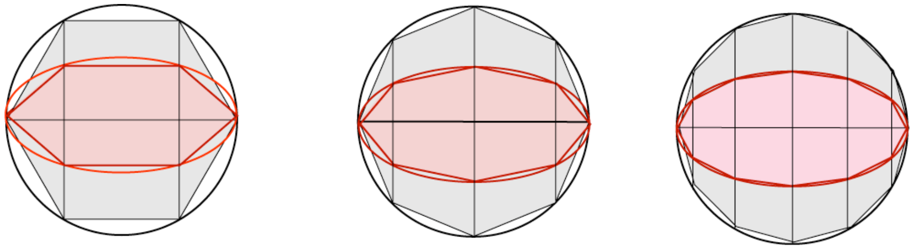




# Il poligono schiacciato

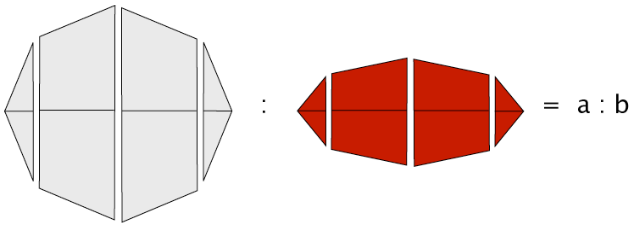



I semiassi dell'ellisse sono i segmenti di lunghezze a e b.
Il rapporto k=a:b (nella figura a è due volte b) definisce l'ellisse come luogo geometrico nel senso che **PR : PQ = OB : OA = a : b** per ogni punto P sul diametro del cerchio

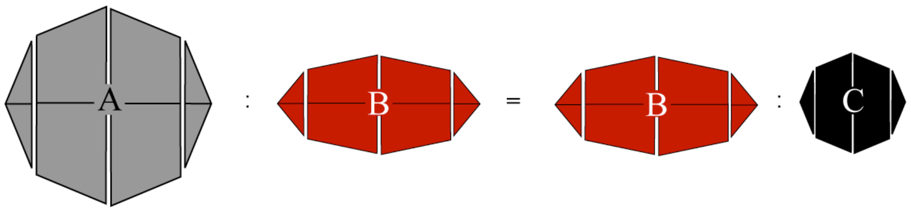


n=3 n=4 n=6

Se inscriviamo nel cerchio un poligono regolare di 2n lati (poligono grigio) possiamo "schiacciare" il poligono ottenendo un nuovo poligono (poligono rosso) inscritto nell'ellisse.




Il rapporto tra le aree dei due poligoni è a : b dato che i due poligoni si scompongono di triangoli e trapezi che hanno le stesse altezze e le basi nel rapporto a : b.
Nelle figure l'area del poligono schiacciato è la metà dell'area del poligono inscritto nel cerchio dato che b è la metà di a.

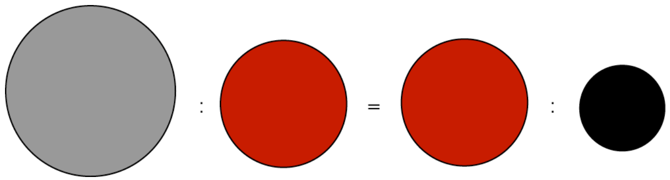



Il poligono grigio è inscritto in un cerchio di raggio a e quello nero in un cerchio di raggio b. Dunque il rapporto tra le aree dei poligoni grigi e neri è $(a{:}b)^2$.

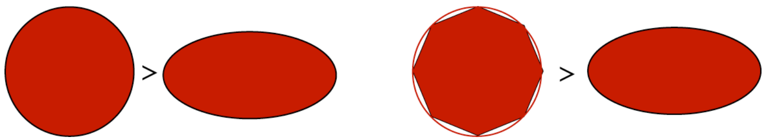
$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{A}{B}\,\frac{A}{B} = \frac{A}{C} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{A}{B} = \frac{B}{C}$$

# Cenni sulla dimostrazione di Archimede

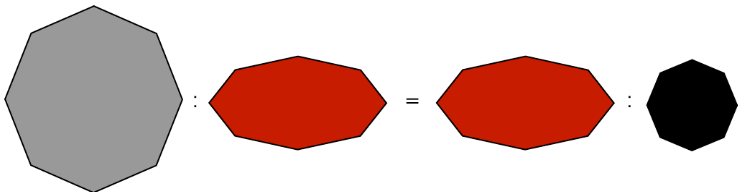
**Teorema** (Archimede)
L'ellisse di semiassi a e b è media proporzionale tra il cerchio di raggio a e quello di raggio b. Ciò significa che la sua area E verifica la proporzione $\pi a^2 : E = E : \pi b^2$ cioè $\mathbf{E = \pi\, ab}$. La dimostrazione usa il *metodo di esaustione.*



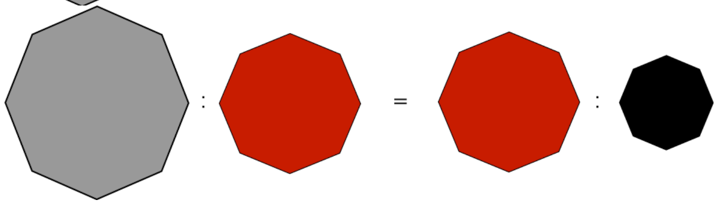
Dati i due cerchi di raggi a (quello grigio) e b (quello nero) costruiamo un cerchio (rosso) la cui area sia la loro media proporzionale. Per questo basterà costruire un cerchio di raggio $\sqrt{ab}$. Vogliamo dimostrare che l'area dell'ellisse è uguale a quella di questo cerchio.



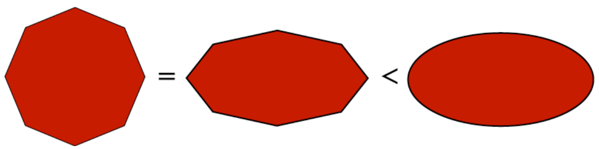
Supponiamo *per assurdo* che l'area dell'ellisse sia più piccola dell'area del cerchio medio. Possiamo allora inscrivere in questo un poligono regolare di 2n lati la cui area sia maggiore di quella dell'ellisse. Questo perché i poligoni regolari "*esauriscono*" il cerchio.



Costruiamo ora un poligono regolare di 2n lati inscritto nel cerchio grigio, schiacciamo questo poligono in un poligono di 2n lati inscritto nell'ellisse e costruiamo un poligono regolare di 2n lati inscritto nel cerchio nero. Come abbiamo visto, il poligono schiacciato è medio proporzionale tra questi due.



Anche il poligono regolare di 2n lati inscritto nel cerchio rosso è medio proporzionale tra i due, dato che il cerchio rosso è il medio proporzionale tra il grigio e il nero e i tre poligoni sono simili avendo lo stesso numero di lati.



Ne segue che il poligono rosso ha la stessa area del poligono schiacciato (perché il medio proporzionale è unico). Ma il poligono schiacciato è contenuto nell'ellisse e quindi ha un'area minore, contrariamente a quanto avevamo supposto.

In modo analogo si dimostra che l'area dell'ellisse non può neppure essere più grande dell'area del cerchio rosso.