Due esempi di spazi triestesi illimitati e compatti

di Franco Ghione

Il 10 giugno 1854 Bertrand Riemann, alla presenza di Gauss e del consiglio di Facoltà dell'Università di Gottinga, leggeva la sua dissertazione di abilitazione sulle *ipotesi che stanno alla base della geometria* [1]. Nei 150 anni che ci separano da quella data la geometria ha fatto enormi progressi anche sul piano filosofico nella direzione che Riemann aveva intuita ed indicata. Egli ebbe l'ardire di ipotizzare l'esistenza di differenti spazi triestesi, in tutto simili, localmente, all'ordinario spazio euclideo che i nostri sensi ci fanno percepire, ma, globalmente, profondamente diversi tra loro. Questi spazi potevano essere pensati e coerentemente studiati *in sé*, potevano curvarsi intrinsecamente senza che questa curvatura emergesse da uno spazio ambiente piatto, assoluto, nel quale, come le superfici curve di Gauss, venissero immersi. Per la prima volta il concetto di infinito spaziale, di infinito nel senso della lontananza e non del numero, poteva essere smontato e questo permetteva di evidenziare fatti nuovi come, ad esempio, la profonda differenza tra uno spazio illimitato e uno spazio infinito. Riemann immagina chiaramente degli spazi triestesi illimitati ma finiti contrariamente all'intuizione comune che ci spinge ad estrapolare, senza che nessuna esperienza o ragionamento lo consenta, ciò che l'esperienza comune ci suggerisce sullo spazio che percepiamo intorno a noi. Euclide [2] ha bisogno di postulare il comportamento all'infinito di due segmenti che formano angoli retti con una trasversale: questi se prolungati indefinitamente non si incontrano

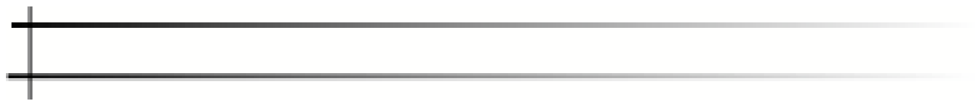

fig 1

L'assunzione di questo postulato, che non è possibile verificare con l'esperienza, è assolutamente necessaria per poter dimostrare anche le più semplici proprietà delle figure, ad esempio che la somma degli angoli in un triangolo è di due angoli retti. Riemann rinuncia a questo postulato ed indaga sulle diverse possibilità, le diverse forme globali che lo spazio potrebbe assumere a partire dalle proprietà locali, le sole che l'esperienza empirica ci permette di verificare.
I risultati di questa ricerca hanno portato senza dubbio un decisivo e ineliminabile contributo alla comprensione della possibile natura globale dello spazio fornendo ai fisici nuovi modelli geometricamente coerenti. Essi saranno variamente considerati prima da Einstein [3] nella sua straordinaria descrizione dello spazio fisico, curvato dalla materia, e poi, in forme diverse, dalle varie teorie astronomiche che indagano sulla natura dell'Universo e della sua evoluzione e da quelle che studiano le particelle elementari e le loro interazioni. Malgrado questo abbia comportato, oramai da decenni, diverse immagini del mondo, fuori dall'ambiente strettamente scientifico (fisico e matematico) non esiste nessuna percezione di queste idee neppure a livello filosofico. La possibilità che ha il pensiero di definire coerentemente e poi studiare una moltitudine di spazi triestesi (o anche n-estesi) a partire da loro proprietà locali viene considerata dai più una incomprensibile stravaganza dei matematici e la percezione diffusa di cosa sia la geometria rimane ferma ai triangoli, ai cerchi e a quel poco che ancora si ricorda di geometria euclidea. In realtà gli enormi sviluppi che in questi 150 anni sono stati compiuti hanno dato la luce a una gran messe di *varietà* le cui caratteristiche qualitative (limitatezza o illimitatezza, finito o infinito, orientabile o non orientabile, compatto o non compatto ecc. ecc.) potevano essere definite rigorosamente in modo da poter decidere sull'esistenza o meno di spazi coerenti con date caratteristiche globali. Il lavoro di classificazione, non ancora concluso, ha prodotto criteri di equivalenza per ridurre uno spazio ad un'altro e liste di prototipi, con tanto di nome, cognome e carta d'identità, che fissano definitivamente, su esempi effettivi, la possibile compatibilità o meno di alcune proprietà tra loro.

Si può ad esempio escludere che possa esistere una varietà tridimensionale compatta con *infiniti mondi* come ipotizzò Giordano Bruno [4]. Ma di questo parleremo meglio nel seguito.
In questo intervento cercheremo di descrivere due varietà triestese, illimitate e compatte. Questi oggetti sono profondamente diversi tra loro e possono essere utili come termine di paragone per nuove analogie anche di natura filosofica o letteraria. Sperando che nomi e simboli non spaventino immediatamente il lettore diciamo subito di cosa si tratta: parleremo del *toro piatto*, che si denota col simbolo $S^1 \times S^1 \times S^1$ e della *ipersfera* che si denota col simbolo S^3. La prima varietà può essere utile come modello per una visione ciclica dello spazio mentre la seconda la presentiamo per illustrare un interessante punto vista sull' universo dantesco.

Da sempre l'uomo pensante si è interrogato, guardando, ad esempio, la notte il cielo stellato, sull'estensione del tutto, sulla sua infinità, sulla sua forma. Nell'antica astronomia cinese [5] ad esempio, la teoria Kai Thien, immaginava la volta celeste come una specie di semisfera che copre la terra, come una "tazza capovolta" a base quadrata ma via via sempre più tondeggiante. Questa tazza galleggia sull'acqua e ai 4 lati si trovano i 4 mari. E' evidente come questo modello si basi su una analogia che si ottiene osservando il fatto curioso che una tazza capovolta sull'acqua, essendo piena di aria, galleggia. L'osservazione del moto circolare delle stelle attorno alla stella polare fa pensare, piuttosto che a una tazza, a un oggetto più "geometrico" come ad esempio una sfera. Questo oggetto ha una importante caratteristica: se si fa ruotare una sfera attorno ad un diametro (asse di rotazione) i suoi punti descrivono delle circonferenze che si ottengono intersecando la sfera col piano perpendicolare all'asse di rotazione e passante per il punto considerato. Ecco quindi che questo oggetto si presta benissimo a descrivere il cielo e il movimento delle stelle. Sulla base di queste semplici considerazioni anche gli astronomi cinesi contrappongono al modello della tazza quello della sfera detto Hun thien. Si suppone, in questo nuovo modello, la volta celeste come una sfera a metà riempita di acqua, all'interno della quale galleggia la terra pure sferica. L'analogia principale è, come in alcuni canti orfici, quella dell'uovo: il guscio sta al tuorlo come il cielo sta alla terra e l'albume rappresenta una sorta di liquido sul fondo dell'uovo sul quale galleggia la terra. La sfera ruotando attorno al suo asse, inclinato rispetto all'orizzonte, si porta dietro le stelle che appaiono muoversi lungo dei cerchi mentre quelle più lontane dalla stella polare che resta fissa, nascono dal mare e, dopo aver percorso un'arco di circonferenza, come il modello permette di prevedere e l'osservazione diretta conferma, tramontano nel mare. Anche il Sole di giorno segue lo stesso cammino. E' curioso osservare come questa teoria si scontrasse contro alcuni pregiudizi filosofici, che ora a noi fanno sorridere, mentre nel contesto cinese, fortemente imbevuto di una favolistica popolare consolidata, dovevano apparire come presupposti importanti da non contraddire nel modello teorico proposto. La difficoltà consiste in questo: il sole, che è l'essenza infuocata dello Yang, come può, tramontando, mischiarsi all'acqua che è l'essenza dello In? La difficoltà fu alla fine superata pensando che anche i draghi riescono a vivere nell'acqua: il sole dunque diventa simile a un drago che il giorno esce dall'acqua e sputa fuoco e la notte vi si immerge!
Questa storia che, per la sua lontananza dalla nostra cultura, ci appare ridicola, mette invece bene in evidenza il ruolo che pregiudizi diffusi di natura metafisica, dei quali a volte neppure ci rendiamo conto, possono avere nell'impedire lo sviluppo di nuove concezioni. L'immaginazione resta come prigioniera nella gabbia del pregiudizio, dell'abitudine e la nostra mente diventa impotente e fa resistenza, incapace di aggirare *l'ostacolo epistemologico*, come affermava Bachelard. Il pensiero comunemente diffuso oggi ritiene che l'unico spazio a tre dimensioni, illimitato nelle tre direzioni spaziali, che ha senso concepire e che riusciamo ad immaginare è quello euclideo. Il processo di estrapolazione dal locale al globale, che Euclide dichiara apertamente col V postulato, viene ignorato e si radica il pregiudizio che, così come la geometria euclidea è conforme alla nostra esperienza locale, così essa debba mantenersi su scale infinitamente grandi o infinitamente piccole del tutto estranee alla nostra esperienza diretta. La via che proponiamo per aggirare questo pensiero

forte, di ostacolo alla comprensione di ciò che vogliamo descrivere, consiste nel tentare di trasformare il concetto fossilizzato di spazio, sulle cui caratteristiche globali ben poco possiamo dire di definitivo, in un concetto vivo, problematico ricostruendo per sommi capi domande, anche ingenue e le risposte che via via si sono cercate.

Domanda Archita, discepolo di Pitagora:
S'io mi trovassi all'estremità dello spazio, ad esempio nel cielo delle stelle fisse, potrei tendere la mano o un bastoncino fuori di quella? o non potrei?

L'immagine che ci formiamo nella mente è molto bella e moderna: ci chiediamo se in ogni punto dello spazio esista un intorno, una sferetta col raggio grande come un bastoncino, che permetta di andare oltre in una qualunque direzione come l'esperienza locale ci suggerisce. La risposta negativa di Aristotele [6] è chiara e perentoria:

Il cielo è unico solo e completo: non vi sono né spazio, né vuoto, né tempo al di là di esso.
...la forma del cielo deve essere poi di necessità sferica: è questa infatti la figura che più si adatta al suo essere...

Questa descrizione dell'Universo come una sfera con la terra ferma al centro oltre la quale non esiste nulla, che oggi ci appare ingenua, si è invece radicata per secoli e secoli nell'immaginario collettivo prefigurando un al di là di natura metafisica nel quale trovavano posto i luoghi della divinità. Giordano Bruno, che ebbe il coraggio di prefigurare un diverso modello, fu per le sue idee geometriche incarcerato 7 anni, torturato e infine ucciso sul rogo. Così, con una poesia spavalda e carica di libertà, Giordano Bruno descrive nel suo Dialogo Italiano *De l'infinito universo e mondi* le sue eretiche concezioni del mondo:

... ali sicure all'aria porgo
nè temo intoppo di cristallo o vetro
ma fendo i cieli e all'infinito m'ergo
e mentre dal mio globo agli altri sorgo
e per quell'eterio campo penetro:
quel ch'altri lungi vede, lascio al tergo

e più avanti in un linguaggio più scientifico afferma

Noi diciamo che possiamo cogliere col senso l'infinità dell'Universo, perché il senso sposta sempre il centro dell'orizzonte verso la periferia dell'orizzonte così che fa essere centro qualsiasi punto della periferia

E' la risposta affermativa alla domanda di Archita, ancora chiara e perentoria. Ogni punto dello spazio, anche se ci appare periferico è centro di una sferetta che, come dicevamo sopra, e del tutto simile a ciò che i nostri sensi ci fanno percepire. Questa idea è molto importante perché prefigura uno spazio *senza bordo* o come dice Riemann *illimitato*, senza confini, senza barriere insuperabili.

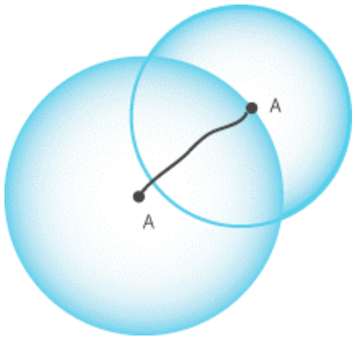

fig2

Lo spazio che Giordano Bruno immagina di poter esplorare col *senso*, che *sposta* il centro verso la periferia, prefigura il concetto moderno di *varietà riemanniana triestesa* (o tridimensionale) che Riemann (e noi dopo di lui) chiama illimitata [1]:

Che lo spazio sia una varietà illimitata triestesa, è un presupposto che trova applicazione in ogni concezione del mondo esterno, in base alla quale, in ogni istante, viene integrato l'ambito delle percezioni reali e vengono costruiti i possibili luoghi di un oggetto cercato, presupposto che viene continuamente confermato in queste applicazioni. L'illimitatezza dello spazio possiede dunque una certezza empirica maggiore di qualsiasi esperienza esterna.

In ogni punto della varietà esiste un intorno sferico che ci permette di misurare le distanze nelle tre direzioni spaziali esattamente come avviene nello spazio intorno a noi

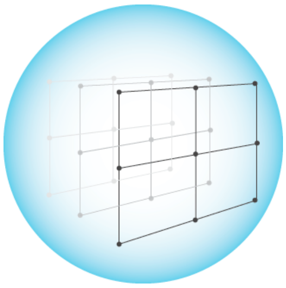

fig 3

Naturalmente dobbiamo chiedere che queste distanze siano misurate coerentemente e cioè diano lo stesso risultato se vengono calcolate nella parte comune a due intorni.

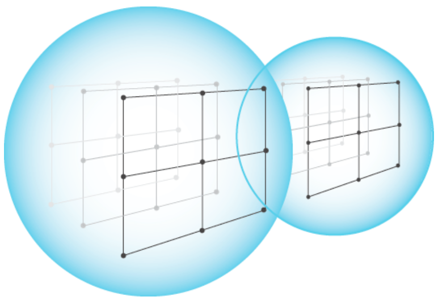

fig 4

Il concetto che nasce è appunto quello di *varietà Rimanniana triestesa*.

Se pensiamo ora, con Bruno e Riemann lo spazio come una varietà illimitata, in ogni punto della quale sia possibile andare oltre, tendere la mano, il discorso sembra chiudersi poiché non riusciamo ad immaginare nessuna possibile differenza tra due spazi triestesi ed illimitati, il pensiero si blocca come se quella immagine assorbisse in se ogni altra possibilità senza lasciare letteralmente altro spazio all'immaginazione. Eppure altre domande possono porsi, tipo quella di Archita, alle quali rispondere, senza farsi influenzare dai pregiudizi. Facciamone alcune:

Nello spazio triesteso e illimitato, dato un punto A esiste o non esiste un punto B (antipodale) che ha la massima distanza possibile da A?

Ora, se questo punto B esistesse e io mi muovessi ulteriormente da B, di un palmo ad esempio, mi dovrei avvicinare ad A essendo B il punto più lontano. Ma questo è concepibile? O i nostri modelli mentali ci fanno decisamente respingere questa idea?

Ci domandiamo ancora:

Se sono in un punto A e poi mi sposto di un palmo in A_1 *e poi da* A_1 *ad* A_2 *di un altro palmo fino ad arrivare in* A_3*, e così via in* A_4 , A_5 *, ... ecc ecc questi infiniti punti possono disperdersi nello spazio o sono destinati comunque a di accumularsi intorno ad un punto avvicinandosi sempre più a lui? Posso trovare un insieme infinito di punti tali che la distanza di due di loro è sempre maggiore o uguale a un palmo? Posso costruire una rete con infiniti nodi?*

Giordano Bruno risponde con chiarezza in modo affermativo dato che presuppone che nello spazio infinito vi siano infiniti mondi i quali sono concepibili solo se distanziati tra loro di una quantità che non tende a zero. E questa concezione si è via via radicata al punto che anche noi siamo portati spontaneamente a dare la stessa risposta affermativa malgrado né l'esperienza empirica né alcuna forma di ragionamento possano dimostrare tali ipotesi. Ugualmente alla domanda

E' possibile descrivere tutto lo spazio illimitato usando solo un numero finito di carte ad esempio un numero finito di intorni sferici?

rispondiamo immediatamente di no.

Queste domande in un modo o nell'altro prefigurano un concetto geometrico di estrema importanza anche se lontano dalla nostra intuizione dal tono delle risposte che naturalmente siamo portati a dare: si tratta del concetto di *compattezza*. In realtà una varietà riemanniana (illimitata) triestesa può essere o non essere compatta e nel caso sia compatta alle domande precedenti si risponde in modo imprevisto.

Poiché una varietà è definita attraverso intorni sferici che mi permettono di passare da un centro A_1 verso un punto periferico A_2 che a sua volta posso pensare come centro di una nuovo intorno e poiché posso proseguire quanto voglio in questa maniera, il sistema più naturale per studiare la struttura globale della varietà potrebbe essere quello di immaginare un lungo viaggio di esplorazione per vedere se accade qualcosa di particolare. Lo stesso Escher, che allo studio e alla rappresentazione dell'infinito ha dedicato gran parte della sua opera, così si esprime [7]:

"*.... Chiunque si tuffi nell'infinito, sia nel tempo che nello spazio, senza interrompersi ha bisogno di punti fissi, di pietre miliari perché altrimenti il suo movimento non sarebbe distinguibile dall'immobilità'. Devono esserci stelle oltre le quali sfrecciare, segnali dai quali egli possa misurare la distanza che ha traversato. Egli deve dividere l'universo in distanze di una data lunghezza, in compartimenti che ricorrano in una serie interminabile. Ogni volta che egli supera un confine tra un compartimento e l'altro, il suo orologio fa tic.....*"

Scegliamo dunque una data direzione, ad esempio quella da ovest ad est e immaginiamo di muoverci lungo una "retta" nello spazio segnando ogni volta con una pietra miliare la posizione che abbiamo raggiunto. La linea retta è un concetto locale che, da un intorno ad un'altro, possiamo prolungare. Partiamo infatti da un punto A, e consideriamo un intorno di questo punto; spostiamoci seguendo la direzione che abbiamo scelto dal punto A lungo un segmento fino ad arrivare al punto B. La cosa è sempre possibile perché la varietà è illimitata (e quindi possiamo muoverci in ogni possibile direzione) e in più, nell'intorno di A, abbiamo la possibilità di misurare le distanze tra due punti e possiamo anche trovare il cammino più corto che li unisce: tale cammino è, per definizione, il segmento. Consideriamo ora un intorno di B e prolunghiamo il segmento da AB fino a C.

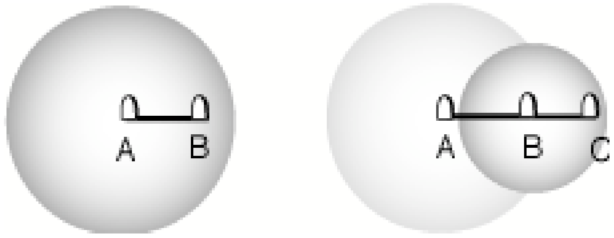

fig 5

Proseguiamo in questo modo e segniamo con una pietra miliare i punti che via via raggiungiamo.

fig 6

Supponiamo ora che, dopo aver segnato un certo numero di punti, ad esempio dopo 99 pietre miliari, ci troviamo nella situazione seguente

fig 7

Possiamo continuare ancora a mettere pietre miliari lungo la direzione che abbiamo fissato, da sinistra a destra, coerentemente con l'ipotesi che abbiamo fatto che lo spazio sia illimitato, senza bordi o barriere, ma quello che è capitato è che andando avanti troviamo una situazione che già avevamo percorso, dei punti che già avevamo segnato. La linea che abbiamo percorso è illimitata (cioè da ogni punto posso muovermi sia in avanti che indietro) ed è tuttavia di lunghezza finita. Più precisamente, se, ad esempio, la distanza tra una pietra miliare e l'altra è di 1 palmo, la linea sarà lunga 100 palmi. Questa linea è una varietà di dimensione uno compatta che possiamo rappresentarci anche (ma per questo abbiamo bisogno di una dimensione in più) come una circonferenza. La circonferenza è un modello fuorviante anche perché quello fa pensare a una varietà curva mentre la nostra linea non ha alcuna curvatura.
La considerazione di questi spazi unidimensionali, illimitati ma compatti, non è così bizzarra neppure se pensiamo a questo spazio come al tempo. Dato un qualunque istante posso immaginare un tempo futuro e un tempo passato e posso anche coerentemente pensare, come ad esempio avviene nella religione induista, che il tempo ripercorra ciclicamente gli stessi avvenimenti in maniera tale che non sia possibile distinguere un evento da un'altro a lui identico, ma accaduto in un diverso ciclo.
Tornando alla esplorazione del nostro spazio triesteso, possiamo pensare di esplorarlo lungo due direzioni indipendenti ad esempio da ovest a est e da sud a nord. Come nel caso delle "rette"

possiamo costruire, a partire dai dati locali delle piccole regioni "piane" che possiamo prolungare passando da un intorno a un'altro

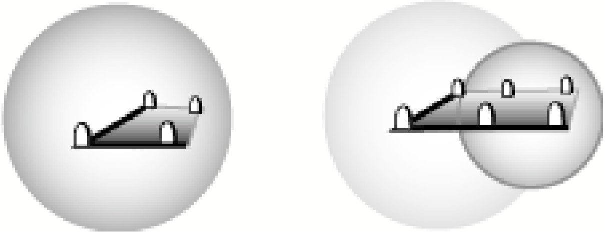

fig 8

Nei vari punti che incontriamo su questo "piano", costruito pezzetto dopo pezzetto, collochiamo delle coppie di pietre miliari su righe e colonne "parallele" , una (piccola) che fissa la fila e l'altra (grande) la posizione sulla data fila.

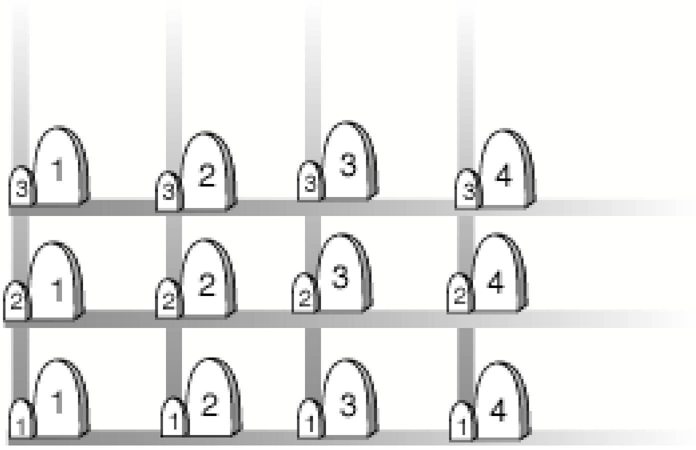

fig 9

Continuando in questo modo non è assurdo immaginare di ritrovarci in una situazione di doppia ciclicità. Immaginare cioè che le file orizzontali si presentino tutte uguali a quella che abbiamo trovato prima, ma che, dopo un certo numero di file, ad esempio 50, si ritrovi la fila dalla quale eravamo partiti. Supponiamo quindi che, andando avanti nel prolungare la nostra rete, ci si ritrovi, a un certo punto nella situazione descritta dalla figura seguente

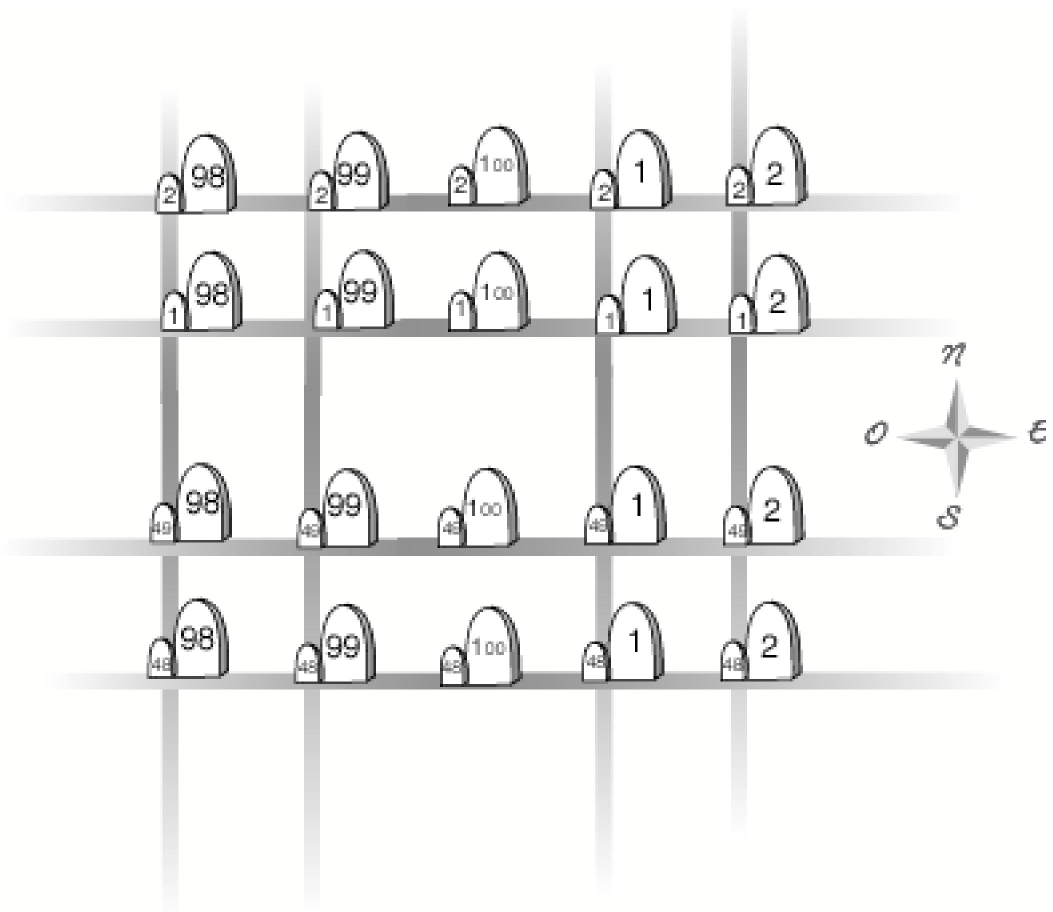

fig 10

Tutto lo schema è coerente e dà luogo a una varietà di dimensione due: un "piano" del nostro spazio, compatto e illimitato. La sua area, pur essendo il "piano" illimitato, è finita e, se supponiamo che le pietre miliari siano distanziate di un palmo una dall'altra, questa superficie avrà un'area di 5.000 palmi quadrati. Il "piano" che in questo modo abbiamo costruito ci permette di sviluppare una geometria piana, metodologicamente uguale a quella euclidea: possiamo parlare di segmenti, di angoli (che è pure una nozione locale) di cerchi, di triangoli, di altezze, mediane ecc ecc. Si possono fare teoremi e dimostrare, ad esempio che la somma degli angoli interni a un triangolo risulta essere comunque di 180 gradi. Per questo diciamo che questa superficie, questo "piano" è piatto, non ha curvatura.

Naturalmente vi sono profonde differenza con l'usuale geometria euclidea. Esiste un quadrato massimo (del quale si può calcolare l'area), le rette possono avere lunghezze finite diverse tra loro. Supponiamo ad esempio di muoverci verso nord-est

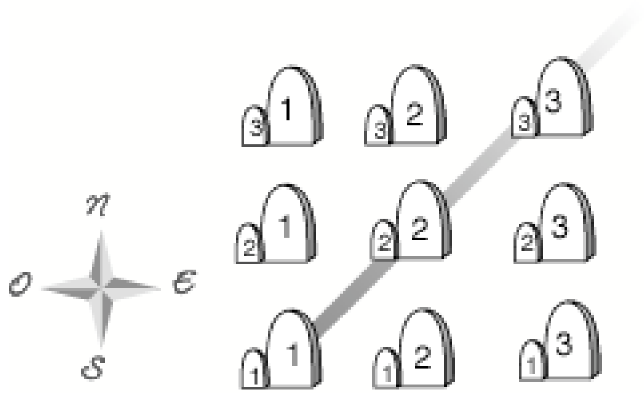

fig 11

proseguendo negli intorni successivi troviamo

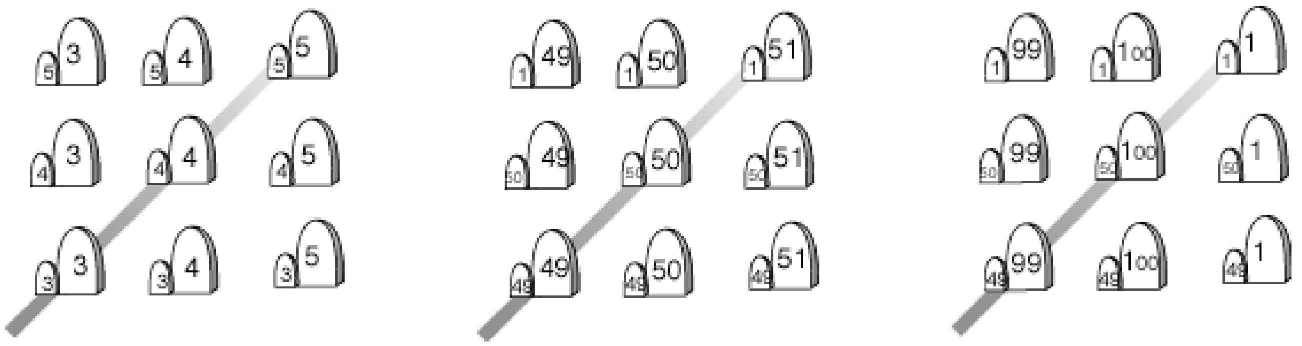

fig 12

E dopo 100 passi ritroviamo la pietra miliare dalla quale eravamo partiti. La retta è dunque lunga $100\sqrt{2}$ palmi. Ci si può chiedere se esiste una retta di lunghezza massima, o se, dato un punto A di questo piano esiste un punto A' antipodale di A e a che distanza da A si trovi.
Naturalmente ci si può anche leggitimamente chiedere se tutto questo abbia una qualche consistenza o non sia invece una fantasia arbitraria non solo in contrasto con una nostra naturale intuizione geometrica, ma anche internamente contraddittoria.
In realtà l'oggetto che abbiamo descritto tramite le nostre esplorazioni ha una sua coerenza interna e non è sicuramente più contraddittorio di quanto lo possa essere l'usuale geometria euclidea. Il suo nome è *toro piatto bidimensionale* e si indica col simbolo $S^1 \times S^1$ Questo oggetto può essere definito rigorosamente e in modo completo servendosi dei numeri reali, riducendo la sua coerenza a quella dell'aritmetica. Consideriamo un piano cartesiano ordinario i cui punti siano denotati con le coordinate (x,y) e identifichiamo lungo le rette orizzontali i punti di coordinate (x,y) , (x+100,y), (x+200,y) , (x+300,y) ... e lungo le rette verticali i punti (x,y) (x, y+50) , (x,y+100) , (x,y+150)...I punti identificati li pensiamo come un unico oggetto, una monade indivisibile, che indichiamo con uno stesso segno particolare, una stessa pietra miliare. Così, ad esempio, scriviamo

$$= \{(3,5),\ (103,5),\ (3,55), (103,55),\ \ldots\ ,\ (3+100n, 5+50m),\ \ldots\}$$

fig 13

volendo significare che in tutti i punti del piano cartesiano di coordinate (3+100n, 5+50m) comunque siano scelti gli interi n ed m, vi si trova lo stesso oggetto, la stessa pietra miliare. Una immagine che rappresenta bene questa situazione si può ottenere in una rappresentazione dove i punti della stessa classe di equivalenza non siano distinguibili tra loro in rapporto ai punti che gli sono vicini.
Il disegno seguente rappresenta una possibile "carta geografica" del nostro "piano"

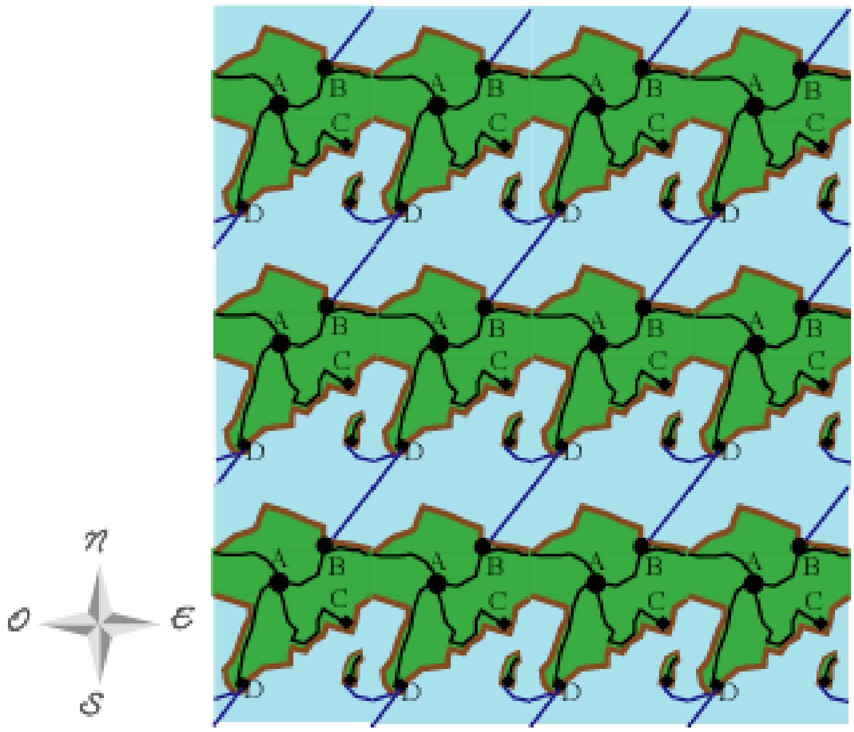

fig 14

Vi sono 4 città principali e un'isola. Per andare da A a B possiamo sia andare con la strada che va a oriente sia con quella che va a occidente (che è più lunga). Ugualmente per andare da A all'isola possiamo andare a sud direttamente a D e da lì andare all'isola o dirigerci a nord verso B andare a D con la nave e poi all'isola. Possiamo costruire un atlante per descrivere il nostro toro piatto. Se richiediamo che ogni punto del toro sia *interno* ad almeno una carta (cioè non sul bordo) e che i punti di ogni carta corrispondano *biunivocamente* ai punti di una parte del toro (cioè non vogliamo che una stessa località si trovi due volte sulla stessa carta) , allora con sole 4 carte (ma non di meno) possiamo ricoprire l'intera superficie

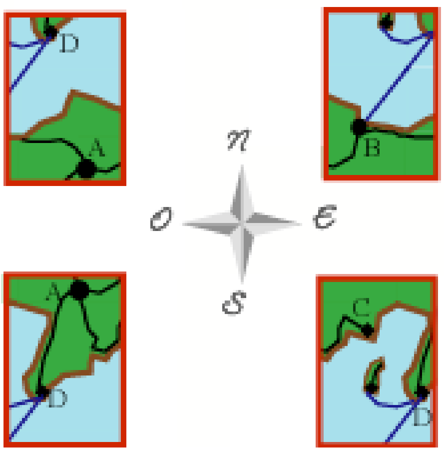

fig 15

L'aggettivo *piatto* ha ora un significato preciso, significa che, a parte un fattore di scala, le distanza misurate sulle carte, sono uguali alle distanze misurate sul toro. Questo fatto ci permette di sviluppare completamente, a partire dalle carte, la geometria intrinseca di questa superficie. Non è difficile dimostrare che la somma degli angoli interni a un triangolo è di 180 gradi, perché questo è quello che accade sulle carte , dimostrare, sempre andando a leggere le carte, che questa superficie contiene un quadrato di area massima e calcolare il valore di quest'area o dato un punto possiamo facilmente trovare il suo antipodale.

Tornando ora alla esplorazione del nostro spazio triesteso, che ovviamente contiene infiniti "piani" del tipo di quelli che abbiamo costruito precedentemente, dobbiamo considerare oltre alle due direzioni (da ovest a est, da sud a nord) anche una terza direzione indipendente, quella che va dal basso all'alto. Possiamo immaginare di muoverci verso l'alto a partire dal "piano 1" che abbiamo costruito precedentemente costruendo "un piano 2" con le sue pietre miliari un palmo più in alto e poi un piano 3 e così via .

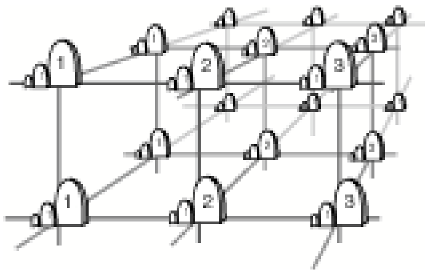

fig 16

Se i vari piani ai vari livelli si presentano uguali tra loro e se, dopo un certo numero di piani, ritroviamo il piano di partenza, allora lo spazio è un toro piatto triesteso (o di dimensione tre) e la sua descrizione è del tutto analoga alla descrizione che abbiamo fatto per il toro bidimensionale.

Un altro esempio di spazio triesteso illimitato e compatto è la ipersfera S^3. Anche questo spazio può essere esplorato col metodo precedente prolungando i dati locali. Partiamo da un punto A e scegliamo una data direzione, ad esempio, come nel caso precedente, da ovest a est. Cominciamo a segnare con delle pietre miliari i punti che via via incontriamo e supponiamo che, come nel caso precedente, dopo 100 pietre si ritrovi il punto A dal quale eravamo partiti.

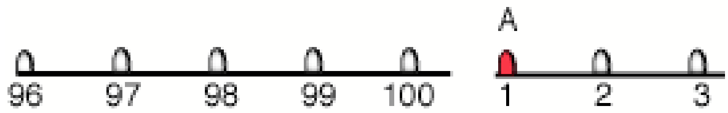

fig 17

Abbiamo ancora un andamento ciclico lungo questa "retta". La differenza col caso precedente è che ora, se ripetiamo questo procedimento lungo una qualunque altra direzione, troviamo sempre lo stesso ciclo: le "rette" sono tutte lunghe 100 palmi. Il fatto che le "rette" siano tutte uguali ci fa sperare in una maggiore regolarità, al contrario, questo spazio ci riserva le cose più strane!
Prendiamo una seconda fila più a nord di 1 palmo e cominciamo il prolungamento nella stessa direzione precedente da ovest a est:

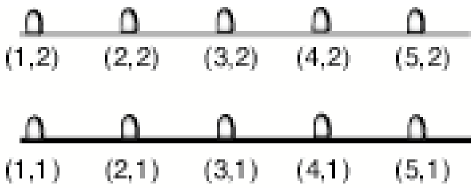

fig 18

Quello che osserviamo è il fatto che man mano che si prosegue la distanza tra i punti corrispondenti su due file diversi cioè tra i punti (n,1) ed (n, 2) diventa sempre più piccola fino a che le due "rette", esattamente dopo 25 palmi, finiscono per incontrarsi per poi riallontanarsi progressivamente. Cercando, per quanto possibile una immagine, la situazione si presenta in questo modo:

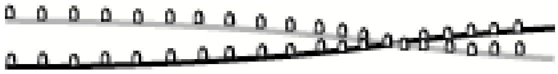

fig 19

e se continuiamo ulteriormente il prolungamento, le due "rette" si incontrano ancora, dopo 50 palmi. prima di chiudersi:

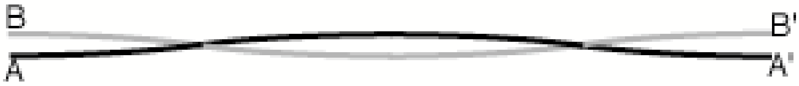

Fig 20. I punti A e B si identificano con i punti A' e B'

Anche la costruzione di una griglia a maglie quadrate risulta impossibile. Partiamo con tre "rette" nella direzione ovest-est e altre tre nella direzione sud-nord ed eseguiamo bene le misure delle lunghezze dei lati

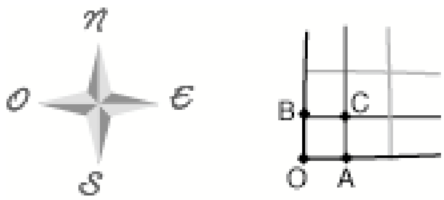

fig 21

risulta che, pur essendo OA= OB e gli angoli in O, A e B angoli retti, la figura che si forma non è un quadrato: il lato BC è più corto del lato OA e il lato AC è più corto del lato OB. La stessa situazione si ritrova nei rimanenti quadrangoli. Se prolunghiamo le 6 "rette" e cerchiamo di rappresentare globalmente la situazione, otteniamo

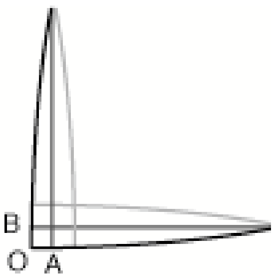

fig 22

Le tre "rette" verticali che iniziano perpendicolarmente alla retta AO finiscono per incontrarsi e ugualmente le "rette" orizzontali. Si formano vari "triangoli" con due angoli retti e il famoso V postulato di Euclide viene meno. Viene meno il fatto che la somma degli angoli interni a un triangolo vale due angoli retti. Crolla anche un'altro pilastro della geometria euclidea: il teorema di Pitagora. Nel triangolo POQ rettangolo in O (ma anche il P!)

fig 23

l'ipotenusa PQ è uguale al cateto OQ. Queste stranezze vanno attribuite al fatto che questo spazio ha una curvatura positiva. Il concetto matematico di *varietà curva*, tutt'altro che ovvio o intuitivo, trova la sua giusta collocazione nello studio della geometria dei triangoli in una varietà

riemanniana: tanto più la somma degli angoli interni di un triangolo è diversa da due angoli retti e tanto più lo spazio delimitato dal triangolo si curva.
Per capire meglio la geometria di questo strano "piano" che abbiamo ricostruito dai dati locali pezzetto per pezzetto, conviene tracciare, invece che "rette", degli archi di "cerchio". Quello che accade se ingrandiamo via via i raggi è molto strano.

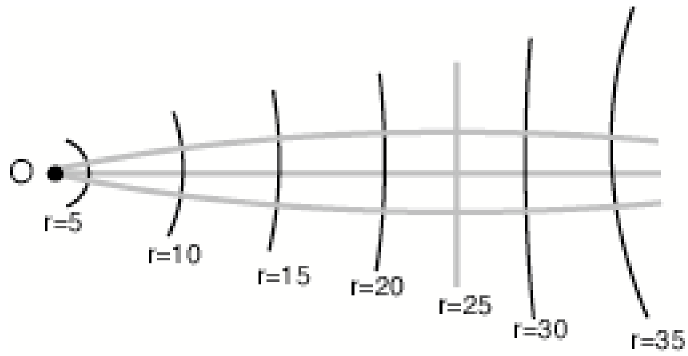

Fig 24. Le linee grigie sono "rette" quelle nere sono "cerchi" di raggio r crescente e centro in O

Il cerchio diventa sempre più grande e contemporaneamente tende a "raddrizzarsi" fino a quando il raggio arriva a 25 palmi a quel punto il cerchio diventa una "retta" come se il raggio del cerchio fosse infinito. Ma dato che non è infinito, possiamo aumentarlo ancora: accade una cosa paradossale il cerchio, pur aumentando il raggio, diventa via via più piccolo si curva sempre di più fino a diventare un punto quando il raggio arriva a 50 palmi per poi sparire. Il punto O' a cui il cerchio tende è anche il punto in cui le "rette" uscenti da O si incontrano e i cerchi con centro O e raggio *r* maggiore di 25 palmi sono anche cerchi di centro O' di raggio $r' = r - 25$ palmi secondo una geometria che potremmo rappresentarci con l'immagine seguente dove le circonferenze sono disegnate con colori sempre più leggeri man mano che i raggi aumentano.

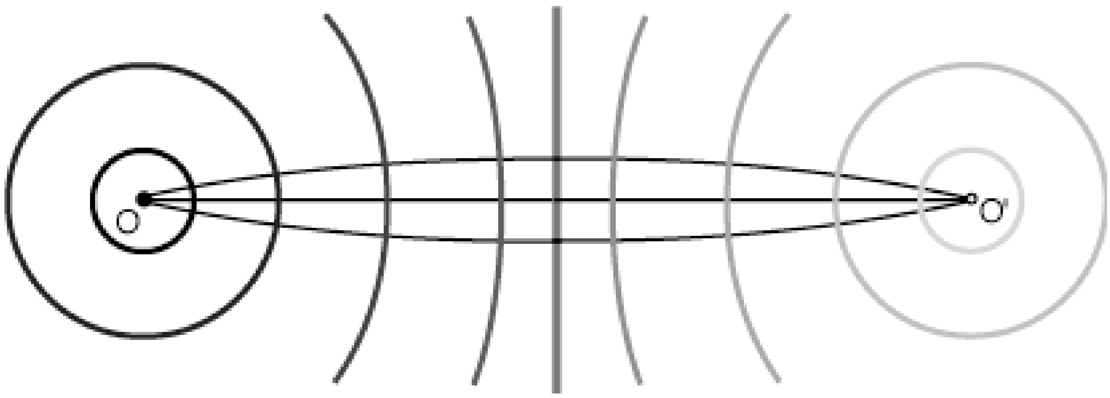

fig 25

Tutto questo è coerente? O potrebbe generare delle contraddizioni? Per rispondere a questa domanda occorre chiedere aiuto alla geometria euclidea. Se infatti riusciamo a costruire un modello euclideo che riproduca i fatti che abbiamo descritto, una contraddizione nel nostro spazio si ripercuoterebbe in una contraddizione della geometria euclidea. Un modello del nostro "piano" è facile da immaginare ricorrendo ancora alla geografia. Sappiamo bene che la terra è circa sferica e che si rappresenta con dei planisferi. Consideriamo ad esempio il bellissimo planisfero del XVII secolo

In questo planisfero sono rappresentati i meridiani che sono "rette" perpendicolari all' equatore, che è pure una "retta". Il cartografo ha anche disegnato due emisferi centrati nei due poli e l'eclittica che è una "retta" inclinata di circa 23° gradi sull'equatore. Se immaginiamo di disegnare dei cerchi con centro nel polo nord e raggio via via crescente, questi cerchi diventano sempre più grandi fino ad arrivare all'equatore ma poi, aumentando ancora la distanza dal polo nord, i cerchi diventano sempre più piccoli man mano che il raggio aumenta, esattamente come nel nostro "piano".
La ricostruzione dell'esatta geometria della sfera a partire dalla sua rappresentazione sulla mappa non riesce così agevole come per il toro piatto. In ogni caso il "piano" che abbiamo descritto corrisponde a una superficie sferica nella quale le "rette" sono i cerchi massimi (quelli cioè che hanno il raggio uguale a quello della sfera) , i segmenti sono archi di cerchio massimo e gli angoli tra due "rette" sono gli angoli diedri tra i piani dei due cerchi massimi. Una contraddizione all'interno del nostro "piano" darebbe luogo a una contraddizione nella geometria euclidea della sfera.

Legittimati nel nostro percorso e nella sua non contradittorietà, continuiamo l'esplorazione di S^3 nella sua tridimensionalità. Invece che descrivere lo spazio con fette piane una sull'altra come abbiamo fatto nel caso del toro piatto è meglio descriverlo con "coordinate polari". Consideriamo cioè delle sfere concentriche di raggio via via più grande. Non è difficile immaginare cosa accade:

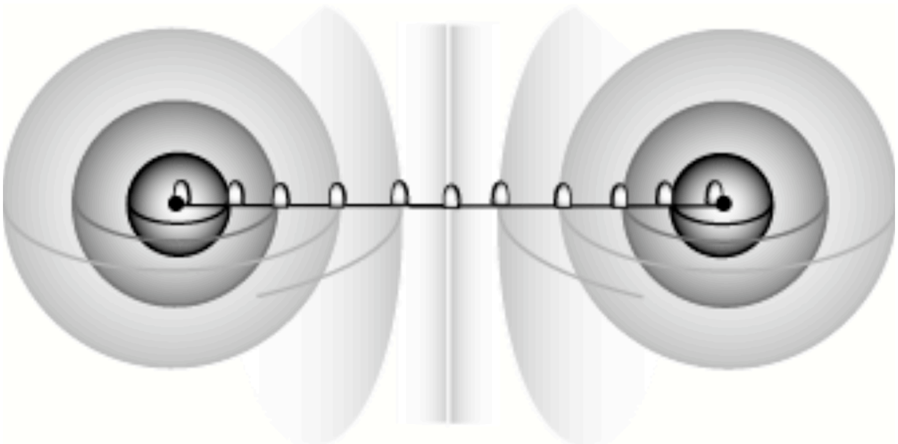

Fig 26. La figura rappresenta delle sfere concentriche di raggi crescenti

Le sfere aumentano di volume fino a raggiungere un massimo, quando il raggio è di 25 palmi e la sfera corrispondente è un "piano" , continuando poi ad aumentare il raggio le sfere diminuiscono di volume fino a annullarsi in un punto quando il raggio è di 50 palmi.
Anche questo oggetto tridimensionale che abbiamo descritto attraverso questa esplorazione mentale ha effettivamente una sua coerenza geometrica che rimanda la sua non contradittorietà alla non contradditorietà dell'algebra. Il nome di questa varietà è *ipersfera* e si denota, come abbiamo detto, col simbolo S^3. Si tratta di una varietà di dimensione tre, illimitata, orientabile, compatta (ha un volume finito) di curvatura costante positiva. Una sua descrizione precisa può essere data usando l'iperspazio $\mathbf{R}^4$ delle quaterne ordinate di numeri reali che ha una struttura naturale di spazio metrico. La nostra sfera è il sottoinsieme di $\mathbf{R}^4$ formato dalle quaterne (x,y,z,v) che verificano l'equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = r^2$$

la famiglia di sfere concentriche che abbiamo usato prima per descrivere lo spazio sono le sfere ottenute dando alla grandezza v, la quarta coordinata spaziale, diversi valori da -r fino ad r.

E' interessante notare come secondo una interpretazione recente del fisico americano Peterson [8], l'universo dantesco sarebbe questo S^3 : una varietà illimitata e compatta dunque che Dante descrive attraverso il suo viaggio nel Paradiso, in modo non sostanzialmente dissimile da come abbiamo fatto noi. Dante passa di sfera in sfera, dalla Luna a Mercurio a Venere, fino all'ultima sfera: il primo mobile.

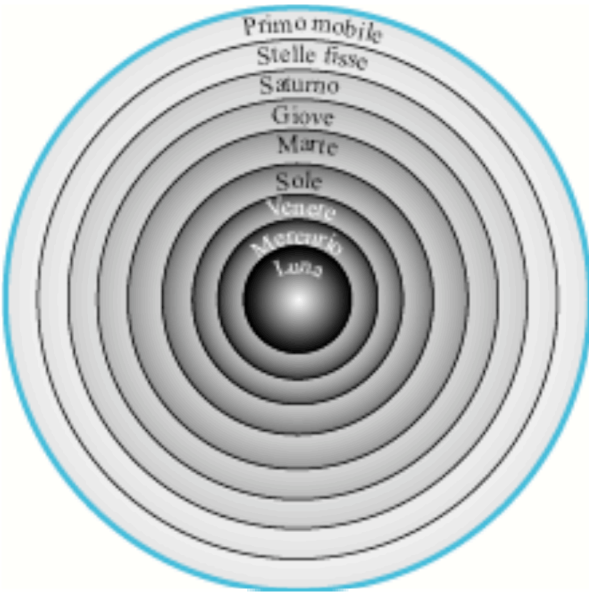

fig 27

Ma quando arriva ai limiti estremi dell'universo, così come era immaginato nella tradizione aristotelica-medioevale, quando arriva sul primo mobile, Dante vede altre 9 sfere via via più piccole e più luminose che rappresentano i cerchi angelici fino all'ultima che si riduce a un punto luminosissimo.

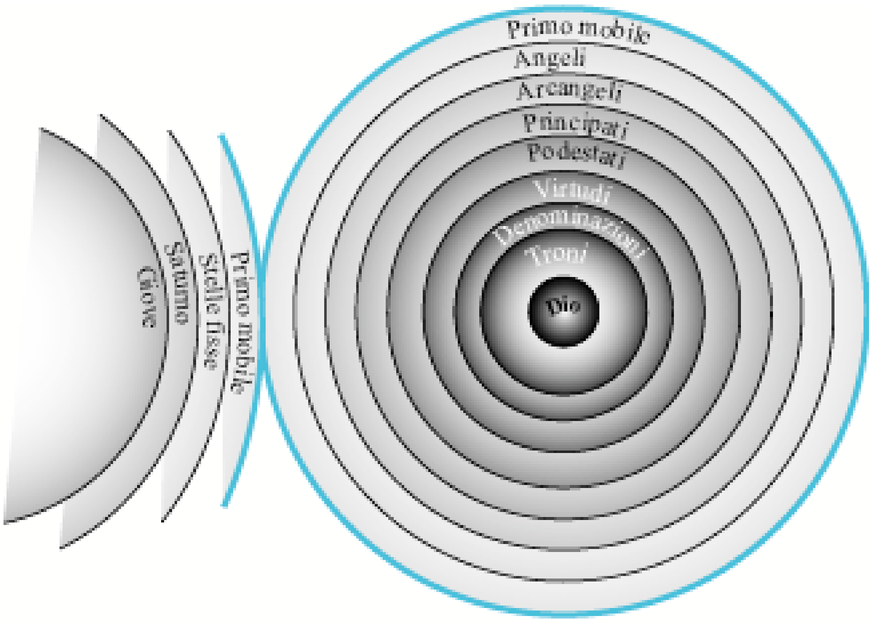

fig 28

Queste sfere corrispondono a una virtù sempre più grande, ma diversamente da quello che Dante si aspetta, pur abbracciando maggior virtù diventano sempre più piccole. Dante non comprende e chiede spiegazioni a Beatrice che in questo modo [9] descrive questa visione:

Li cerchi corporai sono ampi e arti
secondo il più e 'l men de la virtute
che si distende per tutte lor parti.

Maggior bontà vuol far maggior salute;
maggior salute maggior corpo cape,
s'elli ha le parti igualmente compiute.

Dunque costui che tutto quanto rape
l'altro universo seco, corrisponde
al cerchio che più ama e che più sape:

per che, se tu a la virtù circonde
la tua misura, non a la parvenza
de le sustanze che t'appaion tonde,

tu vederai mirabil consequenza
di maggio a più e di minore a meno,
in ciascun cielo, a sua intelligenza».

Lo spazio che immagina Dante concilia quello che pareva inconciliabile: uno spazio compatto, finito, come quello aristotelico, ma illimitato. Se il poeta avesse immaginato in uno spazio infinito una seconda gerarchia di sfere, oltre il primo mobile sempre più grandi corrispondenti a una crescente virtù divina, arrivando in ultimo al massimo, cioè alla sfera corrispondente a Dio, si sarebbe potuto immaginare sfere ancora più grandi, sfere più grandi di Dio difficilmente interpretabili da un punto di vista teologico. Nè facilmente poteva il poeta descrivere la visione di una sfera di raggio infinito che corrispondesse a questo massimo divino. Il fatto invece che, aumentando la virtù le sfere si ingrandiscano fino ad arrivare a un massimo, il primo mobile *che tutto quanto rape*, per poi aumentando ancora la virtù, ridursi gradualmente fino ad un punto, permette una rappresentazione visiva e poi poetica di Dio in questo punto. Il punto che, come l'infinito, ha una diversa ontologia rispetto alle sfere, permette, per inversione, la rappresentazione del tutto: lo spazio è finito ma contiene Dio che finito non è! L'inversione geometrica che l'ipersfera realizza al crescere del parametro v (la virtù) permette al poeta di contrapporre il "terreno" al "divino" dove accade questo mirabile fenomeno: che l'apparenza delle sostanze tonde non corrisponde alla misura della virtù che le circonda ma più virtù corrisponde a più piccolo e meno virtù a meno piccolo. L' ipersfera si presta bene per questa metafora dove "terreno" e "divino" sono rappresentati in un unico oggetto, così concreto da poter essere "visto" e quindi descritto. Dante sembra averne intuito la natura geometrica, cosa della quale è particolarmente fiero. E' con una bella metafora infatti che il poeta paragona la forza chiarificatrice di questo modello: come la Bora che all'improvviso pulisce l'aria e tutto diventa

.... *splendido e sereno*
....
e come stella in cielo il ver si vide.

Forse, come molti nostri allievi ci dicono: "Ho capito ma non so dirlo", così Dante, in assenza di un linguaggio scientifico, ha tentato di esprimere questa sua straordinaria intuizione geometrica nel linguaggio della poesia che non richiede, come quell'altro, chiarezza e precisione. Le interpretazioni dei commentatori di questo difficile canto del Paradiso (il ventottesimo) non sono univoche e in ogni caso nessuno si riferisce ad un ipersfera a riprova del fatto che la descrizione poetica non è sufficiente per presentare un oggetto non banale della matematica. Le rappresentazioni iconografiche tentano di interpretare invece, con immagini locali, ciò che Dante racconta. Molto bella è la miniatura del Dante Urbinate, un manoscritto della fine del '300, che rappresenta Dante e Beatrice sospesi sul primo mobile che si affacciano sui cieli angelici

E' forse questo il primo tentativo di descrivere con una immagine il paesaggio che si osserva quando, arrivati all'equatore di una ipersfera, ci si affacci sull'altra metà: il primo cerchio angelico è sfumato come a indicare una continuità col primo mobile che nel modello è un "piano".

Per concludere questa breve esplorazione nel mondo delle varietà triestese possiamo dire che una varietà riemanniana triestesa e illimitata è uno spazio nel quale ogni punto ha un intorno sferico dove sia possibile misurare le distanze tra due punti in modo del tutto analogo a quello che accade nello spazio che percepiamo intorno a noi. Una varietà di questo tipo è *compatta* se ogni insieme infinito di punti si accumula intorno a un qualche punto della varietà. Esistono diversi esempi di varietà triestese illimitate e compatte come quelle che abbiamo descritto in questo lavoro: tali varietà hanno volume finito e possono rappresentarsi con un insieme finito di "carte" in modo che ogni punto dello spazio sia rappresentato da un punto interno ad almeno una carta e ogni carta rappresenti biunivocamente una parte dello spazio. Ogni rete che ricopra la varietà compatta avrà necessariamente un numero finito di nodi, di spigoli, di facce e di cubi i cui valori numerici forniscono importantissimi indizi (di natura topologica) sulla forma globale della varietà. Le varietà non compatte invece possiedono successioni di punti divergenti, hanno un volume infinito e sono molto più difficili da studiare. Queste varietà che il pensiero matematico ha individuato e descritto sono uno strumento fondamentale per una interpretazione geometrica del mondo sia nell'infinitamente grande che nell'infinitamente piccolo. Là dove infatti l'esperienza non può arrivare solo il pensiero astratto ci può venire in aiuto fornendoci dei modelli coerenti coi quali sia possibile formulare ipotesi e descrizioni sempre più accurate del mondo. Ma forse, a voler essere onesti, non è tanto la voglia di descrivere il mondo attraverso i nostri schemi geometrici che ci stimola in queste ricerche quanto l' ardimento intellettuale che ci spinge ad indagare ciò che pareva fuori dalla nostra portata come le possibili forme dell'infinito e che si accompagna a quel piacere intenso che si prova quando viene alla luce una nuova forma coerente.

Bibliografia

[1] B. Riemann(1994) Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria, Bollati Boringhieri, Torino

[2] Euclide (1970) Gli elementi, UTET, Torino

[3] A. Einstein (1960) Relatività, Boringhieri, Torino

[4] G. Bruno (1980) De l'infinito universo e mondi, in Opere Latine, UTET, Torino

[5] J. Needham (1985) Scienza e civiltà in Cina, vol. III, Giulio Enaudi Editore, Torino

[6] Aristotele (1973) Opere, Vol. III, Fisica, Del cielo, Editori Laterza, Bari

[7] M.C.Escher (1978) *Passi verso l'infinito* da *Il mondo do Escher* Garzanti, Milano, pp.38

[8] M. A. Peterson (1979) Dante and the 3-sphere, Am. J. Phys. 47 (12), pp. 1031-1035

[9] Dante (1985) La Divina Commedia, Mondadori, Milano, pp. 811