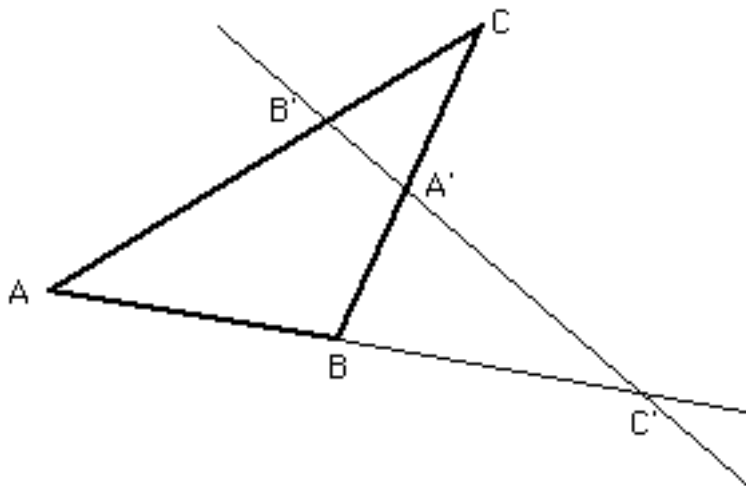


TEOREMA DI MENELAO PIANO

Tre punti C' , A' , B' sui lati AB , BC , CA di un triangolo A , B , C , distinti dai vertici, sono allineati se e solo se

$$(A,B,C') (B,C,A') (C,A,B') = 1.$$



Diamo una prima dimostrazione del teorema servendoci dell'algebra dei vettori.

Cominciamo con l'osservare che se tre punti distinti A , B , C sono allineati, allora, dalla definizione, il loro rapporto semplice (A,B,C) è quello scalare r che esprime il vettore $\overrightarrow{AC}$ come dipendente da $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AC} = r \overrightarrow{BC}$$

Dalla definizione precedente si ricavano anche le relazioni

$$\overrightarrow{AC} = \frac{r}{r-1} \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{r-1} \overrightarrow{AB}$$

Infatti risulta che:

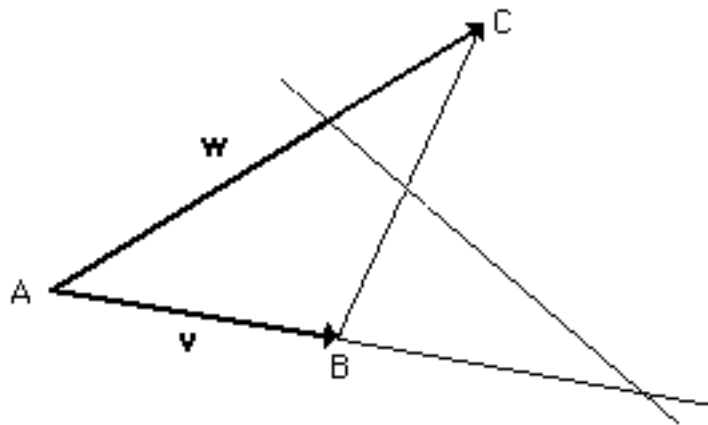
$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AB} + \frac{1}{r} \vec{AC}$$

$$\left(1 - \frac{1}{r}\right) \vec{AC} = \vec{AB}$$

Dati arbitrariamente i punti A' , B' , C' sui lati del triangolo, indichiamo i rapporti semplici con a, b, c rispettivamente:

$$(A,B,C') = c, \quad (B,C,A') = a, \quad (C,A,B') = b.$$

vettori $\vec{AB} = \mathbf{v}$ e $\vec{AC} = \mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti essendo A, B, C un triangolo e possono quindi essere scelti per esprimere ogni altro vettore come loro combinazione lineare.



Tenendo conto delle relazioni precedenti, troviamo:

$$\vec{B'C'} = \vec{B'A} + \vec{AC'}$$

$$\vec{B'A} = -\frac{1}{b-1} \vec{CA} = \frac{1}{b-1} \mathbf{w}$$

$$\vec{AC'} = \frac{c}{c-1} \vec{AB} = \frac{c}{c-1} \mathbf{v}$$

e quindi

$$\vec{B'C'} = \frac{c}{c-1} \mathbf{v} + \frac{1}{b-1} \mathbf{w}$$

Con calcoli analoghi si trova

$$\vec{A'C'} = \vec{A'B} + \vec{BC'}$$

da cui

$$\vec{A'C'} = \left(\frac{a}{a-1} + \frac{1}{c-1} \right) \mathbf{v} - \frac{a}{a-1} \mathbf{w}$$

Ora i tre punti A' , B' , C' sono allineati se e solo se i vettori * e * sono linearmente dipendenti e ciò avviene se e solo se si

annulla il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{c}{c-1} & \frac{1}{b-1} \\ \frac{a}{a-1} + \frac{1}{c-1} & -\frac{a}{a-1} \end{vmatrix} = \frac{1 - a b c}{(a-1)(b-1)(c-1)}$$

Una seconda dimostrazione del teorema di Menelao può essere ottenuta col metodo dell' coordinate. Fissiamo nel piano del triangolo A, B, C un sistema di riferimento affine che abbia l'origine in A e come vettori base, i vettori linearmente indipendenti $\vec{AB} = \mathbf{v}$ e $\vec{AC} = \mathbf{w}$. In questo sistema di riferimento il punto B avrà le coordinate (1,0), il punto C (0,1) e la retta BC avrà equazione

$$x + y = 1.$$

Se $(A,B,C') = c$, $(B,C,A') = a$, $(C,A,B') = b$ sono i rapporti semplici che intervengono nell'enunciato del teorema, i punti A' , B' , C' avranno le coordinate:

$$A' = \left(-\frac{1}{a-1}, \frac{a}{a-1} \right)$$

$$B' = \left(0, -\frac{1}{b-1} \right)$$

$$C' = \left(\frac{c}{c-1}, 0 \right)$$

e la condizione che i tre punti siano allineati è equivalente all'annullarsi del determinante seguente:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{a-1} & \frac{a}{a-1} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{b-1} & 1 \\ \frac{c}{c-1} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1 - abc}{(a-1)(b-1)(c-1)}$$

Una terza prova del teorema di Menelao può essere ottenuta per via sintetica utilizzando la proporzionalità dei lati corrispondenti in due triangoli simili che deriva, a sua volta, dal teorema di Talete. Esplicitando i rapporti semplici che intervengono nell'enunciato e riferendosi alla figura precedente per l'attribuzione dei segni da dare alle lunghezze dei segmenti in gioco, la relazione

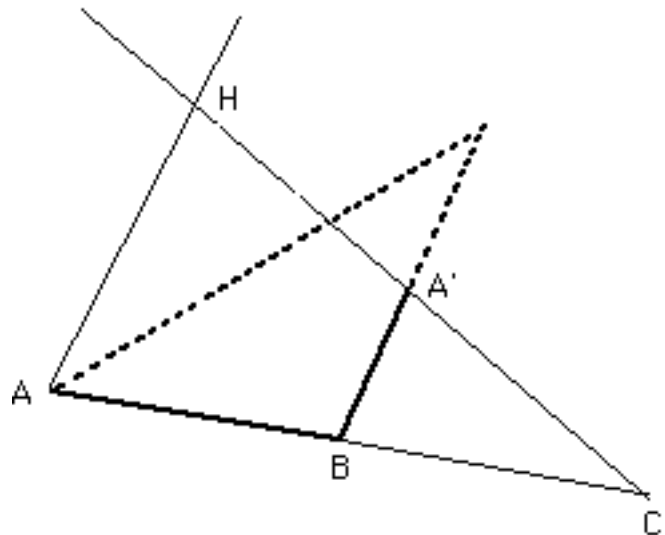
$$(A,B,C') (B,C,A') (C,A,B') = 1$$

è equivalente alla

$$\frac{BA'}{CA'} \frac{CB'}{AB'} = \frac{BC'}{AC'}$$

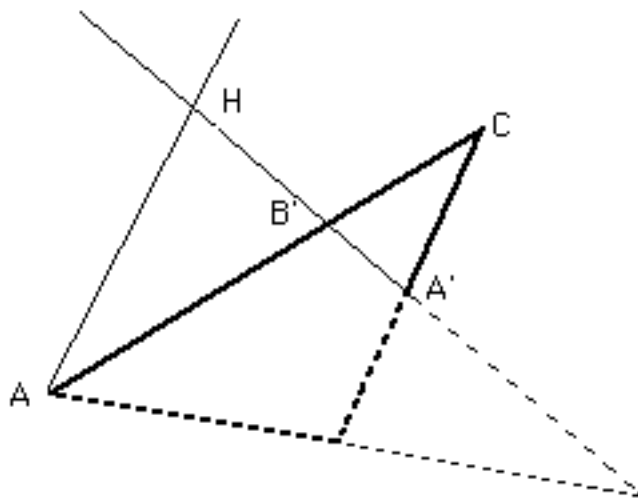
Tracciamo la retta parallela al lato BC e passante per il punto A e sia H l'intersezione di tale retta con la retta B' C'. Considerando i triangoli simili AC'H e BC'A' otteniamo:

$$\frac{BC'}{AC'} = \frac{BA'}{AH}$$



D'altra parte, considerando i triangoli simili HAB' e A'CB' , otteniamo:

$$\frac{AH}{CA'} = \frac{AB'}{CB'}$$



Eliminando AH dalle uguaglianze di rapporti precedenti, otteniamo il risultato voluto.

L'implicazione diretta del teorema di Menelao può anche ottenersi facilmente con l'uso delle seguente elegante formula.

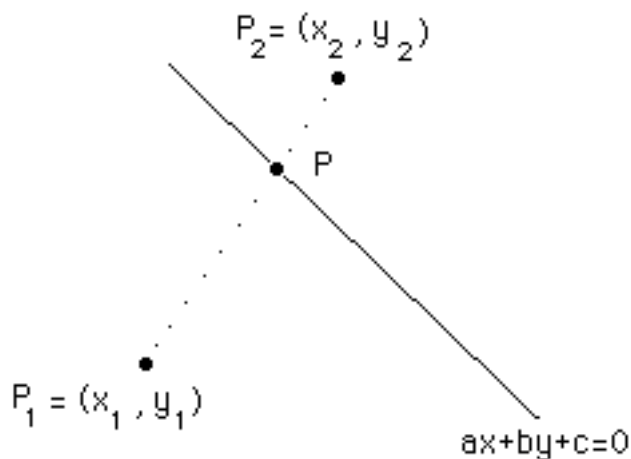
Formula.

Note, in un fissato sistema di riferimento, le coordinate di due punti distinti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ e l'equazione cartesiana di una retta r non passante per P_2

$$r : ax+by+c=0,$$

detto P il punto d'intersezione (che supponiamo esista) della retta r con quella che congiunge P_1 con P_2 , allora il rapporto semplice (P_1, P_2, P) risulta espresso dalla semplice formula:

$$(P_1, P_2, P) = \frac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c}$$



Le equazioni parametriche della retta s che congiunge P_1 con P_2 , possiamo scriverle nella forma:

$$\begin{aligned} x &= x_2 + l t \\ y &= y_2 + m t \end{aligned}$$

Il punto P , comune ad r ed s , sarà quindi ottenuto per quel valore del parametro t per il quale risulti:

$$a x_2 + b y_2 + c + t (a l + b m) = 0.$$

Essendo la quantità $a x_2 + b y_2 + c$ non nulla per ipotesi, dovrà essere anche $(a l + b m)$ non nulla poichè, altrimenti, l'equazione precedente non avrebbe soluzioni in t e allora le rette sarebbero parallele. Nelle nostre ipotesi, dunque, il valore del parametro corrispondente al punto P di s sarà dato da:

$$t = - \frac{ax_2 + by_2 + c}{a l + b m}$$

e quindi l'ascissa x_P del punto P sarà :

$$x_P = x_2 - \frac{1}{a l + b m} (ax_2 + by_2 + c)$$

Scrivendo ora le equazioni parametriche della retta s nella forma

$$\begin{aligned} x &= x_1 + l t \\ y &= y_1 + m t \end{aligned}$$

con lo stesso calcolo possiamo esprimere l'ascissa x_P in quest'altra maniera:

$$x_P = x_1 - \frac{1}{a l + b m} (ax_1 + by_1 + c)$$

Calcolando il rapporto semplice otteniamo:

$$(P_1, P_2, P) = \frac{x_P - x_1}{x_P - x_2} = \frac{- \frac{1}{a l + b m} (ax_1 + by_1 + c)}{- \frac{1}{a l + b m} (ax_2 + by_2 + c)}$$

Qualora fosse risultato $x_P - x_2 = 0$ si sarebbe ottenuto lo stesso risultato lavorando con le ordinate invece che con le ascisse.

Da questa formula possiamo ricavare immediatamente una implicazione del teorema di Menelao. Fissato infatti un qualunque sistema di riferimento, se i punti A' , B' , C' si trovano sulla trasversale r di equazione

$$f(x,y) = a x + b y + c = 0,$$

possiamo calcolare i rapporti semplici con la formula precedente e, facendo il prodotto, troviamo:

$$(A,B,C') (B,C,A') (C,A,B') = \frac{f(A)}{f(B)} \frac{f(B)}{f(C)} \frac{f(C)}{f(A)} = 1.$$

