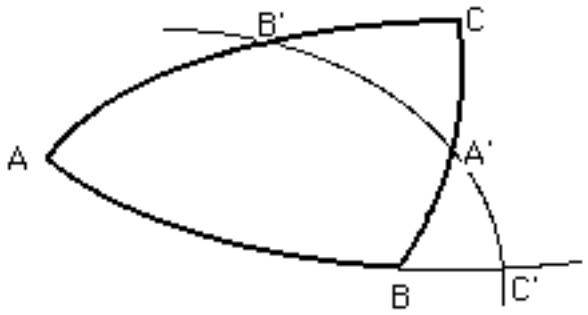
Dimostrazioni di geometria sferica
Il teorema di Menelao

Di Menelao, vissuto nel primo secolo dopo Cristo ad Alessandria , ci è rimasta, nella traduzione araba, l'opera "Sphaerica" in tre libri dove è sviluppata in modo sistematico la geometria interinseca della sfera. Menelao, che ha in mente l'idea di applicare questi studi geometrici all'astronomia, immagina un triangolo sferico come un triangolo i cui vertici siano sulla superficie della sfera e i cui lati siano dei cerchi massimi. I cerchi massimi sono quelli che si ottengono intersecando la sfera con un pino passante per il suo centro. Tali cerchi massimi sono le linee che sulla sfera giocano il ruolo che le linee rette giocano nella geometria del piano. Esse hanno la proprietà di essere, tra tutte le linee che congiungono due punti A e B della sfera e che giaciono sulla superficie della sfera, quelle di lunghezza minima, di essere cioè, come oggi si dice, delle linee "geodetiche". Se immaginiamo di trovarci nel centro della sfera e di vedere la sua superficie dall'interno, come fosse la grande volta celeste e se immaginiamo le stelle, che su quella volta si proiettano, come i punti della nostra sfera è molto naturale pensare che tre stelle sono allineate se si trovano su uno stesso piano che, a partire dal nostro occhio, le contenga tutte.

Il primo libro dell'opera di Menelao "Sphaerica" contiene moltissimi risultati sui triangoli sferici e in generale sulla geometria della sfera e rappresenta, senza dubbio, il primo tentativo di formulare, sulla falsariga dei teoremi euclidei, una geometria a due dimensioni su uno spazio curvo i cui punti siano quelli di una superficie e le cui rette le linee geodetiche di quella superficie. Tale teoria sarà sviluppata completamente e in tutta generalità solo all'inizio del XIX secolo da Gauss.

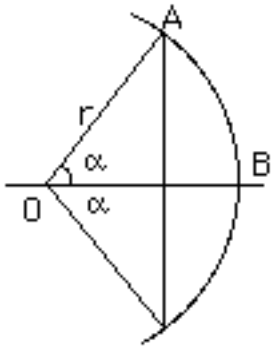
Nel secondo libro i risultati precedenti vengono applicati all'astronomia, alla descrizione della volta celeste e del movimento apparente delle stelle. Il terzo libro sviluppa la "trigonometria sferica", fornisce cioè delle formule che permettono, noti alcuni elementi di un triangolo (lunghezze dei lati e ampiezza degli angoli), di calcolarne i rimanenti. Queste formule sono molto simili a quelle relative ai triangoli piani (le così dette "formule risolutive") e si deducono a partire dal teorema I del terzo libro che è essenzialmente la versione sferica di quello che oggi si chiama il teorema di Menelao. Tale teorema I afferma che se un triangolo sferico A, B, C è tagliato da una "retta" (cerchio massimo) nei punti A', B', C'



allora sussiste la relazione seguente:

$$\frac{\text{corda}(2\,\widehat{BA'})}{\text{corda}(2\,\widehat{CA'})}\,\frac{\text{corda}(2\,\widehat{CB'})}{\text{corda}(2\,\widehat{AB'})} = \frac{\text{corda}(2\,\widehat{BC'})}{\text{corda}(2\,\widehat{AC'})}$$

dove, se A e B sono due punti della sfera, corda(2AB) denota la lunghezza della corda sottesa dal doppio arco AB.



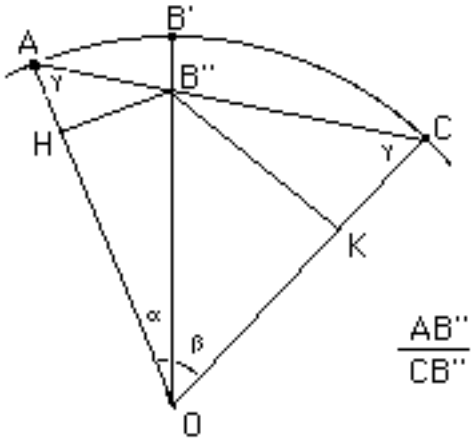
$$\widehat{AB} = r\,\alpha$$

$$\text{corda}(2\,\widehat{AB}) = 2r\,\text{sen}(\alpha)$$

La relazione precedente, tenendo conto della definizione del seno di un angolo diventa:

$$\frac{\text{sen}(BA')}{\text{sen}(CA')}\,\frac{\text{sen}(CB')}{\text{sen}(AB')}\,\frac{\text{sen}(AC')}{\text{sen}(BC')} = 1$$

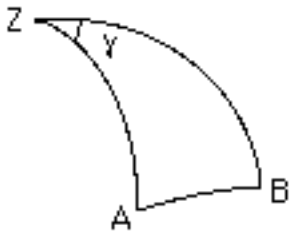
dove, se A e B sono due punti di una sfera, con sen(AB) denotiamo il seno dell'angolo formato dalle due semirette che uniscono il centro della sfera coi punti A e B. La dimostrazione che fornisce Menelao per questo fondamentale teorema di geometria sferica, si basa sull'analogo teorema piano che Menelao cita come ben noto. Questo ha fatto pensare che tale risultato fosse conosciuto ben prima di Menelao e forse già ad Euclide. Il metodo per ridursi a questo caso consiste nel considerare il piano α passante per i tre vertici A, B , C del triangolo sferico. Le semirette OA', OB', OC' tutte contenute in un piano β, intersecano i lati del triangolo piano nei punti A'', B'', C'' rispettivamente i quali sono allineati poichè appartengono tutti all'intersezione di α con β. E' facile ora convincersi che



$$\frac{AB''}{CB''} = \frac{HB''}{KB''} = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\beta)} = \frac{\text{sen}(\widehat{AB'})}{\text{sen}(\widehat{CB'})}$$

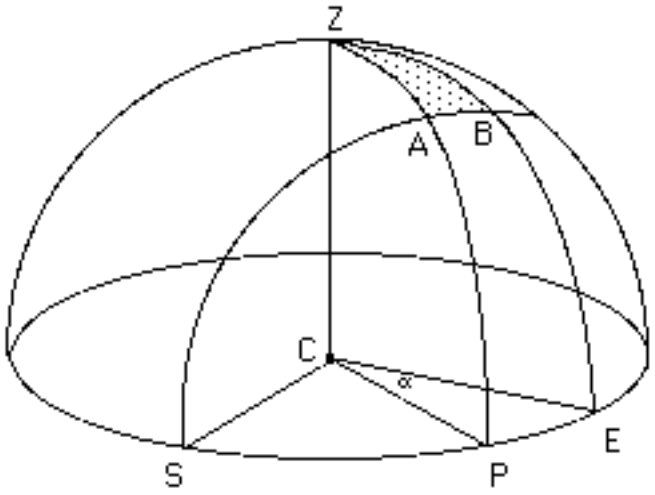
e allora, applicando il teorema piano per il triangolo A, B, C tagliato dalla trasversale $\alpha \cap \beta$ nei punti A"", B'', C'' si ha il risultato voluto.

Da questo teorema è facile ricavare le formule di base per la trigonometria sferica. Se, ad esempio, consideriamo un triangolo sferico A, B, Z, rettangolo in B, detto γ l'angolo tra il cateo BZ e l'ipotenusa AZ, abbiamo la seguente relazione:



$$\text{sen}(\widehat{AB}) = \text{sen}(\widehat{ZA})\ \text{sen}(\gamma)$$

Per ottenerla pensiamo al punto Z come allo zenit della sfera celeste, e prolunghiamo i lati ZB, ZA, BA del triangolo fino ad incontrare la linea dell'orizzonte nei punti E , P e S rispettivamente. Gli archi ZE, ZP sono, per costruzione, un quarto di cerchio massimo; inoltre, essendo l'angolo in B rettangolo, gli archi BS e ES partono perpendicolarmente al cerchio massimo ZE e pertanto misurano anch'essi un quarto di cerchio.



$$\widehat{SB} = \widehat{SE} = \widehat{PZ} = \widehat{EZ} = \frac{\pi}{2}$$

Applicando ora il Teorema di Menelao al triangolo sferico ASP tagliato dalla trasversale ZBE otteniamo

$$\frac{\text{sen}(\widehat{AB})}{\text{sen}(\widehat{SB})}\ \frac{\text{sen}(\widehat{SE})}{\text{sen}(\widehat{PE})}\ \frac{\text{sen}(\widehat{PZ})}{\text{sen}(\widehat{AZ})} = 1$$

che fornisce la relazione voluta.

Notiamo che le formule di geometria sferica sembrano ottenersi da

quelle analoghe della geometria piana sostituendo le lunghezze dei segmenti coi seni trigonometrici degli angoli corrispondenti. La cosa viene confermata per il "teorema dei seni", che fornisce, per un qualunque triangolo sferico le analoghe relazioni

$$\frac{\operatorname{sen}(\widehat{AB})}{\operatorname{sen}(\gamma)} = \frac{\operatorname{sen}(\widehat{BC})}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{\operatorname{sen}(\widehat{CA})}{\operatorname{sen}(\beta)}$$

La prova di questo teorema si ottiene, come nel caso piano, tracciando le altezze e usando la relazione precedente applicata ai triangoli rettangoli che in quel modo vengono generati.

La funzione seno che, come si vede, gioca un ruolo importante nella geometria sferica è stata in realtà introdotta molto dopo Menelao e sulla base di vari errori e passaggi di traduzione. Pare, intanto, che dopo la distruzione di Alessandria ad opera degli arabi, uno scienziato di quella città di nome Paolo, sia riuscito ad emigrare in India portando con se l'ALMAGEST di Tolomeo dove erano sistematicamente sviluppati questi teoremi di Menelao e altre cose ancora, sulla geometria sferica. L'opera fu tradotta dagli astronomi indiani e molto rimaneggiata per renderla simile alle epopee poetiche e venne alla luce in versi col titolo di SIDDHANTA. Secondo alcuni è in quella versione poetica che, richiamando l'immagine dell'arco e delle frecce, nascono i termini oggi di uso comune, quali appunto "arco", "corda" riferiti alla geometria delle circonferenze. In particolare la parola sanscrita "jiva" significa "corda di un arco". Tuttavia le formule che derivano dal teorema di Menelao stabiliscono delle relazioni non tanto tra le corde di un arco quanto, piuttosto, tra le semi-corde del doppio arco, cioè tra ciò che oggi chiamiamo seno dell'arco. Poichè quindi questa espressione "semi-corda del doppio arco" interveniva sovente nelle principali regole, fu coniato il termine abbreviato "jya" al posto della frase "ardha jiva". Quando gli arabi intrappresero la traduzione dal sanscrito del Siddhanta" non riuscirono a trovare nei loro vocabolari, nessuna parola che significasse "jha" e così tradussero in arabo quella parola con la parola "jaib" che aveva un suono simile e un ben preciso significato nella lingua araba: "jaib", infatti significa "cavità, tasca". Quando, infine, l'opera di Tolomeo venne

tradotta da quella versione araba al latino, la parola "jaib" veniva ad assumere un ben preciso significato e fu tradotta col termine latino "sinus" che appunto vuol dire "cavità".