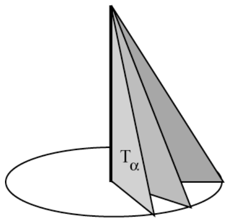
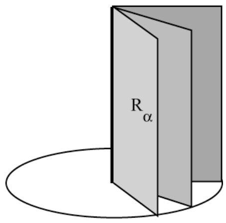
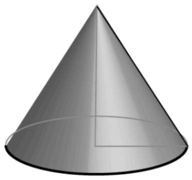
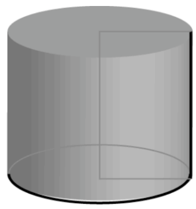
I crucci di Cavalieri e il solido iperbolico di Torricelli

Un cono si ottiene ruotando un triangolo rettangolo attorno a un cateto e risulta quindi formato da infiniti triangoli rettangoli T_α, uno per ogni angolo α. Se raddoppiamo il triangolo rettangolo fino a ottenere un rettangolo e se ruotiamo nello stesso modo il rettangolo, abbiamo un cilindro che risulta formato da infiniti rettangoli R_α, uno per ogni angolo α e ognuno con una estensione doppia rispetto a quella del triangolo.





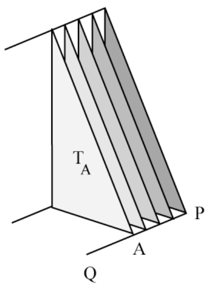
Dato che il cilindro è fatto dalla stessa infinità di parti del cono e dato che ogni parte R_α ha estensione doppia della corrispondente parte T_α, ci si aspetterebbe che l'estensione del cilindro, cioè il suo volume sia il doppio di quello del cono. Risulta invece che il volume del cilindro è tre volte quello del cono!

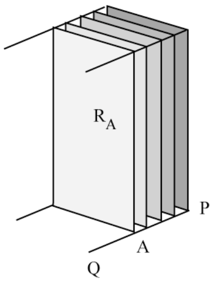
Ancora una difficoltà a estendere ragionamenti che vengono bene su insiemi finiti a insiemi infiniti. Se una figura è fatta da un numero finito di pezzi e una seconda figura è fatta con lo *stesso numero* di pezzi e se ognuno di questi ha estensione doppia di ognuno dell'altra allora questa seconda figura ha una estensione complessiva doppia della prima. Semplicemente perché vale la proprietà distributiva:

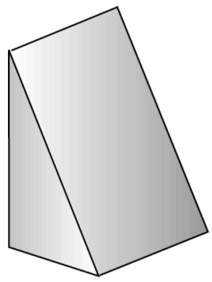
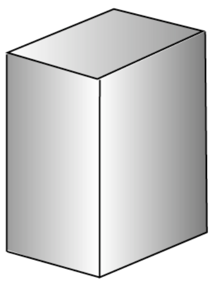
$$2a+2b+ +...+2c = 2(a+b+...+c)$$

Se le parti da sommare sono infinite il principio non si può applicare. Da quello che Cavalieri stesso afferma questo cruccio deve avergli occupato la mente non poco, fino a che, probabilmente, una improvvisa illuminazione, un improvviso volo di immaginazione gli deve aver fatto vedere le cose da un nuovo punto di vista.

Se invece di disporre le infinite fette attorno a un asse le sovrapponiamo una all'altra traslandole lungo un dato segmento PQ, la situazione è analoga alla precedente: per ogni punto A del segmento PQ abbiamo un triangolo T_A e un rettangolo R_A di area doppia,





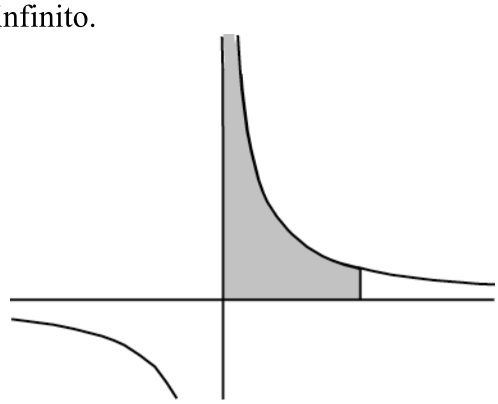



ma ora il volume del solido formato dai rettangoli è il doppio di quello formato dai triangoli dato che il volume di questi prismi si ottiene moltiplicando l'altezza PQ (che è la stessa nei due solidi così che abbiamo la stessa infinità di fette) con le basi che hanno area una il doppio dell'altra.

Da questo Cavalieri arriverà a formulare il suo principio del quale afferma di avere verificato la validità su moltissimi esempi: i solidi debbono essere costruiti con "fette parallele" e allora, se le altezze sono le stesse (cioè comporta che le fette corrispondono uno a uno ai punti di uno stesso segmento) e se il rapporto tra le aree delle fette che si corrispondono è costante, allora anche i volumi sono nello stesso rapporto. La formula dello stesso Cavalieri si riduce alla sentenza:

Ut unum ad unum sic omnia ad omnia

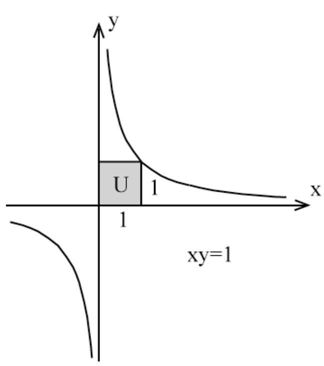
L'esempio del giovanissimo Torricelli (morto a soli 38 anni), entusiasta del principio di Cavalieri, è così estremo che lo stesso Cavalieri ne ebbe a dubitare. Torricelli inventa un solido, che lui chiama il *solido iperbolico*, che si ottiene ruotando una superficie di area infinita ma che, come solido, ha un volume finito. La rotazione si mangia talmente tanto spazio che il solido che ne risulta ruotando una superficie infinita, ha un volume finto. Qua ancora con maggiore chiarezza emerge la difficoltà a trattare ingenuamente concetti come quello di infinito, finito, di illimitato, limitato ecc e per la prima volta un oggetto illimitato che nessuna sfera può contornare, ha l'ardire, malgrado questo, di avere un volume finito.
La superficie che viene ruotata è quella compresa tra un arco di iperbole equilatera e un suo asintoto estendendo questa regione all'infinito.



La superficie tratteggiata nella figura si estende in alto all'infinito e la sua area S è maggiore di una qualunque grandezza K e dunque è infinita. Per vedere questo si deve sapere che, scegliendo come assi di riferimento i due asintoti, le coordinate (x,y) di un punto P dell'iperbole equilatera verificano l'equazione

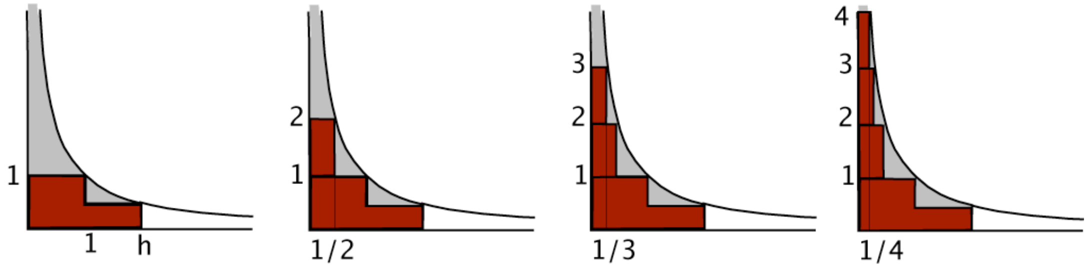
$$xy=a^2$$

essendo a una costante che, per semplicità, possiamo prendere come unità di misura. Ne segue che l'ordinata di un punto dell'iperbole di ascissa 1/n è n.



Costruiamo ora un "grattacielo" H_n di n piani interamente contenuto in S la cui area sia più grande della grandezza K. Se riusciamo a fare questo anche l'area di S che, contenendo insiemisticamente il grattacielo, è più grande di H_n, sarà più grande di K. L'unità di misura per le aree è il quadrato U di lato 1 indicato nella figura precedente e le aree, anche se U non è sempre esplicitamente indicato, saranno tutte espresse in rapporto ad U.

La seguente figura mostra come costruire il grattacielo:



Il primo piano ha un'area che dipende dalla lunghezza h della base e vale $h_0=1+(h-1)/h$. Il secondo piano ha altezza 1 e larghezza ½, e dunque area ½, il terzo piano ha altezza 1 e larghezza 1/3 e dunque area 1/3. In generale l'ennesimo piano avrà altezza 1 e larghezza 1/n e dunque area 1/n. In definitiva l'area occupata dal grattacielo di n piani sarà

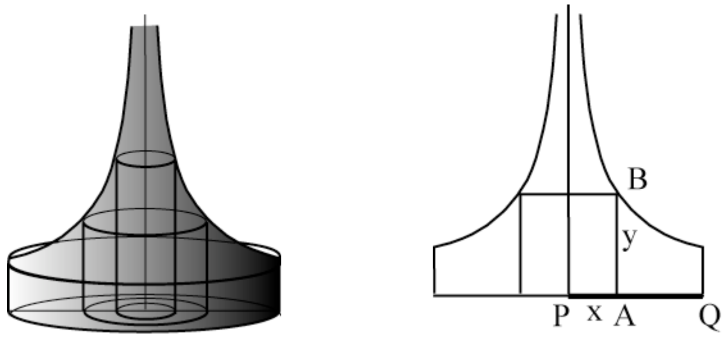
$$H_n = h_0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$$

Non conosciamo una formula che mi dica quanto valga questa somma in funzione di n, ma possiamo minorarla (1/3>1/4, 1/5>1/8,1/6>1/8,1/7>1/8 ecc) raggruppando i suoi primi 2^{k+1} termini nel modo seguente:

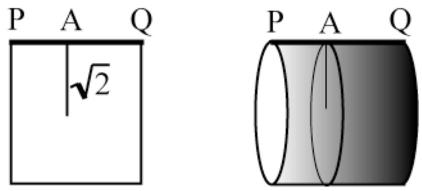
$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\ldots+\frac{1}{2^k+2^k}\right)>\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\ldots+\frac{2^k}{2^{k+1}}=\frac{k+1}{2}$$

Abbiamo dunque che, se $n \geq 2^{k+1}$ allora l'area H_n è maggiore di (k+1)/2 volte U essendo U il quadrato di lato unitario. Ciò significa che, ponendo m=(k+1)/2, se $n \geq 2^{2m}$ allora l'area H_n è maggiore di mU . Data quindi una qualunque grandezza K, posso trovare, per il postulato di Archimede, un multiplo m di U tale che mU>K, posso poi costruire il grattacielo di n piani, con $n \geq 2^{2m}$, e questo grattacielo risulta avere, per quanto abbiamo detto, area maggiore di mU e quindi maggiore di K. Dato che H_n è contenuto in S ciò significa che l'area di S è maggiore di K.
Abbiamo risolto il problema di dimostrare che S è infinito usando un procedimento decisamente brutale. Già nel caso che K=10U si dovrebbe, seguendo questo metodo, prendere un grattacielo altissimo per avere un'area maggiore di 10U. Dovremmo infatti prendere almeno 2^{20} piani cioè più di un milione di piani dato che 2^{20}=1.048.576. Sarà forse sufficiente sommare meno di un milione di termini per superare il numero 10? Quale è il più piccolo numero di termini la cui somma superi 10? Questioni tutt'altro che facili. In ogni caso sommando abbastanza termini possiamo superare un numero k arbitrariamente grande e dunque l'area di S è infinita.

Il giovane Torricelli dimostra che, sorprendentemente, il solito che si ottiene ruotando S attorno all'asintoto ha un volume finito che possiamo calcolare usando la teoria degli indivisibili curvi sviluppata da Cavalieri. Torricelli immagina, con grande ardire, questo solido formato da infinite "fette cilindriche parallele" ognuna delle quali è la superficie laterale di un cilindro che ha come base il cerchio di raggio PA= x e come altezza la corrispondente ordinata AB= y=1/x.

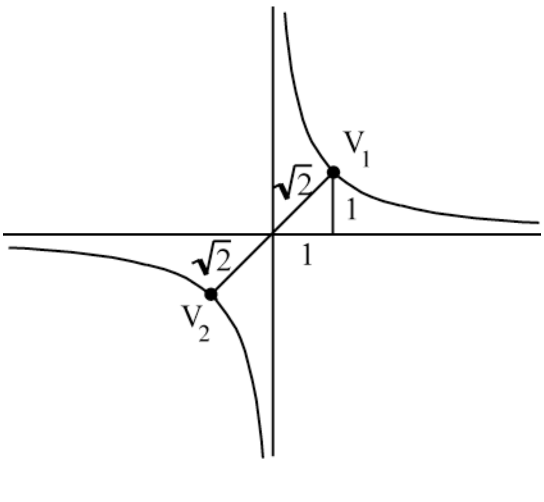


Tutti questi fogli cilindrici sono uno dentro l'altro e man mano che il loro raggio PA diventa piccolo la loro altezza AB diventa grande. Queste due grandezze, dato che xy=1, spingono in direzione contraria fino a compensarsi e quindi la superficie laterale del cilindro $(2\pi x)y= 2\pi$, è costante! Tanto diventa piccola la base del cilindro tanto si allunga l'altezza mantenendo la stessa superficie totale. Pensiamo ora questa superficie 2π come la superficie di un cerchio di raggio $\sqrt{2}$ "applicato" nel punto A del segmento PQ. Variando il punto A questi fogli circolari, tutti uguali tra loro, descrivono un cilindro di raggio $\sqrt{2}$ e altezza uguale al segmento PQ cioè alla metà base del solido iperbolico.



Dato che il solido iperbolico è formato da infiniti fogli cilindrici paralleli e dato che i fogli corrispondono a un cerchi paralleli di un cilindro di raggio $\sqrt{2}$ e altezza PQ=h e dato che i fogli cilindrici e i cerchi hanno la stessa area, usando il principio di Cavalieri, abbiamo che il volume del solido iperbolico è uguale a quello del cilindro: vale cioè $2\pi h$.

Osserviamo che il diametro del cilindro equivalente al solido iperbolico vale $2\sqrt{2}$ questo numero ha una naturale interpretazione geometrica. Infatti $2\sqrt{2}$ è la distanza tra i vertici dei due rami dell'iperbole che genera il solido, distanza ben nota che si chiama asse dell'iperbole.



Questo fatto fortunato permette a Torricelli di dare un elegante enunciato del suo stupefacente risultato: il volume di un solido iperbolico che ha come base un cerchio di raggio h e come profilo una iperbole equilatera di asse p è uguale al volume del cilindro di altezza h e diametro p.