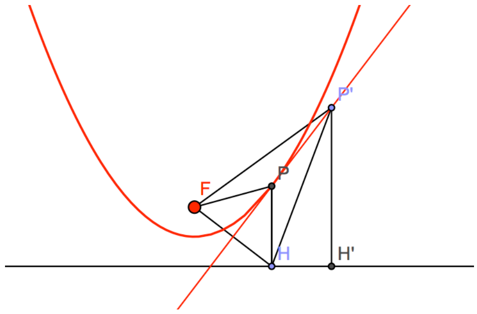
L'*adequazione* di Fermat per luoghi geometrici

La parabola.
Consideriamo una parabola definita da una direttrice e da un fuoco F e sia P un suo punto.



Abbiamo allora che la distanza PF è uguale alla distanza PH di P dalla direttrice. Prendiamo ora un punto P' sulla retta tangente (che non sappiamo ancora come trovare) molto vicino a P e applichiamo a P' la proprietà geometrica che caratterizza i punti della parabola

$$P'F \cong P'H'$$

naturalmente quella che abbiamo scritto non è una uguaglianza dato che P' non si trova sulla parabola, è una quasi uguaglianza che diventa uguaglianza quando P' coincide con P. Trascurando la distanza H'H che è piccola quando P' è molto vicino a P possiamo dire che

$$P'F \cong P'H$$

e quindi dato che anche PF=PH la retta P'P è *l'asse del segmento FH*.

Naturalmente questa non è una dimostrazione rigorosa, lo potrà diventare solo quando il processo di limite sarà reso rigoroso, tuttavia questo ragionamento permette di intuire il risultato che poi può essere dimostrato rigorosamente ragionando per assurdo. Ecco la dimostrazione classica:
se l'asse del segmento FH non fosse tangente alla parabola allora questa retta incontrerebbe la parabola in un ulteriore punto P' che, essendo un punto della parabola, avrà la proprietà

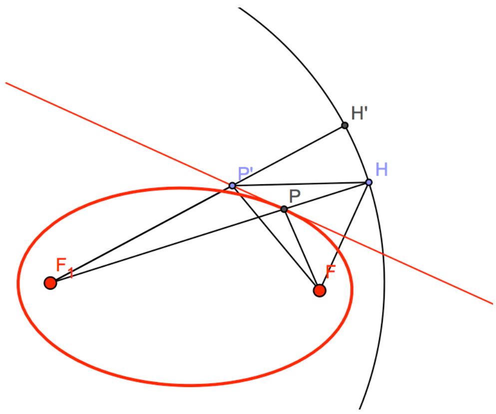
$$P'F=P'H'$$

dove con H' abbiamo denotato il piede della perpendicolare condotta da P' alla direttrice. D'altra parte essendo P' anche un punto dell'asse del segmento FH, dovrà essere equidistante da F e da H cioè

$$P'F=P'H$$

le due relazioni sono incompatibili dato che P'H > P'H' poiché in ogni triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore di un cateto.

Un metodo simile può essere usato per l'ellisse e per l'iperbole. Vediamo il caso dell'ellisse.



Sia P un punto dell'ellisse di fuochi F ed F_1, e sia $r = PF+PF_1$ la somma costante delle distanze di P dai due fuochi. Consideriamo la circonferenza di centro F_1 e raggio r e sia F_1PH il raggio di questa circonferenza passante per il punto P dell'ellisse. Poiché $PH = r-PF_1= PF$, il punto P si trova sull'asse del segmento FH. Per trovare la tangente nel punto P all'ellisse considero un punto P' sulla tangente molto vicino a P e suppongo che verifichi la proprietà caratteristica dei punti dell'ellisse e cioè

$$P'F+P'F_1 \cong r$$

prolungando la retta F_1P' fino a incontrare in H' la circonferenza, abbiamo che $P'H' \cong r-P'F_1 \cong P'F$, $P'H' \cong P'H$ dato che quando P' è molto vicino a P H' è molto vicino ad H. Ne segue allora che $PF=PH$ e $P'F \cong P'H$, quindi PP' è circa l'asse del segmento FH e diventa proprio l'asse quando P' si sovrappone a P.

Notiamo che l'asse del segmento FH è perpendicolare alla bisettrice dell'angolo F_1PF che pertanto risulta normale alla curva, Da questo segue che se un raggio di luce esce da F_1 e si riflette sull'ellisse, il raggio riflesso raggiungerà il punto F.