Geometria

Sessione autunnale 10/09/2012

Prof. Franco Ghione e Stefano Trapani

Nome e cognome ....

La prova non sarà considerata sufficiente se non saranno sviluppate correttamente le parti a) di tutti gli esercizi. Le parti c) sono facoltative. Motivare le risposte.

Esercizio 1

Consideriamo o seguenti vettori numerici di $\mathbf{R}^4$

$\mathbf{v_1}$= (1,0,-1,2), $\mathbf{v_2}$=(-1,3,1,1), $\mathbf{v_3}$= (-1,1,1,-1), $\mathbf{v_4}$= (-1,6,1,4) e sia V= Span($\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$)

a) Dire, motivando la risposta, se il vettore $\mathbf{v_4}$ è un vettore di V.
b) Trovare una base per lo spazio W= Span($\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$, $\mathbf{v_4}$).
c) Dire quale è la minima dimensione di un sottospazio vettoriale U di $\mathbf{R}^4$ tale che W+U=$\mathbf{R}^4$.

Esercizio 2

Fissato un sistema di riferimento (O,**i**,**j**,**k**) nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino i punti A, B, C di coordinate (1,0,0), (0,2,0), (0,0,3) rispettivamente.

a) Scrivere l'equazione cartesiana e le equazioni parametriche del piano α che contiene i punti A, B, C.
b) Calcolare la distanza del punto O dal piano α e il volume della piramide di vertici A,B,C,O.
c) Dimostrare che il volume della piramide di vertici O, A=(a_1,a_2,a_3), B=(b_1,b_2,b_3), C=(c_1,c_2,c_3) è dato dalla formula

$$Vol(O,A,B,C) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Esercizio 3

Sia data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & k & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Dire per quali valori del parametro reale k la matrice A_k è diagonalizzabile sui reali e per quali valori lo è sui complessi.
b) Determinare, al variare del parametro reale k, la dimensione dell'immagine dell'applicazione lineare di $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^3$ che associa a X il vettore A_kX e dire per quali valori di k il nucleo e l'immagine sono tra loro ortogonali.
c) Dire per quali valori del parametro k l'applicazione lineare considerata nel punto b) ammette una base ortonormale di autovettori.